

Travail mathématique et domaines mathématiques

Trabajo matemático y dominios matemáticos

Alain Kuzniak

RESUMEN

En el marco teórico de los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG), la diferenciación entre los enfoques de la geometría se basa en la noción de paradigmas geométricos. Gracias a esta noción, es posible señalar diferencias epistemológicas en los enfoques de la prueba, pero también, comprender y explicar variaciones en las génesis instrumentales y figurales. La extensión del marco teórico de los ETG a los Espacios de Trabajo Matemático llama la atención sobre el uso simultáneo de varios dominios matemáticos en el trabajo matemático. Examinaremos dos problemas basados inicialmente en un soporte geométrico pero cuya solución puede darse en algún otro dominio matemático que, desde un punto de vista escolar, entonces no se sitúa precisamente ni al mismo nivel paradigmático ni al mismo nivel de elaboración didáctica o pedagógica. Estas diferencias de niveles pueden ser fuente de malentendidos y disfunciones en la práctica escolar.

PALABRAS CLAVE:

- *Proceso de descubrimiento*
- *Dominio matemático*
- *Espacio de trabajo matemático*
- *Modelización*
- *Validación*

ABSTRACT

In the Geometrical Working Space (GWS) theoretical framework, the differentiation of geometrical approaches is based on the geometrical paradigms notion. Due to this notion, it is possible not only to point out the epistemological differences in the test approaches, but also to understand and explain variations in the instrumental and figural geneses. The extension of the GWS's theoretical framework to the Mathematical Working Spaces draws attention on the simultaneous use of several domains of mathematics in the mathematical work. We analyze the problems initially lying on a geometrical support, but which solution can be expressed in another mathematical domain that, from an educational point of view, is not, thus, necessarily situated neither to the same paradigmatic level, nor to the same didactical or pedagogical level of elaboration. These differences in level can be source of misunderstandings and dysfunction in the academic practice.

KEY WORDS:

- *Discovery process*
- *Mathematical domain*
- *Mathematical Working Space*
- *Modeling*
- *Validation*



RESUMO

No quadro teórico dos Espaços de Trabalho Geométrico (ETG), a diferenciação das abordagens da geometria baseia-se na noção de paradigmas geométricos. Com esta noção, é possível identificar as diferenças epistemológicas na abordagem da prova mas também compreender e explicar as variações nas gêneses instrumentais e figurais. A ampliação do quadro teórico dos ETG ao Espaço de Trabalho Matemático chama a atenção para o uso simultâneo de vários domínios matemáticos no trabalho matemático. Discutiremos dois problemas descritos inicialmente através dum suporte geométrico, mas cuja solução pode ser dada noutra domínio matemático. De um ponto de vista educacional, o novo domínio não está necessariamente no mesmo nível paradigmático nem no mesmo nível de desenvolvimento educacional ou pedagógico. Estas diferenças de níveis podem ser uma fonte de mal-entendidos e de falhas na prática escolar.

PALAVRAS CHAVE:

- *Processo de descoberta*
- *Domínio matemático*
- *Espaço de trabalho matemático*
- *Modelização*
- *Validação*

RÉSUMÉ

Dans le cadre théorique des Espaces de Travail Géométrique (ETG), la différenciation des approches de la géométrie s'appuie sur la notion de paradigmes géométriques. Grâce à cette notion, il est possible de pointer des différences épistémologiques dans les approches de la preuve mais aussi de comprendre et d'expliquer des variations dans les gèneses instrumentales et figurales. L'extension du cadre théorique des ETG aux Espaces de Travail Mathématique attire l'attention sur l'usage simultané de plusieurs domaines mathématiques dans le travail mathématique. Nous examinons deux problèmes s'appuyant initialement sur un support géométrique mais dont la solution peut être donnée dans un autre domaine mathématique qui, d'un point de vue scolaire, ne se situe pas alors nécessairement ni au même niveau paradigmatique ni au même niveau d'élaboration didactique ou pédagogique. Ces différences de niveaux peuvent être source de malentendus et de dysfonctionnements dans la pratique scolaire.

MOTS CLÉS:

- *Démarche de découverte*
- *Domaine mathématique*
- *Espace de travail mathématique*
- *Modélisation*
- *Validation*

1 Positionnement de la recherche dans le cadre théorique des ETM

1.1. Domaines mathématiques

Dans le prolongement de nos recherches en didactique de la géométrie, nous avons introduit la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) qui étend celle d'Espace de Travail Géométrique (ETG). Les ETM permettent de préciser et de décrire la nature du travail mathématique attendu de la

part des étudiants dans une institution donnée et aussi de décrire le travail de ces étudiants lorsqu'ils résolvent un problème.

Du fait de la structuration des mathématiques en différents domaines, il est nécessaire de bien étudier les articulations existant entre le travail dans ces domaines pour comprendre le travail mathématique dans son ensemble. Cependant, l'explicitation du découpage des mathématiques en domaines n'est pas évidente car, d'une part, les domaines évoluent dans le temps en fonction de l'évolution de la recherche en mathématiques et, d'autre part, ils dépendent aussi des institutions scolaires lorsqu'il s'agit des mathématiques enseignées. Pour rendre compte de cette division dans le cadre scolaire, les niveaux de co-détermination, introduits par Chevallard (1999), fournissent une échelle commode pour étudier les différents niveaux d'organisation des mathématiques du plus local (le sujet d'étude) au plus général, puisque la civilisation est placée au sommet de l'échelle proposée. Pour en rester à la discipline mathématique, Chevallard l'organise en domaines, sections, thèmes et sujets d'étude. Ainsi, dans le système français actuel, le domaine *fonctions* apparaît au collège en relation avec *organisation et gestion des données*. Il apparaît seul en seconde et disparaît en première englobé comme une section particulière de l'*analyse*. De la même façon, le domaine *géométrie* existe au collège en France mais n'est pas retenu dans les études PISA où il semble englobé dans un domaine dénommé *Espaces et formes* comme au Royaume-Uni.

Au-delà de ces variations institutionnelles, la différenciation des domaines mathématiques peut aussi plus fondamentalement reposer sur l'épistémologie des objets mathématiques et sur leurs relations avec des questions non mathématiques. Dans ce cadre, la géométrie élémentaire peut être considérée comme le domaine qui s'occupe de l'espace. Pour nous en tenir aux domaines les plus travaillés en didactique des mathématiques, en plus de la géométrie apparaissent un certain nombre de domaines : arithmétique, algèbre, analyse, probabilités et statistiques. Chacun de ces domaines sera relié à des thèmes non mathématiques comme le dénombrement, la symbolisation et la généralisation, la variation, le hasard, la décision. Cette liste n'épuise pas le sujet mais elle montre déjà la complexité et l'hétérogénéité des objets en jeu lorsqu'on se préoccupe du travail mathématique dans son ensemble.

Dans chaque domaine particulier, un autre type de questions porte sur la nature des objets et sur les relations entre les divers constituants de la théorie mathématique en cause, sur la minimalité et la cohérence formelle de l'axiomatique retenue. Dans le cadre de la géométrie (Houdement & Kuzniak, 1999), l'explicitation de ces questions a fait apparaître différentes approches que nous avons identifiées sous le terme de paradigme : un paradigme désignera, pour nous, l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique.

Enfin, il faut remarquer que les mathématiques ne sont pas la réunion disjointe des divers domaines qui les composent car ils entretiennent entre eux des relations complexes. De ce point de vue, l'approche globale par le travail mathématique enrichit la réflexion sur ces relations car elle précise les interactions entre domaines grâce à l'étude des méthodes, des registres en jeu et des passages d'un domaine à l'autre. Cette étude est importante d'un point de vue didactique et pédagogique car les recherches en didactique montrent que le professeur doit assumer et guider les changements de domaines. En didactique des mathématiques, Douady (1986) a particulièrement étudié l'influence de ces changements de domaines dans l'apprentissage. Dans sa terminologie, elle parle de changement de cadres. Pour Douady (1986), un cadre « est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. » (p.11) Du fait de sa référence aux images mentales, nous n'utiliserons par le cette notion de cadre qui s'avère ainsi bien plus large que celle de domaine mathématique puisqu'elle inclut une part de dimension cognitive que nous avons intégrée dans les Espaces de Travail Mathématique.

1.2. *Changements de domaines mathématiques et changements de registres*

Dans le cadre didactique qui est le nôtre, nous envisageons essentiellement les mathématiques comme une activité sémiotique particulière qui travaille les notions à partir de leur définition et explicitation dans des systèmes différents de signes organisés en registres de représentation sémiotique (Duval, 1996). Cette façon d'envisager l'activité mathématique dispense, dans une certaine mesure, de s'intéresser à ce que quelqu'un a dans la tête, ce que nous cherchons à éviter.

De ce fait, l'étude de l'usage des registres de représentation sémiotique devient essentielle pour comprendre l'activité cognitive du sujet propre à l'activité mathématique. Cette activité peut s'effectuer au sein du même registre de représentation par traitement ou bien elle suppose une conversion et un changement de registre (Duval, 1996). Ce changement de registre peut s'effectuer dans un même domaine mathématique ou, de fait, entraîner un changement de domaine mathématique. Ainsi, changements de registres et de domaines sont liés et nous souhaitons étudier ici la nature de leur relation à partir de deux questions duales liées au sens du changement.

- (Q1) Est-ce que le changement de domaine est premier et a pour conséquence un changement de registre ?
- (Q2) Est-ce qu'au contraire, le changement de registre est premier et il provoque implicitement un changement de domaine ?

Dans le premier cas, on peut supposer que c'est la nature épistémologique et sémantique des objets étudiés qui guide le travail mathématique alors que dans le second, la primauté donnée au changement de registre laisse plutôt penser que ce sont les points de vue techniques et syntaxiques qui pilotent le travail mathématique.

De plus, il faut aussi envisager ces questions du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage et donc se préoccuper de l'ETM idoine mis en place par le professeur et de l'ETM personnel des étudiants. Il importe notamment de voir si ces passages d'un domaine à l'autre ou d'un registre à l'autre sont assumés par le professeur et compris par l'élève, ou bien s'il s'agit de glissements subreptices et non explicites d'un domaine vers un autre prenant appui sur des changements de registres.

1.3. *Le plan de l'étude*

L'étude de l'influence d'un changement de domaines ou de registres sur la nature de l'Espace de Travail Mathématique nécessite une analyse de problèmes et de situations d'enseignement où apparaissent de tels changements. Nous appuierons notre analyse sur la structuration des Espaces de Travail Mathématique présentée dans Kuzniak et Richard (2014).

Nous aborderons cette étude de manière partielle à partir de deux problèmes où la géométrie est un des domaines impliqué dans le changement, ce qui nous permettra d'utiliser les résultats des recherches concernant les ETG, notés dans la suite $ETM_{\text{Géométrie}}$. Nous étudierons notamment comment s'effectuent les passages entre l' ETM_G et l'espace de travail ETM_{Domaine} correspondant à autre domaine mathématique D . Dans ce cadre, nous envisagerons la question de l'homogénéité épistémologique des différents ETM en jeu. Autrement dit, nous chercherons à savoir si les paradigmes qui guident le travail mathématique dans chaque domaine sont équivalents du point de vue du statut de la preuve qui pourra être soit expérimentale en s'appuyant sur des artefacts, soit démonstrative hypothético-déductive en privilégiant un discours de preuve articulé sur le seul référentiel théorique. De la même façon nous interrogerons l'homogénéité institutionnelle des différents ETM et ainsi nous pourrions voir si les référentiels théoriques de chaque domaine bénéficient du même niveau d'élaboration axiomatique.

Nous utiliserons aussi dans la suite les différents plans verticaux de l'ETM (Kuzniak & Richard, 2014) qui visualisent l'articulation entre les trois genèses sémiotique, discursive et instrumentale. En adoptant le point de vue de Coutat et Richard (2011), ces trois nouveaux plans peuvent être associés à des formes de travail différentes mettant l'accent sur l'articulation de deux genèses particulières. Une première forme de travail articule une sémiose de type perceptif avec un discours de preuve (Plan Sem-Dis), la seconde s'appuie sur les genèses instrumentales et discursive (Plan Ins-Dis) avec l'intervention des

artefacts et enfin la dernière provoque une première exploration des objets en s'appuyant sur les genèses sémiotiques et instrumentales (Plan Sem-Ins).

Nous observerons notamment le type d'entrée privilégié dans l'espace de travail pour résoudre les problèmes et ceci de manière à comprendre la circulation du travail entre les différentes genèses. Enfin, nous compléterons l'étude des questions Q1 et Q2 en observant l'impact des artefacts et des logiciels utilisés sur l'évolution de la nature de la validation en cas d'un changement de domaine lié aux instruments. Il s'agira de voir dans quelle mesure un travail orienté initialement par une preuve hypothético-déductive se transforme en preuve expérimentale sous l'effet des logiciels ou des instruments de mesure (question Q3).

② Étude de deux problèmes

Nous considérerons dans la suite que l'on peut décrire le travail mathématique à travers l'articulation des différents plans que nous avons précisés plus haut et nous envisagerons les questions Q1, Q2 et Q3 en utilisant ces éléments théoriques pour étudier deux problèmes à support géométrique. Le premier, Charlotte et Marie, repose à la fois sur l'exploitation d'une figure et sur un possible changement de domaine, le second, le « carré plié », nécessite un changement de domaine ou de registre pour sa résolution.

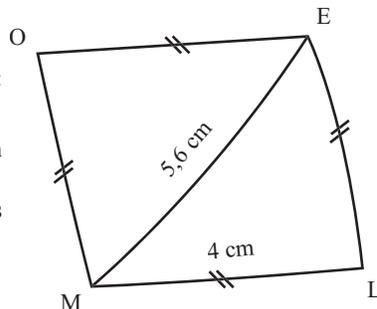
2.1. Un problème géométrique ambigu

Nous reprenons un exemple que nous avons plusieurs fois étudié : le problème de Charlotte et Marie. En plus de disposer d'une classification des réponses des étudiants (Kuzniak & Rauscher, 2011), une des raisons de cette reprise est le fait que ce problème a fait l'objet d'un sujet de Brevet des collèges (examen en fin de neuvième année) en 2012 sous une forme nouvelle. Dans cette nouvelle version, un dessin à main levée illustre l'énoncé.

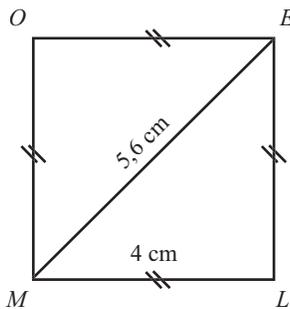
EXERCICE 2

Voici la figure à main levée d'un quadrilatère :

1. Reproduire en vraie grandeur ce quadrilatère.
2. Pourquoi peut-on affirmer que OELM est un losange ?
3. Marie soutient que OELM est un carré, mais Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai. Qui a raison ? Pourquoi ?



Tandis que dans la forme initiale de l'énoncé, un dessin semblable à un carré et plus conforme à la réalité est donné et il n'y a pas la question 1 sur la reproduction du quadrilatère.



Dans ce cas, le problème est ambigu car l'origine de la figure n'est pas indiquée. S'agit-il d'un dessin déjà existant qui a été mesuré ou bien de la construction d'un carré ou d'un losange avec l'approximation qu'apportent les instruments ?

Notre étude (Kuzniak & Rauscher, 2011) a mis en évidence plusieurs types de solutions basées sur des approches empiriques. En effet, une majorité d'étudiants s'appuie sur une interprétation visuelle et perceptive du problème qui conduit soit à l'affirmation sans preuve que la figure est bien un carré (conviction perceptive) soit à une démarche de validation de cette affirmation qui s'appuie sur les instruments de construction.

Le travail de ces étudiants est initié dans le plan (Sem \rightarrow Dis) avec un appui sur une identification visuelle de la figure qui donne une idée du résultat. Certains de ces étudiants en restent là convaincus par l'aspect iconique de la figure. Ils n'apportent pas une preuve discursive basée sur le référentiel théorique (Dis \rightarrow Sem). Par contre, la plupart des étudiants s'engagent alors dans une démarche de validation sous sa forme expérimentale en utilisant divers instruments de dessin (Plan Ins-Dis). Certains vérifient avec une équerre que les diagonales sont perpendiculaires. D'autres ont aussi vérifié l'égalité ou la non égalité des longueurs des diagonales avec la règle ou le compas (les quatre sommets sont considérés ou non comme étant sur le même cercle).

L'usage des instruments de construction et de mesure intègre de fait l'approximation dans le travail demandé or, au niveau du collège, cette dernière relève presque uniquement du domaine intitulé *nombres et calculs* et non du domaine *grandeurs et mesure*. En effet, dans ce domaine, aucun travail de mesurage n'est prévu, ce type d'activité s'inscrivant dans une autre discipline, la physique. L'absence d'un travail spécifique sur l'approximation dans l'institution collège fait que l'ETM_{Géométrie} idoïne mis en place dans les classes ne donne pas aux étudiants les outils pour un traitement adéquat des résultats obtenus avec les instruments. Cette carence est en partie justifiée par le fait qu'à ce niveau de la scolarité, il y a un basculement attendu vers la Géométrie II sans recours aux instruments pour prouver.

Le recours à une figure à main levée devrait permettre de diminuer l'impact de la figure et favoriser l'entrée discursive en s'appuyant sur des propriétés démontrées et non plus sur des assertions vérifiées expérimentalement. Mais,

la nouvelle formulation retenue ici est exemplaire de l'incohérence de l'ETM idoine actuel en France. En effet, la première question replace le problème dans le cadre des constructions et des instruments par sa demande d'une « reproduction » (sic) en vraie grandeur de la figure à main levée. Cette fois, il devient clair que le dessin obtenu est le résultat d'une construction et cette demande transforme radicalement le travail géométrique en privilégiant, de fait, le paradigme de la Géométrie I avec toute l'ambiguïté de ce type de problèmes donnés dans un ETG de référence supposé privilégier la Géométrie II.

Dans l'ETM idoine correspondant à ce niveau de scolarité, la solution de ces problèmes d'approximation géométrique attendue par les enseignants ne repose pas sur le mesurage mais sur l'emploi des théorèmes de Pythagore ou de Thalès. Ces théorèmes sont généralement associés à des configurations géométriques standards qui jouent le rôle de signe déclencheur. Dans notre problème particulier, il est attendu de prouver que la figure n'est pas un carré en montrant l'inégalité des nombres calculés grâce au théorème de Pythagore. Plusieurs raisonnements basés sur des approximations numériques sont alors possibles mettant en jeu un des différents niveaux de pensée approximative mis en évidence par Guilbaud (1985). En suivant sa classification, on peut considérer trois niveaux qui vont structurer de manière différente le travail mathématique en changeant la nature du référentiel théorique utilisé dans l'ETM_{Nombres}.

- 1) une valeur approchée indicative
- 2) un encadrement par des nombres décimaux
- 3) une suite indéfinie d'encadrements qui suppose les nombres réels.

Dans le cas du problème étudié, cela donne trois manières de le traiter :

1. Une première utilise une approximation de $4\sqrt{2}$ de la forme 5,66. Ce nombre est différent de 5,6. Cette assertion permet de conclure en Géométrie II que la figure n'est pas un carré.
2. Une seconde solution suppose que la longueur du côté (5,6 cm) est donnée avec une incertitude de 0,1 cm. Elle est ainsi comprise entre 5,5 et 5,7 et comme $4\sqrt{2}$ est dans cet intervalle, la figure peut donc être considérée comme un carré dans une approche paradigmatique qui correspond cette fois à la Géométrie I.
3. La dernière solution exploite la nature différente des nombres réels en jeu (5,6 et $4\sqrt{2}$) : ces deux nombres ne peuvent être égaux du fait de l'irrationalité de l'un d'eux. Dans ce cas, le niveau paradigmatique supposé alors dans ce nouvel ETM_{Nombres} ne correspond pas à celui de attendu dans la classe où est posé le problème de géométrie faute d'un travail explicite sur les nombres réels à ce niveau de la scolarité.

Le problème de Géométrie initialement posé dans un ETM_{Géométrie} se transforme en un problème de calcul numérique associé à un espace de travail des nombres, ETM_{Nombres}. Ce changement de domaine est implicite et résulte d'un glissement dû au changement de registre provoqué par le Théorème de Pythagore. D'autre part, du fait de l'absence d'un travail explicite sur les propriétés géométriques liées à l'approximation dans l'ETG idoïne, les étudiants engagés dans ce type de démarche éprouvent des difficultés pour conclure. Cela entraîne chez les étudiants une grande variété d'interprétation des résultats et ils pourront soit mettre leur conclusion en accord avec ce qu'ils voient (« c'est un carré ») soit aller à l'encontre du vu et l'on retrouve, laissé à leur seule initiative, le conflit souligné par Parzysz (1988) entre le vu et le su.

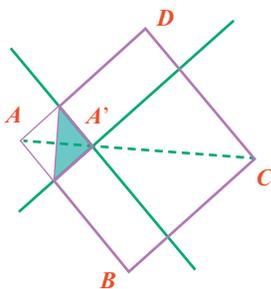
2.2. Un problème géométrique nécessitant un changement de domaine

Le problème du carré plié relève de ce que Artigue, Cazes et Vandebrouck (2011) ont appelé des problèmes d'enseignes "shop-sign problems". Dans ces problèmes avec support géométrique, deux surfaces sont déterminées par un point qui se déplace à l'intérieur d'un carré, d'un cercle ou d'un rectangle. Les deux aires changent conjointement en fonction de la position du point et il s'agit de comparer les aires. Ces problèmes sont posés dans le domaine géométrique mais leur solution nécessite un changement vers un autre domaine mathématique, algèbre ou analyse. Simultanément, un changement de registres avec des notations algébriques ou fonctionnelles est indispensable pour parvenir à la solution. La plupart du temps, les fonctions sont des polynômes du second degré qui sont aux programmes des classes du secondaire où ces problèmes sont posés.

La résolution du problème du carré plié est très dépendante de la forme de la consigne et du milieu matériel fourni aux étudiants. Dans le cas que nous avons étudié, la tâche a été donnée dans un contexte réel sans formulation mathématique écrite :

Un carré découpé dans une feuille bicolore est donné aux étudiants qui doivent le plier le long d'une diagonale et comparer les aires des deux parties visible dans chaque couleur.

Ce problème n'est pas original et a été utilisé dans une étude comparative franco-mexicaine (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2011). Nous donnons la formulation proposée au Mexique et qui permet au lecteur un accès plus aisé au problème :



On donne une pièce carrée de papier ABCD de côté l . Une des faces du papier est blanche et l'autre bleue. Le coin A est plié sur un point A' situé sur la diagonale AC. Où doit être situé le point A' sur cette diagonale pour que la surface visible soit à moitié bleue à moitié blanche ?

Les étudiants ont dû résoudre le problème par équipes avec certaines contraintes portant sur les outils informatiques disponibles. Nous avons ainsi pu explorer les modifications induites dans l'ETM par les artefacts et vérifier l'impact de la genèse instrumentale sur le travail mathématique dans les quatre cas suivants : un travail avec uniquement l'usage du papier crayon, un environnement avec GeoGebra, un autre avec une calculatrice et enfin un dernier avec un tableur.

Le cas classique d'un environnement papier crayon sans outils informatiques

Les étudiants commencent par faire une modélisation de la situation en passant dans le cadre algébrique ce qui leur permet d'aboutir à une équation du second degré qui leur donne la valeur de x en fonction du côté du carré l :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} l$$

Le travail de ces étudiants avancés se situe dans le plan (Sem ↔ Dis) et il passe par un changement de domaine mathématique qui fait basculer la tâche dans l'algèbre. Les étudiants poursuivent alors leur travail dans ce plan pour valider le résultat par démonstration en s'appuyant sur la technique de résolution d'une équation quadratique en relation avec un traitement dans le registre algébrique.

Le changement de domaine et l'entrée dans l'ETM_{Algèbre} supposent une maîtrise de la démonstration dans ce nouvel Espace de Travail pour parvenir à la solution. Cette solution repose sur la gestion simultanée et maîtrisée de deux ETM d'où sa difficulté.

Avec l'utilisation d'un DGS, GeoGebra

Par sa consigne, le professeur favorise une entrée instrumentale dans le travail mathématique et l'usage d'un logiciel aussi polyvalent que GeoGebra débouche sur l'exploration de plusieurs registres. Le travail personnel des étudiants va dépendre de leur maîtrise du logiciel : emploi du mode « trace » ou « lieu », connaissance du fait que le logiciel donne une valeur numérique de l'aire d'un polygone quelconque, lien avec les graphes de fonctions. Le travail est donc initié dans le plan (Sem-Ins) et l'un des enjeux de la situation sera de savoir comment s'effectue la transition vers la validation.

Chez les étudiants que nous avons pu observer, leur maîtrise du logiciel les a conduits rapidement à un changement de registre vers le registre graphique.

Plus précisément, ils ont travaillé de la manière suivante en utilisant uniquement et directement GeoGebra, sans usage du papier.

- Dessin du carré plié avec la mise en évidence des aires de chacune des parties. Le point qui se déplace est le point A' sur la diagonale.
- Sur la même page écran, deux courbes sont tracées dans un repère cartésien : l'une représente l'aire du triangle bleu et l'autre celle de l'hexagone blanc. Le lien entre le point A' et les aires est fait grâce au mode « Trace » et non avec le mode « lieu ».
- De ce fait, le point d'intersection des graphes est obtenu par approximation et sa valeur numérique dépend de la valeur numérique de la longueur du côté. Il n'y a pas ici de généralisation du résultat en fonction de la variable l comme dans le travail algébrique précédent.

Ainsi, le travail a commencé dans le plan (Sem-Ins) et il a permis d'explorer un nouveau registre graphique sur lequel s'est appuyée la démarche de validation de type expérimental dans le plan (Ins \rightarrow Dis). Du fait de l'usage du mode « trace », l'approximation est faite par ajustement. Le changement de domaine est implicite comme conséquence du changement de registre. Le travail mathématique est fondé sur l'exploration de nombreux registres (graphiques, nombres, écritures algébriques) qui conduisent à une preuve sans travail démonstratif. Cet espace de travail relève implicitement de l'Analyse mathématique ou pour garder la terminologie institutionnelle de l'étude des fonctions.

Avec une calculatrice graphique.

Cette fois, les étudiants ont commencé leur travail par écrit et par une phase de modélisation (Sem-Dis) : ils ont dû exprimer la valeur de chacune des aires en fonction de la variable x égale au côté du triangle plié. Ensuite, l'usage imposé, par le professeur, de la calculatrice les a obligés à passer par une exploration avec les instruments et une recherche de la solution approchée de l'intersection des deux courbes représentées sur l'écran de la calculatrice (Sem-Ins). Pour cela, ils ont utilisé simultanément les tableaux de valeurs et le zoom de la calculatrice dans une démarche proche de celle utilisée avec GeoGebra.

Sur la demande du professeur et du fait de la disponibilité des écritures algébriques, les étudiants ont pu résoudre l'équation du second degré associée à l'intersection des deux graphes et ils ont obtenu ainsi une valeur exacte dépendant de l . Ils sont ainsi revenus dans le plan (Sem-Dis) avec un travail algébrique, les artefacts ont nourri l'intuition mais leur usage n'est pas requis pour la preuve.

Ce travail mathématique très dirigé par le professeur correspond à l'espace de travail idoine attendu en classe de seconde (année 10). Il faut constater qu'il

a provoqué des blocages et des arrêts dans la circulation à l'intérieur de l'ETM. Dans un premier temps, les étudiants ont effectué un changement explicite de domaine en modélisant la situation grâce à l'Algèbre puis le professeur les a forcés à une exploration graphique avec la calculatrice qui n'a pas débouché clairement sur une solution. Enfin, il leur a fait finir l'activité en résolvant l'équation trouvée au début de l'activité. Le rôle de l'exploration avec la calculatrice est entré en conflit avec le travail spontané de ces étudiants. Le domaine mathématique est celui des fonctions et il correspond à un $ETM_{\text{Fonctions}}$ où l'algèbre sert d'appui pour les démonstrations et la définition des fonctions (Vandebrouck, 2011).

Avec un tableur

Dans ce cas, l'usage imposé du tableur provoque immédiatement un changement de registre qui a rendu implicite le passage dans le domaine algébrique. En effet, les étudiants ont utilisé, comme variable dans le tableur, la hauteur du triangle plié et ils ont fixé les variations de cette variable grâce à la longueur de la diagonale en incrémentant les valeurs numériques avec un pas donné. Le tableur fournit alors les valeurs numériques des deux aires (celle du triangle et celle de l'hexagone) et le rapport de ces deux aires. Une valeur approchée du résultat est obtenue quand le rapport est égal à 1. Cette fois, le travail s'est effectué dans (Sem-Ins) avec un passage vers la validation orienté par l'ajustement dans le registre du tableur. Le domaine de travail est resté implicite et il n'est pas évident de savoir s'il s'agissait d'un travail de type numérique ou bien fonctionnel.

En conclusion, l'intérêt de ce problème est de confronter les démarches de validation et d'exploration lorsque l'on fait varier les instruments autorisés. Il a aussi clarifié la difficulté de conclure la phase de modélisation par une validation formelle lorsque l'usage des artefacts est imposé. On a pu repérer deux grandes formes de travail mathématique qui s'appuient de manière différente sur les changements de domaines et de registres.

1. Le changement de domaine de travail (Algèbre ou Fonctions) est explicite et fait entrer dans un nouvel Espace de Travail ETM_D . De la maîtrise ou non de cet ETM_D va venir la solution. La démarche de preuve peut osciller entre preuve expérimentale et preuve démonstrative qui est celle attendue dans l' ETM_D idoine correspondant à ce niveau de scolarité.
2. Le changement de domaine de travail est implicite et il est basé sur un changement explicite de registre de représentation imposé par le professeur par le choix des instruments mis dans le milieu matériel. Les deux registres sont ici le registre graphique en relation avec le domaine des fonctions et le registre numérique (tableur) en relation avec le domaine algébrique. Le travail d'approximation est plutôt du type ajustement ou encadrement mais le professeur peut le faire

basculer vers un niveau de pensée approximative plus élevé en introduisant le mode "lieu" à la place du mode "trace" dans le cas de GeoGebra et en faisant travailler la méthode de dichotomie dans le registre numérique dans le cas du tableur.

3 Conclusion

L'objet de cet article était d'explicitier la nature du travail mathématique dans le cadre scolaire lorsque des changements de domaines mathématiques et de registres de représentation sont nécessaires pour résoudre les problèmes posés. Nous avons appuyé la description de ce travail sur la structuration des ETM suivant les trois plans verticaux qui rendent compte des différentes genèses qui relient les plans épistémologique et cognitif. Cette structuration en différents plans permet une description plus précise du travail personnel des étudiants mais aussi une analyse de l'Espace de travail idoine que le professeur va pouvoir mettre en place. Ces analyses ne sont pas seulement descriptives mais visent aussi à penser et créer les conditions de la mise en place d'un ETM idoine grâce à la mise en évidence des points sur lesquels le professeur va pouvoir s'appuyer pour contrôler les changements de registres et les changements de domaines. Cet aspect est particulièrement sensible lorsque des artefacts technologiques sont introduits par le professeur dans l'espace de travail des étudiants.

Notre étude a permis d'observer que dans le travail idoine attendu, le changement de domaine mathématique s'effectue explicitement dans le plan (Sem-Dis) correspondant à une phase d'identification du problème poursuivie par une validation basée sur un référentiel théorique. Ce changement de domaine provoque dans le même temps un changement de registre de représentation qui apparaît comme une conséquence du changement explicite de domaine. Ce changement de registre complète alors le discours de validation de type démonstratif et il nécessite la maîtrise des techniques de traitements dans les registres de représentation associés au nouvel ETM. Le changement de domaine mathématique suppose une maîtrise technique suffisante par les étudiants des registres en jeu dans le nouvel ETM pour être efficace. Dans ces conditions, les étudiants peuvent fournir une réponse adéquate au problème proposé et présenter leur solution d'une manière conforme au type de validation attendu par le professeur dans l'espace de travail idoine.

De plus en plus fréquemment et conformément aux attentes institutionnelles, les enseignants recourent aux outils informatiques pour guider la phase de découverte de la solution. Nous avons vu que cet usage des outils faisait entrer

les étudiants dans un nouveau registre qui de manière subreptice, i.e non explicite, les faisait changer de domaine mathématique. La transition de la démarche de découverte et d'exploration (Plan Sem-Ins) en une démarche de validation s'effectue alors plutôt dans un contexte expérimental (Sem-Inst → Dis) plutôt que démonstratif (Dis → Sem-Inst) souvent en contradiction avec les attentes du professeur. Ceci est dû à la non reconnaissance par les étudiants du nouveau domaine et/ou à une méconnaissance des règles de fonctionnement de l'ETM_D idoine qui lui est associé. En effet, comme l'ETM idoine mis en place par le professeur n'assume par une claire prise en charge des conséquences de l'exploration instrumentale sur la nature et le type de la validation, les étudiants enrichissent le référentiel théorique en s'appuyant sur cette première exploration instrumentale des propriétés alors que les professeurs attendent une justification des découvertes initiales qui utilise un référentiel théorique déjà-là.

Un autre élément vient perturber le bon fonctionnement de l'ETM lorsqu'il y a un changement de domaine mathématique qui nécessite un travail de gestion de l'approximation sur les données proposées par la machine. Cette gestion de l'approximation ne fait pas partie de l'espace de travail idoine développé par l'enseignant or de fait elle renvoie à différents paradigmes qui peuvent être en contradiction dans du point de vue de la nature épistémologique de la preuve (Kuzniak 2010). Cela explique les divers blocages rencontrés couramment dans ces activités de changements de domaines mathématiques notamment dans les problèmes de modélisation où expérimentation et démonstration apparaissent parfois contradictoires. Le changement non explicite de domaine mathématique et l'absence d'un travail explicite sur les relations entre l'approximation dans le domaine géométrique et dans le domaine cible impliquent un mauvais feuilletage entre les deux ETM.

Pour les surmonter, l'intervention du professeur doit se situer au niveau de l'explicitation du changement de domaine lié au changement de registre. La difficulté est ici d'assurer un niveau de compétence égale dans les deux ETM_D pour permettre les jeux entre domaines mathématiques correspondant aux *jeux de cadres* introduits par Douady (1986). Une autre manière de concevoir cette relation est de profiter de ce changement de domaine mathématique pour développer la maîtrise d'un des deux ETM_D en s'appuyant sur une meilleure maîtrise de l'autre domaine. Il est également possible de développer des outils informatiques qui assurent une médiation instrumentale et sémiotique en travaillant sur le traitement à l'intérieur du registre privilégié pour la solution comme dans les travaux sur les fractions d'Adjage et Pluvinage (2007) ou ceux de Falcade et Mariotti (2011) dans le domaine géométrique. Néanmoins, notre analyse des interactions entre domaines et registres à l'intérieur des espaces de travail mathématique montre leur grande complexité ainsi que leur très difficile gestion par le professeur.

Références

- Adjage, R. & Pluvineau, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65, pp. 149-175.
- Artigue, M., Cazes, C. & Vandebrouck, F. (2011). The shop sign family: a project for supporting teachers' use of ICT. *Poster at Cerme7*. University of Rzeszow.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), pp. 221-265.
- Coutat, S. & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, pp. 97-126.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7 (2), pp. 7-31.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en Didactique des mathématiques ? *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 16 (3), pp. 349-382.
- Falcade, R. & Mariotti, M.A. (2011). L'évolution des signes dans le processus de médiation sémiotique. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*.
- Guilbaud, G. Th. (1985). *Leçons d'à peu-près*. Paris, France: Christian Bourgois.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational studies in Mathematics*, 40, pp. 283-312.
- Kuzniak, A. (2010). *Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France*, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, pp. 9-24.
- Kuzniak, A. & Rauscher, J. C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties?. *Educational studies in Mathematics*, 77 (1), pp. 129-147.
- Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Espaces de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (Número Especial TOMO I), pp. 29-39.
- Kuzniak, A., Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a Problem: A study in Teacher Training. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1, 2), pp. 407-440.
- Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, pp. 79-92.
- Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, pp. 149-186.

Autor

Alain Kuzniak

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot, Paris, France.

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr