Antonio M. Oller Marcén, José María Gairín Sallán

LA GÉNESIS HISTÓRICA DE LOS CONCEPTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN Y SU POSTERIOR ARITMETIZACIÓN

The historical genesis of the concepts ratio and proportion and later arithmetization

RESUMEN

La importancia de la proporcionalidad aritmética, tanto desde el punto de vista de la matemática escolar, como desde el punto de vista de su aplicación práctica, es innegable. Esta importancia queda reflejada en el número de trabajos en el campo de la Matemática Educativa que tienen este tópico como centro de atención. En este artículo realizamos una revisión histórica de algunos de los conceptos principales relacionados con la proporcionalidad aritmética, como son la razón y la proporción. Además de su importancia como estudio histórico, pensamos que las conclusiones a las que conduce este trabajo pueden resultar de utilidad para mejorar la enseñanza de las ideas, los conceptos y las técnicas implicadas.

PALABRAS CLAVE:

- *Proporcionalidad*
- *Aritmética*
- *Razón*
- *Proporción*
- *Historia*

ABSTRACT

The importance of the arithmetical proportion is unquestionable from two points of view: school mathematics and its practical application. Its importance is reflected in a series of works in the Mathematics Education field, which is our main topic. In this article we show an historical review of some of the main concepts related to the arithmetical proportion, such as ratio and proportion. Besides its importance, as an historical study, we believe that the conclusions that follow this research may be useful in order to improve the teaching of ideas, concepts and techniques involved.

KEY WORDS:

- *Proportionality*
- *Arithmetic*
- *Ratio*
- *Proportion*
- *History*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2013) *16* (3): 317-338.
Recepción: Mayo 6, 2012 / Aceptación: Junio 17, 2013. DOI: 10.12802/relime.13.1632

RESUMO

A importância da proporcionalidade aritmética, tanto do ponto de vista da matemática escolar como do ponto de vista de sua aplicação prática, é inegável. Esta importância se vê refletida no número de trabalhos no campo da Matemática Educativa que possuem este tópico como centro de atenção. Neste artigo, realizamos uma revisão histórica de alguns dos conceitos principais relativos à proporcionalidade aritmética, como a razão e a proporção. Além de sua importância como estudo histórico, pensamos que as conclusões às quais este trabalho conduz podem ser úteis para melhorar o ensino das ideias, dos conceitos e das técnicas implicadas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Proporcionalidade*
- *Aritmética*
- *Razão*
- *Proporção*
- *História*

RÉSUMÉ

L'importance de la proportionnalité arithmétique, du point de vue des mathématiques scolaires comme de son application pratique, est indéniable. Cette importance est mise en évidence dans tous les recherches menées dans le domaine des didactique des mathématiques où ce sujet est traité. Dans cet article, on fait une révision historique sur quelques concepts clés de la proportionnalité arithmétique, tels que raison et proportion. Au-delà de son importance du point de vue historique, on considère que les conclusions de ce rapport peuvent être utiles pour améliorer l'enseignement des idées, des concepts et des tecniques impliquées.

MOTS CLÉS:

- *Proportionnalité*
- *Arithmétique*
- *Raison*
- *Proportion*
- *Histoire*

1. Introducción

El razonamiento proporcional es una importante herramienta matemática. Múltiples fenómenos físicos y económicos pueden modelizarse utilizando los conceptos de razón y proporción. Muchos son también los problemas cotidianos que pueden resolverse con técnicas relacionadas con la proporcionalidad. Se trata además de un tópico que aparece en los currícula y libros de texto de cualquier país desde hace más de 200 años. Esta importancia, junto con las dificultades que muchos alumnos demuestran tener cuando necesitan manejar los conceptos involucrados (ver Modestou et al., (2008); Valverde y Castro (2009) o Van Dooren et al., (2004)), hace que la proporcionalidad aritmética reciba gran atención por parte de investigadores en Matemática Educativa.

En este trabajo pretendemos realizar una revisión histórica sobre algunos de los principales aspectos conceptuales relacionados con la proporcionalidad aritmética, a saber, los conceptos de razón y de proporción. En concreto nos centraremos en su génesis y en los inicios del posterior proceso de aritmetización que tuvo lugar[1]. Este estudio, además de su importancia puramente académica, está motivado también por el interesante uso que puede hacerse de la Historia de las Matemáticas dentro del aula (ver Jankvist, (2009), v. gr.) y, sobre todo, por el hecho de que las conclusiones a las que conduce (ver la Sección 4) pueden y deben resultar de gran utilidad para plantear una revisión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad (trabajo en curso por parte de los autores).

Como ya se ha comentado, los aspectos principales que pretendemos cubrir con nuestro trabajo son los siguientes:

1. Analizar detenidamente los primeros intentos de fundamentación teórica de la proporcionalidad y, en concreto, de los conceptos de razón y proporción. Hemos encontrado muestras de estos intentos en dos textos provenientes de culturas muy diferentes y, en consecuencia, sustentados en filosofías y finalidades bien diferentes:
   a) Los *Elementos* de Euclides (s. III a.n.e.).
   b) El comentario de Liu Hui al *Jiu zhang suan shu*[2] (s. III).
2. Presentar el proceso de aritmetización sufrido por el concepto de razón a partir de la Edad Media y que, con el paso del tiempo, ha llevado a que se priorice su faceta numérica por encima de su significado. Nuevamente mostraremos dos modos distintos en los que se inició dicho proceso:
   a) En los comentarios de Ommar al-Khayyam a los *Elementos* (s. XI).
   b) En la traducción de los *Elementos* por parte de Giovanni Campano (s. XIII).

Los aspectos anteriores determinan en buena medida la organización interna de este artículo. En la Sección 2 abordamos el primero de los puntos anteriores. En la Sección 3 nos centramos en el segundo de los puntos anteriores. Finalmente,

---

[1] Nos centramos, pues, en los primeros capítulos de la historia de la proporcionalidad. Otros momentos clave de dicha historia, como la influencia de la proporcionalidad en el nacimiento de la Geometría de Descartes, o los inicios del tratamiento moderno de los conceptos de razón y proporción (en los trabajos de Legendre o Lacroix en el s. XIX sobre el paralelismo) quedan fuera del marco de este trabajo.

[2] Los *Nueve Capítulos sobre los Procedimientos Matemáticos*. En adelante nos referiremos a este texto como los *Nueve Capítulos*.

en la Sección 4 presentaremos algunas consideraciones importantes que surgen del estudio realizado y que, pensamos, pueden ser de interés en cuanto al diseño de secuencias didácticas para la proporcionalidad aritmética.

2. Los conceptos de razón y proporción

Al abordar el estudio del tratamiento que los aspectos puramente conceptuales relacionados con la proporcionalidad han recibido a lo largo de la historia, surgen algunas dificultades que, por otra parte, son inherentes a la propia investigación histórica:

1. Generalmente, el origen de las teorías matemáticas suele encontrarse en la necesidad de resolver problemas prácticos concretos. Incluso desde la rama más abstracta de la matemática actual puede rastrearse el camino que lleva a las raíces del árbol, hundidas en la tierra. Esto hace que el modo de manipular los conceptos abstractos esté influido por los usos prácticos que se vayan a dar a esos conceptos.
2. Debemos tener presente la distinción entre historia y herencia (Grattan-Guinness, 2004) al estudiar un concepto matemático determinado. No debemos buscar el concepto en la forma en que se concibe hoy en día, pues nuestra concepción actual es diferente de la imperante en el momento o el lugar en que se escribió la obra que se analiza.

El razonamiento proporcional es un recurso que se ha utilizado para resolver problemas que podríamos llamar cotidianos desde tiempo inmemorial. Por ejemplo, en el *Papiro de Rhind* (s. XVII a.n.e.) encontramos, entre otros muchos problemas, el siguiente[3]:

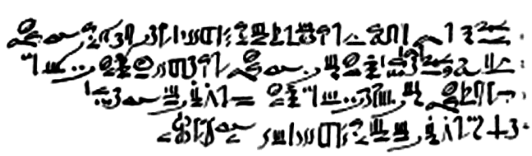

Figura 1: Problema 66 del Papiro de Rhind (Chace, 1979, pág. 129).
"*Si 10 hekat[4] de grasa deben durar un año, ¿cuánta grasa puede usarse en un día?*"

[3] Se trata del problema 66.Véase Robins y Shute (1987, p. 51).

[4] Unidad de volumen aproximadamente igual a 4.8 litros. Robins y Shute (1987, p. 14).

En ese mismo texto aparecen problemas referentes a intercambios de mercancías o a repartos proporcionales. También aparecen estos tipos de problemas, junto con otros muchos, en textos chinos desde el siglo II a.n.e. (Cullen, 2007) y en textos hindúes que, aunque cronológicamente mucho más tardíos, recogen tradiciones anteriores, como el *Lilavati* (Patwardan et al., 2001). Es remarcable el hecho de que las técnicas de resolución y los algoritmos utilizados son desde entonces similares a los actuales pese a que surgen en contextos alejados del paradigma griego (Crespo et al., 2009).

Sin embargo, la búsqueda de una base teórica para ese tipo de razonamiento es, aunque antigua, bastante más tardía y, sobre todo, menos extendida. En esta sección abordamos dos aspectos principalmente:

1. En primer lugar, estudiaremos los conceptos clave de 'razón' y 'proporción' en los *Elementos* de Euclides. Este texto recoge de forma sistemática y, hasta cierto punto, rigurosa, el tratamiento que venían recibiendo dichos conceptos en la matemática griega, en particular por parte de Pitágoras y Eudoxo (Fine, 1917).
2. En segundo lugar, analizaremos y comentaremos el intento de fundamentación teórica de los fenómenos asociados a la proporcionalidad que se encuentra en los *Nueve Capítulos*, texto cuyo origen e inspiración son radicalmente diferentes a los de Euclides.

2.1. *Razón y proporción en los Elementos*

La importancia de los *Elementos* como fuente histórica en cualquier aspecto de la matemática, incluida la proporcionalidad, es indudable. Sin embargo, ha de tenerse muy en cuenta que este texto nos muestra la teoría ya terminada sin pistas sobre el cómo ni mucho menos sobre el porqué. Es decir, aunque los *Elementos* resultan de gran utilidad a la hora de conocer el conocimiento teórico que se poseía en la época respecto a los conceptos estudiados, no nos proporcionan información alguna sobre los problemas concretos que pudieron dar lugar a dicha teoría.

De los trece libros que conforman la obra de Euclides, son dos los dedicados a la temática que nos ocupa: el libro V, dedicado a las magnitudes y el libro VII, dedicado a la aritmética[5].

El primer inconveniente importante del texto es que el concepto 'razón' no está definido de una forma clara y precisa (Fowler, 1979). En el libro VII este término apenas aparece mientras que en el libro V todo lo que se dice es que "*una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes*

[5] Si bien en el texto los números aparecen representados como segmentos.

homogéneas" (V, Def. 3) y que "*guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra*" (V, Def. 4). Es decir, tan sólo se indica (Def. 3) que la razón entre dos magnitudes tiene algo que ver (no se especifica el qué) con su tamaño y que, utilizando lenguaje moderno, se exige la propiedad arquimedeana[6] (Def. 4). Lo que parece quedar claro, a la luz de la primera de estas dos definiciones es que la razón no es, en modo alguno, un número. Este carácter no numérico de las razones en los *Elementos* está reforzado por el hecho de que apenas se da un tratamiento sistemático a las operaciones entre razones[7]; además nunca se habla de igualdad de razones, sino de "*guardar la misma razón*" (V, Def. 5) o de "*guardar una razón mayor*" (V, Def. 7).

Parece comúnmente aceptado el hecho de que antes del desarrollo de la teoría de proporciones de Eudoxo, presentada por Euclides en el libro VII de sus *Elementos*, la razón entre dos números[8] o magnitudes homogéneas venía dada por un proceso llamado *antifairesis* o *antanairesis*[9]. Este proceso se lleva a cabo del siguiente modo: dados dos números o magnitudes homogéneas, se resta el menor al mayor tantas veces como se pueda hasta que quede un resto menor que el menor de los números de partida. Entonces se repite el proceso tomando como partida el menor de los números iniciales y el resto obtenido; y así sucesivamente. Lo importante aquí es el proceso en sí y no los números que aparecen durante el mismo; es decir, llevamos la cuenta sólo de las longitudes de las series de restas que efectuamos antes de cambiar los papeles.

Por ejemplo, veamos cómo calcular la *antifairesis* de 14 y 6. Para ello comenzamos restando 6 a 14 tantas veces como sea posible; en concreto dos veces[10]:

$$(14,6) \rightarrow (8,6) \rightarrow (2,6).$$

Ahora, hemos de intercambiar los papeles del 2 y del 6 y repetimos el proceso. En este caso podemos realizar cuatro restas:

$$(6,2) \rightarrow (4,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow (0,2).$$

6 Es decir, dadas a y b dos cantidades de una misma magnitud, siempre existe un número natural n tal que $na \geq b$.

7 Tan sólo se admite la composición de dos razones de la forma $a:b$ y $b:c$ para obtener $a:c$. Grattan-Guinness (1996, pp. 367-368) ve en esto un cierto trasfondo musical reforzado por el paralelismo entre las ternas número-magnitud-razón y aritmética-geometría-música.

8 Entendidos como números sólo los enteros positivos.

9 Hoy lo denominamos Algoritmo de Euclides.

10 Empleamos por comodidad una notación de pares ordenados.

En este punto el procedimiento termina pues ya hemos llegado a 0. Así, puesto que hemos hecho primero dos restas y luego tres, la *antifairesis* de 14 y 6 sería la sucesión (finita) {2,3}.

Desde un punto de vista puramente matemático, puede asignarse del siguiente modo un significado a la sucesión {2,3} que hemos encontrado (Fowler, 1979):

$$\frac{14}{6} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Así pues, puesto que

$$\frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}},$$

podemos concluir que la *antifairesis* de 7 y 5 será la sucesión {1,2,2}; como de hecho se comprueba mediante la siguiente serie de restas realizadas mediante el procedimiento anterior:

$$(7,5) \rightarrow (2,5)$$

$$(5,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (1,2)$$

$$(2,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (0,1)$$

Esta definición de razón mediante la *antifairesis* refuerza claramente el carácter no numérico del concepto junto con su íntima relación con un proceso de medida, a la vez que aclara el motivo por el cual sólo se consideran razones entre magnitudes homogéneas. En el caso de números, además, es importante indicar que el proceso siempre termina en un número finito de pasos debido a la existencia del máximo común divisor. Sin embargo, al aplicar el proceso a magnitudes esto no tiene por qué suceder[11]; por ejemplo, si d y l denotan respectivamente la diagonal y el lado de un cuadrado se tiene[12]:

$$(d,l) \rightarrow (d\text{-}l,l)$$

$$(l,d\text{-}l) \rightarrow (2l\text{-}d,d\text{-}l) = (D,L)$$

11 Sólo sucederá en el caso de magnitudes conmensurables.

12 Ver el trabajo de Fowler (1979) para una demostración geométrica.

y el proceso se repetiría a partir de aquí indefinida, pero periódicamente, puesto que $D=2l-d$ y $L=d-l$ son nuevamente diagonal y lado de un cuadrado[13]. En definitiva se tiene que la razón $d{:}l$ vendría dada por la sucesión (infinita y periódica) {1,2,2,...}. Debe resaltarse el hecho de que todas las operaciones realizadas durante este proceso de *antifairesis* pueden llevarse a cabo con regla y compás al estilo de la época. Más aún, según Fowler (1980) el Libro II es un compendio de las herramientas básicas necesarias para profundizar en el estudio de la *antifairesis.*

Aunque en trabajos como los de Fowler (1980,1982) o Thorup (1992) se muestra cómo esta definición de razón permite construir toda la teoría de proporciones del Libro VII, lo cierto es que las dificultades en el manejo[14] superan con mucho las potencialidades de la definición. De este modo la teoría original quedó relegada al ámbito de la aritmética y del Libro V, mientras que para el caso de magnitudes hubo que idearse una nueva teoría. En concreto fue Eudoxo[15] el que dio con una solución satisfactoria que pasó por dejar indefinido el concepto de razón y definir únicamente aquello que importaba desde un punto de vista puramente geométrico; es decir, definir lo que significa 'guardar la misma razón' y 'guardar una razón mayor'. En concreto "*una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente*" (V, Def. 5) y una definición análoga se da para el caso de 'guardar una razón mayor' en (V, Def. 7). Estas definiciones tienen la virtud de que son válidas para cualquier tipo de magnitudes, conmensurables o inconmensurables, dejando de lado la necesidad de calcular la sucesión definida por la *antifairesis* de dichas magnitudes.

Un aspecto a tener en cuenta respecto del tratamiento de la proporcionalidad en los *Elementos* es que se desarrollan dos teorías aparentemente distintas. Una para números y otra para magnitudes. Ello hace que surja la necesidad de probar resultados similares dos veces. Esto es así por la forma en la que los griegos

[13] Esto ya era conocido en la época. De hecho este sería el estilo de la primera demostración de inconmensurabilidad.

[14] De hecho, según Fowler (1979, p. 829), toda una rama del saber de la época, la logística, estaría dedicada al estudio de las razones.

[15] Véase el trabajo de Filep (2003) para la reconstrucción del posible razonamiento original de Eudoxo y el de Rusnock y Thagard (1995) para un análisis del proceso de cambio conceptual que tuvo lugar.

concebían las magnitudes[16]. Para ellos no tenía sentido considerar el producto de dos magnitudes[17] y así resultados como "*si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero*" (VII, Prop. 19) y "*si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual*[18] *al rectángulo comprendido por las medias*" (VI, Prop. 16) requieren de tratamientos radicalmente diferentes[19]. Nótese, además, que ambos enunciados se basan en definiciones distintas de la proporcionalidad y mientras que el primer enunciado se presenta con toda generalidad, el segundo se circunscribe a un ámbito muy concreto (rectas y rectángulos).

Estos tratamientos se reconciliarán en el Libro X cuando se pruebe que dos magnitudes son conmensurables si y sólo si guardan entre sí la misma razón que un número con otro número (X, Prop. 5-8). Sin embargo, no pueden obviarse las dificultades epistemológicas subyacentes a esta unificación, puesto que requiere asumir que los números son magnitudes lo que, como hemos dicho, no está claro. De hecho, Heath (1957, pág. 25) apunta que una prueba de que la Proposición 5 del Libro X carece de rigor es la siguiente: "*Euclides debió haber probado que magnitudes proporcionales en el sentido de la definición 20 del libro VII, son también proporcionales en el sentido de la definición 5 del libro V, o que la proporción de números se incluye en la proporción de magnitudes como un caso particular*". Este problema no se solucionó hasta el siglo XVIII con su "restauración" de los *Elementos.*

Otro aspecto interesante está relacionado con la necesidad de aplicar en situaciones prácticas concretas todo el aparato teórico desarrollado. La razón tenía sentido únicamente entre magnitudes homogéneas, mientras el producto de magnitudes carecía de sentido. Estos dos hechos hacen prácticamente inaplicable la teoría a las situaciones prácticas en las que debería aplicarse,

---

[16] A esto debe añadirse que en los *Elementos* los conceptos de 'número' y de 'magnitud geométrica' son completamente diferentes desde un punto de vista lógico (Gardies, 1997), pues mientras los objetos geométricos tienen una existencia de primer orden (son predicados de sustancias primeras), el número es considerado directamente como individuo.

[17] El producto de dos longitudes no es una superficie, por ejemplo.

[18] Se entiende que de igual área.

[19] A este respecto, Aristóteles (citado por Gardies, 1988, pág. 19), en sus Analíticos Segundos afirma: "*que los medios de una proporción conmuten, se ha probado por separado para números, líneas, sólidos y el tiempo. Pero como no hay nombre para designar a lo que constituye la unidad de todas esas cosas* […] *y puesto que ellas se presentan bajo formas diferentes, se las trataba de manera separada. Pero en efecto, esta propiedad se prueba para la generalidad de los casos. Ya que no es en tanto líneas o números que tales cosas tenían la propiedad, sino el hecho del carácter general que se suponen tener*".

que tan profusamente aparecen en los textos orientales, y que evidentemente debían ser situaciones cotidianas también en la Grecia clásica. Esta imposibilidad de aplicar rigurosamente la teoría quizás sea una explicación de por qué no hemos sido capaces de encontrar textos griegos clásicos sobre, digamos, aritmética práctica mientras que sí es posible encontrar aplicaciones al mundo de la Física, como el siguiente texto extraído de la *Física* de Aristóteles (Caveing, 1994):

> "Supongamos que A es el moviente, B la cosa movida, C la distancia según la cual es movida y T el tiempo en el cual es movida. Entonces, en el tiempo T una fuerza igual a A hará que algo que es la mitad de B se mueva sobre el doble de la distancia C, y lo hará mover sobre la distancia C en la mitad del tiempo T, pues de esta manera se mantendrá la proporción. Y si la fuerza de A hace mover a B sobre la distancia C en el tiempo T, también hará mover a B sobre la mitad de C en la mitad del tiempo T, y una fuerza igual a la mitad de A moverá a la mitad de B sobre la distancia C en el tiempo T." (VII, 249b31-250a7).

Nótese que las razones son siempre entre tiempos o entre distancias y nunca entre distancias y tiempos; en otras palabras, sólo se consideran razones internas y no externas (Freudenthal, 1983). Como veremos más adelante, el enfoque chino será mucho más apropiado para las aplicaciones "comerciales".

2.2. *Proporcionalidad en los Nueve Capítulos*

Pese a ciertos prejuicios, no es la griega la única cultura en la que pueden encontrarse algunos intentos de fundamentación teórica. Aunque es cierto que no puede encontrarse un texto puramente teórico como son los *Elementos*, no debe creerse que no existiera una preocupación por la búsqueda de métodos generales o por la justificación[20] de dichos métodos. Así, aunque algunos análisis psicolingüísticos del chino, como los citados por Dauben (1998), dan cuenta de las dificultades que esta cultura pudiera encontrar al intentar desarrollar un rigor lógico, digamos, "a la griega"; no es menos cierto que en la medida de sus posibilidades los matemáticos[21] chinos se preocupaban por algo más que por la

[20] Decimos justificación y no demostración por la carga de lógica que posee dicha palabra. La distinción entre justificación y demostración es muy fina y, desde luego, la segunda no existe sin la primera.

[21] Aunque no tenga sentido hablar de matemáticos (como profesión) hasta épocas muy recientes. Entenderemos que matemático, incluso actualmente, son aquellos que hacen o utilizan matemáticas.

mera aplicación de métodos. En este sentido, Cullen (2007, pág. 39) traduce las palabras de un maestro chino del siglo I de nuestra era:

> "La dificultad en cuanto a la comprensión del Camino es que, cuando uno lo ha estudiado, debe preocuparse por aplicarlo ampliamente. Una vez que ha sido ampliamente aplicado, uno se preocupa de ponerlo en práctica. Cuando ha sido puesto en práctica, surge la preocupación de no ser capaz de comprenderlo. Así, métodos similares se estudian comparativamente y problemas similares son comparativamente considerados. Esto distingue al estudiante inteligente del estúpido y al valioso del que no vale. La capacidad de clasificar para unificar categorías: esa es la esencia de cómo el valioso se dedica a refinar la práctica y la comprensión."

Los textos antiguos orientales y los chinos en particular, por más que escondan –como ya se ha dicho– una cierta búsqueda de métodos generales, poseen un eminente enfoque práctico. Se trata de colecciones de problemas acompañados de una solución numérica o de una mera descripción del método de resolución aplicado a los datos concretos del problema presentado. Esta presentación, que choca radicalmente con el paradigma griego (que de hecho constituye la excepción en el mundo antiguo) se prolongará mucho en el tiempo y puede observarse aún su influencia en textos muy posteriores como el *Liber Abaci* (Sigler, 2002).

El texto de los *Nueve Capítulos* no pasaría de ser uno de tales repertorios de problemas si no fuera por los comentarios con los que un matemático chino del siglo III llamado Liu Hui acompañó a su edición del libro. En sus comentarios, además de relacionar unos problemas con otros o de aclarar los métodos del texto original, también aparecen algunos indicios de lo que, con algunas reservas, podríamos llamar una cierta fundamentación teórica. Más aún, Chemla (2005, pág. 124) sostiene la tesis de que los comentarios de Lui Hui "*son el testimonio de otro origen* [distinto del griego] *del concepto de demostración matemática*".

Teniendo en cuenta el enfoque de la obra, es natural la aparición de aspectos relacionados con la proporcionalidad. El concepto central en el tratamiento que Liu Hui hace de la proporcionalidad es el de *lü*[22]. Liu Hui define *lü* como un "*conjunto de números correlacionados*" y enumera algunas propiedades y operaciones entre ellas. En concreto: "*Las lü pueden convertirse unas en otras. Si hay fracciones*

[22] La traducción de este término parece problemática. En el capítulo XIV – en francés – de (Benoit et al., 1992) se deja sin traducir. En (Kangshen et al., 1999) se traduce al inglés como *rate*. En (Lam, 1994) la traducción es *proportional value*. Nosotros optaremos por no traducir, las traducciones inglesas dan una idea aproximada de lo que se quiere decir.

en una lü, ésta puede convertirse en otra en enteros multiplicando por un número adecuado. Las lü se pueden simplificar reduciéndolas usando el común denominador" (Kangshen et al., 1999, p. 80).

Figura 2: Liu Hui.

La interpretación de este concepto es sencilla. Se dispone de varias magnitudes directamente proporcionales[23] y una *lü* no es más que un conjunto de valores de dichas magnitudes. Las propiedades y operaciones descritas se siguen de la proporcionalidad directa entre las magnitudes consideradas. Kangshen et al. (1999, p. 81), en este contexto, interpretan la razón entre dos magnitudes como su *lü* cuando una de ellas toma el valor 1. No obstante, no encontramos un análogo a la definición euclídea de razón ni a la razón por *antifairesis*, aunque el proceso de simplificación de fracciones descrito en los *Nueve Capítulos* es idéntico al Algoritmo de Euclides[24]. Este concepto de *lü*, decimos, es fundamental para Liu Hui y nos permitirá comprender el tipo de razonamiento subyacente a la génesis de la Regla de Tres.

El motivo por el que esta concepción de la proporcionalidad se adapta mejor a las aplicaciones mercantiles salta a la vista. En este contexto, no existe obstáculo alguno para relacionar directamente dos magnitudes distintas; de hecho, se consideran simultáneamente pares de magnitudes diferentes. Es más, esta forma de enfocar la situación está mucho más cerca de una concepción funcional puesto que mientras en el enfoque griego se relacionan por separado cada una de las magnitudes y después se comparan dichas relaciones, en el chino se entra directamente a analizar la relación existente entre ambas magnitudes. Aquí predomina la idea de razón externa frente a la interna.

---

23 La idea de magnitudes directamente proporcionales se da por supuesta en los *Nueve Capítulos*.

24 De hecho, los *Nueve Capítulos* es el texto más antiguo conservado en la actualidad que da un tratamiento sistemático a las fracciones, entendidas como la pareja de un numerador y un denominador (Needham, 1995); lo que explica, en parte, el modo en que se maneja la proporcionalidad.

3. La aritmetización de las razones

En esta sección presentaremos el proceso de aritmetización, entendido como la progresiva identificación de las razones con entes numéricos que se inicia en la Edad Media y que llega hasta nuestros días.

De los dos enfoques posibles que acabamos de presentar y comparar, fue la potente teoría griega de la proporcionalidad la que permaneció a lo largo de los siglos, primero en el propio mundo griego y después, adoptada por la cultura árabe, en la Europa medieval. Sin embargo, pese a su potencia, existían algunos defectos o inconvenientes en la teoría. Los principales eran:

1. El concepto de razón no estaba definido rigurosamente en los *Elementos* y la idea de razón por *antifairesis* no aparece sino insinuada en el algoritmo de la división. También subyace la problemática respecto a la naturaleza –numérica o no– de dichos entes.
2. En los *Elementos*, Euclides sólo admite la composición de dos razones de la forma $a{:}b$ y $b{:}c$ para obtener $a{:}c$ (lo que llama razón doble, V, Def. 9) así como la concatenación de este tipo de composiciones (razón triple, etc., V, Def. 10). En algunas traducciones aparece una definición interpolada de composición de dos razones cualesquiera, que falla para el caso de magnitudes[25] y que pretende llenar el vacío que surge ante la Proposición 23 del Libro VI en que se habla de razón compuesta sin haber introducido dicho concepto[26].

El primero de estos problemas es de carácter puramente teórico y, en consecuencia, la necesidad de solucionarlo surge únicamente del deseo de que la teoría esté completa desde un punto de vista lógico. La situación es bien diferente en lo que respecta al segundo problema. Sabemos (Youschkevitch, 1976) que los árabes recogieron del mundo oriental diversas técnicas de resolución de problemas (Regla de Tres, de Cinco y superiores) que no podían ser justificadas estrictamente por la teoría griega de las proporciones. Nuestra opinión es que la necesidad de dar un fundamento teórico a estas técnicas orientales es lo que llevó a tratar de resolver el segundo de los problemas anteriores.

[25] La composición de $a{:}b$ y $c{:}d$ sería $ac{:}bd$, pero recuérdese que para Euclides no tenía sentido el producto de magnitudes.

[26] A este respecto Heath (1957) encuentra la composición de razones en las proposiciones 20-23 del Libro V y Gardies (1988, págs.. 63-68) muestra que la composición sería una forma restringida de la composición de razones. Sin embargo, Grattan-Guinness (1996, pág. 368) no comparte esta visión.

Es natural, pues, que fuera la Baja Edad Media, cuando proliferaron las traducciones, copias y comentarios a los *Elementos* de Euclides, la época en la que surgieron algunas respuestas a los problemas anteriores. El problema de la definición y la naturaleza de las razones surge en las dos culturas más importantes del momento: la cristiana y la árabe. El problema de la composición de razones, por su origen práctico recogido de la tradición oriental, sólo apareció en el seno de la cultura árabe. Aquí vamos a presentar los primeros avances en la respuesta a las cuestiones anteriores: el comentario de Omar al-Khayyam a los *Elementos* y la traducción de la misma obra por parte de Giovanni Campano. Resulta curioso observar que, mientras en el caso de al-Khayyam se trabajará siempre en el ámbito de las magnitudes, Campano se centrará únicamente en las razones numéricas. Además ninguna de las soluciones aportadas en uno de los ámbitos es exportable al otro y, de hecho, pensamos que cada una de las propuestas que vamos a presentar es la más natural (si es que tal apelativo tiene sentido) en el ámbito en que se dio.

3.1. *Los comentarios de Omar al-Khayyam a los Elementos de Euclides*

Los comentarios de Omar al-Khayyam a los Elementos han sido traducidos por Rashed et al. (1999). En este texto se plantean, y hasta cierto punto se resuelven, los dos defectos presentados anteriormente, pero sólo en el ámbito de las magnitudes (entendidas en el sentido griego, es decir, como magnitudes geométricas). Esto es así porque al-Khayyam utilizará de modo esencial la posibilidad de dividir una cantidad de magnitud hasta el infinito, algo imposible de hacer en el ámbito numérico de los *Elementos* que se limita a los enteros positivos que, obviamente, no permiten su subdivisión más allá de la unidad (aunque la dialéctica discreto-continuo fuera el centro de ricas disputas. Recuérdense, por ejemplo, las paradojas de Zenón de Elea).

Al-Khayyam, igual que algunos de sus predecesores, redescubre la definición de razón como *antifairesis*; es decir, como proveniente de un proceso de medida por conmensuración íntimamente ligado a lo que hoy llamamos Algoritmo de Euclides. Así dos razones son iguales si ambos pares de magnitudes dan lugar a la misma sucesión de enteros tras el proceso de *antifairesis.* A esta nueva[27] definición de igualdad (y desigualdad) de razones la llama al-Khayyam –no sin cierta inmodestia– “la verdadera” mientras que la de Euclides es para él “la usual”. Todo el Libro II del comentario de al-Khayyam a los elementos está

[27] Aunque antigua.

dedicado a demostrar la equivalencia entre esta noción "verdadera" y la "usual". De esta manera el libro II se cierra del siguiente modo (Rashed et al., 1999, pág. 370):

> "Hemos así demostrado que […] cada vez que una razón es más grande según la razón usual, será también más grande según la razón verdadera, y lo mismo si es más pequeña; y a la inversa, que cada vez que una razón es más grande según la razón verdadera, será también una razón más grande según la razón usual, y lo mismo si es más pequeña. Y todo […] lo que Euclides mencionó […] durante […] su quinto libro […] será parte de las consecuencias necesarias de la razón verdadera."

Es importante indicar que para hacerlo utilizará constantemente la existencia de una cuarta proporcional a tres magnitudes dadas[28], para lo cual admitirá que las magnitudes son divisibles hasta el infinito.

وقال: إذا كانت أربعة مقادير، وأخذت الأضعاف على هذه / الصفة،
وكانت أضعاف الأول زائدةً على أضعاف الثاني، / ولم يكن أضعاف الثالث
زائدةً على أضعاف الرابع، قيل إن نسبة الأول إلى الثاني أعظم من نسبة
الثالث إلى الرابع.

Figura 3: La Definición 5 del Libro V de los Elementos transcrita por Omar Khayyam (Rashed y Vahabzadeh, 1999, pág. 345).

En el Libro III de su comentario, al-Khayyam se dedica a la composición de razones[29]. Al-Khayyam demostrará, en particular que, dadas tres magnitudes a, b y c la razón a:c es la composición de las razones a:b y b:c. Para ello al-Khayyam procede del siguiente modo: dadas las magnitudes a y b se fija una unidad u y, entonces, por la existencia de la cuarta proporcional existe otra magnitud g tal que g:u::a:b. Ahora, como u es la unidad, al-Khayyam considera g como un número que representa la razón a:b[30]; es decir, identifica en cierto modo las razones con números y así puede identificar la composición de razones con la multiplicación numérica. Además, este argumento permite, como lo hace al-Khayyam, extender

---

[28] De hecho, al-Khayyam afirma (Rashed et al., 1999, pág. 350): "*encontramos, entre las premisas que deben ser admitidas, esta: para cada magnitud dada, existirá en el intelecto otra magnitud tal que la razón entre la primera y esta sea igual a cualquiera otra razón dada, sean cuales sean las razones. Esta premisa es filosófica…*"

[29] Este tema será también recurrente en los comentadores árabes de Euclides, como por ejemplo Ibn Sartaq (s. XIII), mencionado por Djebbar (1997).

[30] O mejor aún, la medida de a al tomar b como unidad.

este resultado para una cantidad cualquiera de magnitudes[31]. Esta visión es de vital importancia y aparece aquí por primera vez en la historia, aunque bien es cierto que al-Khayyam no entrará en una discusión sobre la naturaleza numérica o no de las razones.

3.2. *Campano y la denominación de una razón.*

Una de las traducciones[32] de los *Elementos* que más éxito tuvieron en la Europa cristiana medieval fue la llevada a cabo a mediados del siglo XIII por Giovanni Campano. En este sentido, Rashed (1997, pág. 215) afirma que:

> "de todas las obras inspiradas en el Euclides árabe, el "Comentario" de Campano, de hecho la editio princeps de Euclides (Venecia, 1492) […], fue evidentemente la de mayor difusión y la que ejerció la influencia más determinante sobre la ciencia occidental."

El aspecto más importante que queremos destacar de esta obra es la introducción del concepto de 'denominación de una razón'. En concreto Campano define este concepto del siguiente modo (Rommevaux, 1999, pág. 97):

> "Se dice denominación de una razón, específicamente de un número más pequeño en relación a uno más grande, a la parte o las partes de ese [número] menor que están en el mayor. Y [de una razón] de un número más grande en relación a otro más pequeño, al múltiplo o al múltiplo y la parte o las partes según las cuales el mayor lo es."

Pese a lo relativamente oscuro de esta definición[33], se observa que lo perseguido por Campano al introducirla es aritmetizar en cierto modo el concepto de razón. Debe recordarse que en Euclides la razón es más bien una relación entre magnitudes (o entre números en este caso). Campano está asignando un número a cada razón. El problema de la inconmensurabilidad no surge aquí puesto que se restringe al caso de razones numéricas (Libro VII). Sin embargo la herencia euclídea se hace patente cuando, como aplicación de esta definición, Campano define la semejanza (y no la igualdad) de dos razones (Rommevaux, op. cit., pág. 98):

---

[31] El modo es obvio, si $a_1,\dots,a_n$ son magnitudes, la razón $a_1{:}a_n$ es el resultado de componer $a_1{:}a_2$, $a_2{:}a_3,\dots,a_{n-1}{:}a_n$.

[32] Aunque, como afirma Rommevaux (1999), se trata más bien de una recensión.

[33] Rommevaux (op. cit, pág. 98) da el siguiente ejemplo que resulta aclaratorio: "*Tomemos por ejemplo la razón* (29:8). *El número de veces que* 8 *está en* 29 *es* 3. *Y hay cinco octavas partes de* 8 *en el resto* $29 - 3 \times 8 = 5$. *La denominación es pues tres y cinco octavas partes.*"

> "Se dicen semejantes a las razones que reciben la misma denominación, y más grande a la que [recibe] una más grande, y más pequeña a aquella que [recibe] una menor."

Se observa, pues, una práctica parecida a la actual. Se asocia[34] la razón con un número racional y la igualdad o la relación de orden entre razones con los respectivos conceptos numéricos. A modo de ejemplo, podemos observar que en (Anzola et al., 2009) se define la razón del siguiente modo:

"Razón entre dos números a y b es el cociente $\frac{a}{b}$*."*

Es importante hacer énfasis, no obstante, en que todavía se trata de una asociación más que una identificación. La razón no es aún un número sino que es nombrada mediante un número. La diferencia, aunque de índole casi filosófica, es importante.

4. Algunas implicaciones para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética.

El análisis histórico realizado en el presente trabajo conduce a conclusiones que pensamos que deberían ser tenidas en cuenta al planificar un proceso de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad aritmética. En esta sección comentaremos aquellas que nos parecen de mayor importancia.

4.1. *Consecuencias del proceso de aritmetización de las razones*

En la Sección 3 hemos presentado los dos posibles caminos que conducen a la aritmetización del concepto euclídeo de razón. Las dos posibles maneras de enfocar dicho proceso suponen considerar que tiene sentido definir la razón:

a) Entre dos cantidades de una misma magnitud.
b) Entre dos números.

[34] Hoy en día, más que asociar, se identifica la razón con el número racional. Campano aún no ha llegado a ese punto.

Esta dicotomía se ha mantenido vigente hasta épocas muy recientes. Por ejemplo, en Baratech (1966, pág. 89) se afirma que "*se denomina razón entre dos números al cociente exacto de dichos números*". Por otra parte, en Mansilla y Bujanda (1984, pág. 62) leemos que "*si a y b son cantidades de una misma magnitud, la medida de a cuando se toma por unidad a b, se llama razón entre a y b*".

Sin embargo es interesante señalar que, en un estudio realizado por los autores (Gairín y Oller, 2012), no se ha encontrado rastro de la razón entre cantidades de una misma magnitud en ningún texto de Secundaria español de los últimos 20 años. Además, no se encuentra mención alguna a una posible definición de la razón entre cantidades de distintas magnitudes. Estos aspectos dan lugar a algunos inconvenientes de cara a la comprensión de los alumnos. Por ejemplo:

1. Todas las situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad que se presentan a los alumnos involucran el manejo de magnitudes. En ese caso, lo que suele suceder es que se deja de lado por completo a las magnitudes para que los alumnos se centren en la faceta puramente numérica del problema, con lo que se pierde de vista el sentido de los pasos dados para resolverlo.
2. Aún si se recurre al uso de la razón entre cantidades de una misma magnitud, pensamos que dicha razón no constituye el mejor punto de vista para comprender los procesos que subyacen a una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Eso es así, principalmente, porque dicha razón es un escalar, que carece de un significado claro en el contexto del problema.

En ambos casos, la consecuencia fundamental es que un problema en el contexto de las magnitudes acaba transformándose es una situación en la que priman ante todo las manipulaciones meramente numéricas (recuérdese el algoritmo de la Regla de tres, por ejemplo).

Puesto que las situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad suelen implicar una relación de carácter funcional entre, al menos, dos magnitudes, pensamos que la introducción de la idea de razón entre cantidades de diferentes magnitudes puede proporcionar una visión más clara de las situaciones puesto que posee un importante significado: el "tanto por uno", es decir, la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de la otra bajo la relación que las liga. En esencia esta propuesta supone reforzar la visión "china" de la proporcionalidad frente la "griega". Así, por ejemplo, en la situación "por traducir 12 páginas se pagan 150 euros", la idea "china" de razón indica que 150/12 es la cantidad de euros que se pagan por traducir 1 página.

4.2. *Los enfoques griego y chino. Razones internas y razones externas*

Consideremos el siguiente enunciado extraído de un manual escolar cualquiera: "*Una fuente arroja 42 litros de agua en 6 minutos. ¿Cuántos litros arrojará en 15 minutos?*"

Desde el punto de vista griego, debe tenerse en cuenta que los litros arrojados guardan la misma razón que los tiempos necesarios para arrojarlos. Es decir, se busca un número de forma que dicho número guarde con 42 la misma razón que 15 con 6. En términos modernos y empleando el lenguaje algebraico, plantearíamos la proporción:

$$\frac{x}{42} = \frac{15}{6}$$

Desde el punto de vista chino, consideraríamos el par (6,42) y estaríamos interesados en encontrar un par correspondiente a la misma situación bajo la restricción de que el primer elemento ha de ser 15. De nuevo empleando un lenguaje algebraico, plantearíamos la proporción:

$$\frac{6}{42} = \frac{15}{x}$$

Consideradas desde un punto de vista puramente numérico y descontextualizado, ambas situaciones son equivalentes. Sin embargo, el significado es bien distinto. El primer enfoque carecería de sentido para un resolutor chino puesto que si el problema muestra claramente que la relación es entre litros arrojados y tiempo necesario para hacerlo ¿por qué relacionar tiempos y litros separadamente? Para un griego, es el segundo enfoque el carente de sentido puesto que no concibe "dividir" o "repartir" litros entre tiempo.

Es muy interesante observar cómo al plantear situaciones de este tipo a alumnos que no están familiarizados con las técnicas de la proporcionalidad y, dejando de lado estrategias aditivas o argumentos incorrectos, la dialéctica entre estos dos enfoques permanece viva. Desde un punto de vista pedagógico, pensamos que lo deseable es conseguir ambas visiones en los alumnos, pero no podemos evitar señalar el mayor sentido que proporciona a las operaciones y la mejor comprensión de la situación que, a nuestro juicio, se obtiene pensando "a lo chino" antes que "a lo griego", donde prima el aspecto puramente numérico de la relación.

Reconocimientos

Los autores desean agradecer los detallados comentarios de los revisores, gracias a los que se ha podido mejorar sustancialmente el trabajo.

Referencias bibliográficas

Anzola, M., Bujanda, M.P., Mansilla, S. y Vizmanos, J.R. (2009). *Esfera. Matemáticas 1º ESO.* Madrid, España: S.M.

Baratech, B. (1966). *Matemáticas 2º de Bachillerato.* Zaragoza, España: Edición del autor.

Benoit, P., Chemla, K. y Ritter, J. (Coords.) (1992). *Histoire de fractions, fractions d'histoire.* Basel, Suiza: Birkhäuser Verlag.

Caveing, M. (1994). La proportionalité des grandeurs dans la doctrine de la nature d'Aristote. *Revue d'Histoire des Sciences, 47* (2), 163-188.

Chace, A.B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Reston, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Chemla, K. (2005). The interplay between proof and algorithm in 3rd century China: The operation as prescription of computation and the operation as argument. En P. Mancosu, K. F. Jorgensen y S.A. Pedersen (Eds.) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, (pp. 123-145). Dordrecht, Holanda: Springer.

Crespo, C., Farfán, R.M. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12* (1), 29-66.

Cullen, C. (2007). The *Suàn shù shű,* "Writings on reckoning'": rewriting the history of early Chinese mathematics in the light of an excavated manuscript. *Historia Mathematica, 34* (1), 10-44.

Dauben, J.W. (1998). Ancient Chinese mathematics: the *Jiu Zhang Suan Shu* vs Euclid's *Elements.* Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge. *International Journal of Engineering Science*, *36* (12-14), 1339-1359.

Djebbar, A. (1997). La rédaction de L'istikmal d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartaq, un mathématicien de XIIIe-XIVe siècles. *Historia Mathematica, 24* (2), 185-192.

Euclides (1994). *Elementos. Libros V-IX.* Madrid, España: Gredos.

Filep, L. (2003). Proportion theory in Greek mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 19* (2), 167-174.

Fine, H.B. (1917). Ratio, proportion and measurement in the Elements of Euclid. *Annals of Mathematics*, *19* (1), 70-76.

Fowler, D.H. (1979). Ratio in early Greek mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 1* (6), 807-846.

Fowler, D.H. (1980). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. *Archive for History of Exact Sciences, 22* (1-2), 5-36.

Fowler, D.H. (1982). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. II. Sides and diameters. *Archive for History of Exact Sciences, 26* (3), 193-209.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gairín, J.M. y Oller, A.M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249-259). Jaén, España: SEIEM.

Gardies, J.L. (1988). *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*. Paris, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Gardies, J.L. (1997). *L'organisation des mathématiques grecques: de Théétète à Archimède*. Paris, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios and proportions in Euclid's Elements: how did he handle them? *Historia Mathematica, 23* (4), 355-375.

Grattan-Guinness, I. (2004). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica, 31* (2), 163-185.

Heath, T.L. (1957). *The thirteen books of the Elements*. 3 Volúmenes. New York, EEUU: Dover.

Jankvist, U.T. (2009). On empirical research in the field of using history in Mathematics Education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12* (1), 67-101.

Kangshen, S.; Crossley, J.N. y Lun, A.W.-C. (1999). *The nine chapters on the mathematical art*. Beijing, China: Oxford University Press.

Lam, L.Y. (1994). *Jiu zhang suanshu (Nine chapters on the mathematical art)*: an overview. *Archive for History of Exact Sciences, 47* (1), 1-51.

Mansilla,S. y Bujanda, M. P. (1984). *Pitágoras.Matemáticas 7º E.G.B.* Madrid, España: S.M.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A. y Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 39* (3), 313-324.

Needham, J. (1995). *Science and Civilisation in China Volume III*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Patwardan, K.S.; Naimpally, S.A. y Singh, A.L. (2001). *Lilavati of Bhaskaracarya. A treatise of mathematics of vedic tradition*. Delhi, India: Motilal Banarsidass Publishers.

Rashed, R. (1997). *Historie des sciences arabes, tome 2: Mathématique et physique*. Paris: Seuil.

Rashed, R. y Vahabzadeh, B. (1999). *Al-Khayyam mathématicien*. Paris, Francia: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Robins, G. y Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus. An ancient Egypcian text*. London, Inglaterra: British Museum Publications.

Rommevaux, S. (1999). La proportionalité numérique dans le Libre VII del Éléments de Campanus. *Revue d'Histoire des Mathématiques, 5* (1), 83-126.

Rusnock, P. y Thagard, P. (1995). Strategies for conceptual change: ratio and proportion in classical Greek mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science, 26* (1), 107-131.

Sigler, L.E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York, EEUU: Springer Verlag.

Thorup, A. (1992). A pre-Euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45* (1), 1-16.

Valverde, A.G. y Castro, E. (2009). Razonamiento proporcional: un análisis de las actuaciones de maestros en formación. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*, Monografía XII, 121-137.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14* (5), 485-501.

Youschkevitch, A.P. (1976). *Les mathématiques arabes (VIII^{e}-XV^{e} siècles)*. Paris, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Autores

Antonio M. Oller Marcén. Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España. oller@unizar.es

José María Gairín Sallán. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España. jgairin@unizar.es