Rosa Isela González-Polo, Apolo Castañeda

APRENDER FUNCIONES COMO UN PROCESO DE MATEMATIZACIÓN PROGRESIVA: ESTUDIANTES DE SECUNDARIA ENFRENTADO UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE CAÍDA LIBRE

Learning functions as a process of progressive mathematization: high school students facing a didactic sequence on free fall

RESUMEN

Esta investigación analiza cómo los estudiantes de secundaria comprenden y desarrollan el concepto de función a través de una secuencia didáctica que utiliza la caída libre como fenómeno de estudio. Enmarcada en la Educación Matemática Realista, la secuencia promueve un aprendizaje activo y motiva la transición desde el conocimiento informal hacia el formal. La metodología comprende etapas de anticipación, experimentación, análisis mediante el software Tracker y formulación algebraica. Este diseño didáctico motiva a que los alumnos transiten desde una percepción intuitiva hacia una comprensión abstracta y general de las funciones. Los resultados destacan avances en la habilidad de los estudiantes para vincular distintas representaciones de funciones, gráficas, algebraicas, tabulares o descriptivas. El uso de la herramienta Tracker fue fundamental al apoyar la visualización y análisis de los datos. La investigación concluye que la matematización progresiva y el aprendizaje activo son útiles para una comprensión integral y versátil de las funciones.

PALABRAS CLAVE:

- *Matematización progresiva*
- *Modelación matemática*
- *Uso de tecnología*
- *Aprendizaje de las funciones*
- *Educación Matemática Realista*

ABSTRACT

This research examines how high school students understand and develop the concept of function through a didactic sequence that uses free fall as the phenomenon of study. Framed within Realistic Mathematics Education, the sequence fosters active learning and encourages the transition from informal to formal knowledge. The methodology includes stages of anticipation, experimentation, analysis using Tracker software, and algebraic formulation. This didactic design motivates students to move from an intuitive perception to an abstract and general

KEY WORDS:

- *Progressive mathematization*
- *Mathematical modeling*
- *Use of technology*
- *Learning of functions*
- *Realistic Mathematics Education*

González, R. y Castañeda, A. (2023). Aprender funciones como un proceso de matematización progresiva: estudiantes de secundaria enfrentado una secuencia didáctica de caída libre. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(2), 147 - 175. https://doi.org/10.12802/relime.23.2621. Recepción: Abril 12, 2022 / Aceptación: Enero 30, 2024.

understanding of functions. The results highlight students' progress in linking different representations of functions, whether graphical, algebraic, tabular, or descriptive. Using the Tracker tool was fundamental in supporting the visualization and analysis of the data. The research concludes that progressive mathematization and active learning are helpful for a comprehensive and versatile understanding of functions.

RESUMO

Esta pesquisa analisa como os estudantes do ensino médio compreendem e desenvolvem o conceito de função através de uma sequência didática que utiliza a queda livre como fenômeno de estudo. Enquadrada na Educação Matemática Realista, a sequência promove uma aprendizagem ativa e motiva a transição do conhecimento informal para o formal. A metodologia compreende etapas de antecipação, experimentação, análise por meio do software Tracker e formulação algébrica. Este desenho didático motiva os alunos a passarem de uma percepção intuitiva para uma compreensão abstrata e geral das funções. Os resultados destacam avanços na habilidade dos estudantes de vincular diferentes representações de funções, sejam gráficas, algébricas, tabulares ou descritivas. O uso da ferramenta Tracker foi fundamental para apoiar a visualização e análise dos dados. A pesquisa conclui que a matematização progressiva e a aprendizagem ativa são úteis para uma compreensão integral e versátil das funções.

PALAVRAS CHAVE:

- *Matematização progressiva*
- *Modelagem matemática*
- *Uso de tecnología*
- *Aprendizagem das funções*
- *Educação Matemática Realista*

RÉSUMÉ

Cette recherche examine comment les élèves du secondaire comprennent et développent le concept de fonction à travers une séquence didactique qui utilise la chute libre comme phénomène d'étude. Encadrée dans l'Éducation Mathématique Réaliste, la séquence favorise un apprentissage actif et encourage la transition de la connaissance informelle vers la connaissance formelle. La méthodologie comprend des étapes d'anticipation, d'expérimentation, d'analyse à l'aide du logiciel Tracker et de formulation algébrique. Ce design didactique motive les élèves à passer d'une perception intuitive à une compréhension abstraite et générale des fonctions. Les résultats soulignent des progrès dans la capacité des étudiants à relier différentes représentations de fonctions, graphiques, algébriques, tabulaires ou descriptives. L'utilisation de l'outil Tracker a été fondamentale pour soutenir la visualisation et l'analyse des données. La recherche conclut que la mathématisation progressive et l'apprentissage actif sont utiles pour une compréhension intégrale et polyvalente des fonctions.

MOTS CLÉS:

- *Mathématisation progressive*
- *Modélisation mathématique*
- *Utilisation de la technologie*
- *Apprentissage des fonctions*
- *Éducation Mathématique Réaliste*

1. Introducción

En la educación secundaria se inicia el estudio de las funciones, un concepto esencial de la matemática avanzada y una base fundamental para el cálculo. En la enseñanza más tradicional se suele pedir a los estudiantes que reconozcan y registren las propiedades de las funciones a través de la observación de ejemplos, llevando a una generalización implícita (Bloch, 2003). En este enfoque no se hace énfasis en las reglas o principios fundamentales que subyacen en estos ejemplos; por ende, los estudiantes pueden identificar ciertas características o comportamientos al ver su aplicación en situaciones específicas, pero sin una comprensión profunda o formalizada de por qué estas propiedades son universales o cómo se derivan de principios matemáticos más fundamentales, como la idea de relación entre variables (Falcade et al., 2007).

El enfoque procedimiental de enseñanza matemática a menudo resulta en un entendimiento básico de sus conceptos. Los estudiantes pueden ser hábiles en la identificación de patrones o en la aplicación de reglas en escenarios familiares, pero no poseen las habilidades necesarias para explicar o justificar estos conceptos, ni para aplicarlos en contextos más desafiantes. Cuando se requiere una comprensión integral del concepto de función es necesario desarrollar habilidades para la interpretación cualitativa de funciones (Best y Bikner-Ahsbahs, 2017), para discernir el comportamiento de las gráficas, y para transferir y aplicar conocimientos sobre las funciones en diversas formas de representación (Duval, 2006).

Por otra parte, la enseñanza procedimental de las funciones suele centrarse o hacer énfasis en una sola representación, generalmente la algebraica, lo cual puede resultar en una comprensión parcial del concepto por parte de los estudiantes. Esta limitación se debe a una enseñanza que no promueve el tránsito entre diferentes formas de representación, y que lleva a los alumnos a percibir las funciones meramente como fórmulas o ecuaciones, sin comprender su significado más amplio. Esta visión obstruye la habilidad de los estudiantes para aplicar el concepto de función en diversos contextos matemáticos. Una comprensión integral de las funciones implica la habilidad de conectar y convertir entre representaciones gráficas, algebraicas, tabulares y verbales, así como identificar sus conexiones (Andrade y Saraiva, 2012).

En respuesta a estos desafíos, la adopción de nuevas metodologías de enseñanza es fundamental para trascender la comprensión fragmentaria de los conceptos matemáticos y promover un entendimiento más integral y flexible. El estudio de las funciones matemáticas debe ser producto de una síntesis de distintos escenarios donde se establezcan relaciones funcionales y de representaciones matemáticas. Para ello se requiere una metodología que fomente en los estudiantes la conexión entre su conocimiento previo y las experiencias con el contenido matemático, permitiéndoles comprender las funciones no como entidades autónomas, sino como conceptos aplicables en una variedad de contextos y representaciones, incluyendo gráficos, ecuaciones y tablas. La flexibilidad, en este marco educativo, alude a la habilidad y la disposición de los estudiantes para transitar entre distintas perspectivas interpretativas de las relaciones funcionales y para manejar diversas representaciones.

Un enfoque emergente para la enseñanza de las funciones es la modelación matemática que plantea Ortega y Puig (2017), perspectiva que se centra en la aplicación práctica de conceptos matemáticos para entender y resolver problemas del mundo real. De acuerdo con estos autores, la modelación no solo se enfoca en encontrar la solución a un problema, sino también en el proceso de llegar a esa solución. Esto incluye la formulación del problema, la selección de herramientas matemáticas adecuadas, la interpretación de resultados y la validación del modelo. Por otra parte, la modelación fomenta el pensamiento crítico y la reflexión sobre el propio aprendizaje, ya que los estudiantes no solo aplican conceptos matemáticos, sino que también reflexionan sobre su elección de modelos y métodos, lo cual desarrolla habilidades metacognitivas. Finalmente, este enfoque propicia la colaboración entre los estudiantes al compartir ideas, cuestionar supuestos y llegar a un entendimiento más profundo del problema y de las matemáticas involucradas.

Ortega y Puig (2017) destacan que entre las cualidades relevantes de la modelación matemática está la oportunidad de emplear datos reales para explorar fenómenos mediante funciones. Esta característica tiene implicaciones pedagógicas importantes al promover el desarrollo de habilidades de investigación y de análisis crítico, ya que los estudiantes deben recolectar, procesar y examinar datos para la construcción de modelos matemáticos. El uso de datos auténticos evidencia la relevancia de las matemáticas en situaciones reales y puede potenciar el interés y la motivación de los estudiantes, además de que favorece la identificación de variables y la forma en que se relacionan.

La investigación de Arzarello y Robutti (2004) constituye un punto de referencia en la enseñanza de funciones mediante la modelación. En su investigación reportan una experiencia educativa donde los estudiantes usan sensores de movimiento y calculadoras gráfico-simbólicas para generar y representar datos en gráficas y tablas numéricas, en las que se expresan distintos tipos de movimiento, como los uniformes y acelerados. Esta práctica permite a los estudiantes visualizar la aplicación de funciones matemáticas en la modelación de movimientos reales. En una línea similar, Ortega et al. (2019) emplean la modelación para estructurar fenómenos físicos, integrando magnitudes físicas para fomentar el aprendizaje matemático y las prácticas científicas. Modelar un fenómeno, según estos autores, implica la creación de un modelo que sea descriptivo, explicativo y predictivo, sin excluir otras posibles interpretaciones de este. En su estudio desarrollaron recursos didácticos para estudiar funciones lineales y cuadráticas usando tabletas electrónicas y modelación matemática de fenómenos físicos. Los estudiantes utilizaron aplicaciones de tabletas para recolectar datos experimentales y buscaron expresiones algebraicas que describieran óptimamente los fenómenos. Este proceso incluyó la interpretación y validación del modelo con relación al fenómeno real, motivando a los estudiantes a definir funciones y a reflexionar sobre su aplicabilidad en el mundo real.

La metodología de modelado en la educación matemática, según Rodríguez-Gallegos y Quiroz-Rivera (2016), se fundamenta en la resolución de problemas situados en contextos significativos que justifican la formulación de representaciones matemáticas como gráficos, figuras y diagramas. Estos problemas también deben motivar razonamientos matemáticos específicos y evocar el uso de herramientas y conceptos matemáticos relevantes (Gravemeijer, 2007). Bajo la óptica de Freudenthal (2002), se considera a las matemáticas como una construcción de la actividad humana, lo cual respalda que la enseñanza mediante modelación fomente una reinvención guiada. En este proceso, los estudiantes emulan la matematización histórica de la humanidad, partiendo de sus estrategias informales, ideas e intuiciones estrechamente vinculadas al contexto para avanzar hacia formulaciones cada vez más abstractas y formales.

1.1. *Propósito de la investigación*

El objetivo de esta investigación es analizar el proceso de matematización progresiva llevado a cabo por estudiantes de secundaria al realizar la modelación de un experimento de caída libre de un balón, utilizando el software Tracker como herramienta de apoyo. La principal contribución de este estudio consiste en desarrollar un marco analítico que permita identificar a detalle el proceso de matematización y su relación con el aprendizaje del concepto de función.

2. Marco teórico

La Educación Matemática Realista (EMR) se caracteriza principalmente por enfocarse en el estudiante y por la importancia que le otorga a su desarrollo personal (van den Heuvel-Panhuizen, 2020). Este enfoque se caracteriza por el respeto y la consideración de las concepciones y experiencias individuales de los estudiantes, utilizándolas como puntos de partida para la enseñanza y el aprendizaje.

En EMR, los estudiantes desarrollan diversas estrategias dentro de contextos específicos, lo que les ayuda a comprender lo que están haciendo más allá de los términos matemáticos formales. El proceso de alcanzar un nivel formal en matemáticas puede extenderse a lo largo de varios años, permitiendo a los estudiantes adquirir una comprensión conceptual profunda acerca de cómo funcionan los procedimientos, dónde se aplican y cómo se conectan con otras áreas de las matemáticas. Se observa que este enfoque puede cambiar la actitud de los estudiantes frente a las matemáticas a una más positiva al proporcionar situaciones naturales y actividades que fomentan la participación activa y diversa (van den Heuvel-Panhuizen, 2020).

De acuerdo con Kaur et al. (2020), la EMR se sustenta en seis principios fundamentales que guían el proceso de enseñanza y aprendizaje. En primer lugar, destaca el principio de actividad, que concibe a los estudiantes como agentes activos en su propio proceso educativo. Enseguida, el principio de realidad enfatiza la importancia de iniciar la educación matemática con problemas prácticos, preparando a los estudiantes para aplicarla en contextos reales. El principio de nivel reconoce la progresión en el aprendizaje matemático, desde su comprensión informal hasta el entendimiento formal de las relaciones entre conceptos y estrategias. Por su parte, el principio de entrelazamiento enfatiza en la integración de los diversos dominios matemáticos en problemas complejos en lugar de tratarlos como capítulos aislados. El principio de interactividad resalta el carácter social del aprendizaje matemático. Finalmente, el principio de orientación subraya el papel activo de los docentes en dirigir y apoyar el aprendizaje de los estudiantes a través de programas basados en trayectorias coherentes y a largo plazo.

Selter y Walter (2020) señala que en la EMR el aprendizaje es consecuencia de la matematización progresiva. Este proceso se refiere a la actividad de integrar, organizar y estructurar los conocimientos y habilidades adquiridos para descubrir regularidades, conexiones y estructuras desconocidas hasta entonces. Esto debe ser natural y debe permitir que los estudiantes contribuyan tanto como sea posible al proceso de enseñanza y aprendizaje. Se enfatiza que la matematización debe ser una actividad (re)constructiva estimulada por la integración de ideas, un proceso a largo plazo desde lo concreto a lo abstracto, facilitada por la reflexión sobre los procesos de pensamiento propios y los de los demás participantes, y siempre enmarcada en un contexto sociocultural.

La matematización progresiva en la EMR tiene dos componentes interrelacionados: la matematización horizontal y la vertical. La matematización horizontal se describe como un puente desde el mundo real a las matemáticas formales y simbólicas, en otras palabras, se refiere al proceso de conectar las experiencias y el conocimiento del mundo real con las matemáticas formales.

Este proceso implica traducir situaciones de la vida real a un lenguaje y modelos matemáticos, sirviendo como un puente entre el mundo real y el mundo de las matemáticas formales y simbólicas. La matematización horizontal se refiere esencialmente a cómo los estudiantes aplican su conocimiento matemático en contextos prácticos, cómo extraen y formulan problemas a partir de situaciones reales. Este proceso implica identificar los aspectos matemáticos relevantes de una situación real, formular preguntas matemáticas, y usar representaciones matemáticas (como gráficos, tablas o ecuaciones) para analizar y resolver las situaciones.

Por otra parte, la matematización vertical se refiere a actividades dentro del ámbito formal y simbólico, es decir, se refiere a cómo los estudiantes profundizan y refinan su comprensión de los conceptos matemáticos, pasando de una superficial o procedimental a una más estructurada y abstracta. Es importante destacar que un estudiante solo podrá alcanzar un nivel superior de matemáticas mediante la matematización vertical, lo que incluye actividades como reorganizar, sistematizar y vincular estructuras matemáticas. Se trata de un proceso de desarrollo y conexión de ideas matemáticas más abstractas y avanzadas a partir de los conocimientos existentes. Sin embargo, no debe haber una distinción estricta entre las actividades de matematización horizontal y vertical, ya que estos procesos pueden entrelazarse y dependen de la situación específica, la persona involucrada y su entorno. (Selter y Walter, 2020).

De acuerdo con van den Heuvel-Panhuizen (2020), este enfoque busca que los estudiantes no solo apliquen fórmulas y procedimientos de manera mecánica, sino que comprendan y descubran las matemáticas a través de sus propias experiencias y razonamientos. Al utilizar sus propias palabras y estrategias personales, los estudiantes construyen una base sólida de comprensión antes de moverse hacia el aprendizaje de técnicas más formalizadas. Esta integración respeta y aprovecha la capacidad del estudiante para hacer sentido de su entorno y desarrollar su pensamiento matemático de una manera significativa y contextualizada.

En la EMR, las representaciones juegan un papel fundamental como herramientas mediadoras en el proceso de aprendizaje. En esta perspectiva se busca que los estudiantes aprendan matemáticas a través de una variedad de representaciones y establezcan conexiones entre ellas. Las primeras representaciones en la EMR son cruciales porque constituyen el punto de partida para el desarrollo del pensamiento formal. Al comenzar con representaciones que son significativas y contextualizadas en experiencias reales, los estudiantes pueden construir gradualmente una comprensión formal. Este proceso comienza con lo concreto y tangible, lo que permite que los estudiantes vean la matemática como algo relevante y aplicable a sus vidas antes de moverse hacia una abstracción y formalización más profundas (Kaur et al., 2020).

De acuerdo con Bressan et al. (2016), en el proceso de matematización progresiva los estudiantes atraviesan un proceso que implica el desarrollo y evolución de los modelos matemáticos a través de cuatro niveles de compresión: situacional, referencial, general y formal. En el nivel situacional, los modelos funcionan como “modelo de”, estando estrechamente ligados a situaciones problemáticas específicas. Estos modelos representan las situaciones a las que se enfrentan los estudiantes de manera directa y concreta. A medida que avanzan al nivel referencial, estos modelos comienzan a despegarse ligeramente de las situaciones particulares, manteniendo todavía un carácter de “modelo de”, pero mostrando signos de generalización. La transición hacia el “modelo para” se hace más evidente en el nivel general. Aquí, los modelos no sólo representan situaciones específicas, sino que también sirven como herramientas para razonar matemáticamente en un espectro más amplio de contextos. Estos modelos se convierten en medios generales y formales para la comprensión y aplicación matemática, extendiendo su utilidad más allá de las situaciones particulares iniciales. Finalmente, en el nivel formal los modelos son herramientas matemáticas abstractas y generalizables, aplicables tanto dentro como fuera de la matemática. Los estudiantes utilizan estos modelos para comprender, operar y explorar conceptos matemáticos, aplicándolos en una variedad de contextos y situaciones. Este progreso refleja el desarrollo desde una comprensión concreta y situacional de los problemas matemáticos hacia una comprensión más abstracta y generalizada donde los modelos sirven como poderosas herramientas para el razonamiento y la aplicación matemática. La Figura 1 muestra la relación de los cuatro niveles de comprensión y sus rasgos de acuerdo con Bressan et al. (2016).

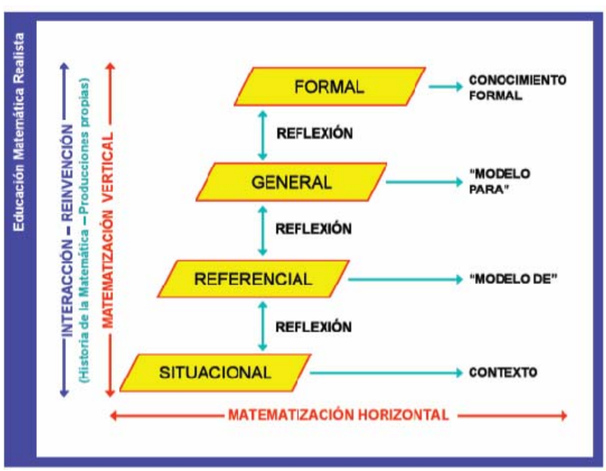

Figura 1. Descripción del proceso de matematización progresiva
Nota. Fuente: Tomado de Bressan et al. (2016, p. 7)

3. Metodología

3.1. *Diseño de la actividad*

En la EMR, las situaciones o problemas utilizados para la enseñanza tienen características distintivas. Primero se ofrece a los estudiantes espacio para emplear notación y razonamiento informal. Además, los contextos de las tareas están diseñados para ser motivadores y de apoyo, permitiendo a los estudiantes explorar sus habilidades sin las restricciones que a menudo impone la notación formal. Otro aspecto importante es el uso de problemas abiertos que permiten a los estudiantes responder con estrategias individuales y trabajar a diferentes niveles, revelando así lo que son capaces de hacer. Finalmente, se promueve que los estudiantes razonen sobre sus respuestas y escriban notas o reflexiones.

Teniendo en cuenta las características mencionadas, se desarrolló una secuencia didáctica de modelación de la caída libre de un balón, el cual es un experimento que no requiere una explicación adicional. A pesar de que el análisis de este experimento en términos de cinemática involucra conceptos abstractos como movimiento uniformemente acelerado, constante de gravedad y velocidad, la actividad se basa exclusivamente en la relación entre el tiempo y la posición para estudiar el movimiento. La secuencia didáctica permite a los estudiantes la oportunidad de expresar ideas intuitivas y conocimientos de una manera más detallada a través de la formulación de representaciones matemáticas, el análisis de condiciones iniciales y la formulación de conjeturas.

Siguiendo con el planteamiento de Selter y Walter (2020), en esta secuencia didáctica los estudiantes son considerados como productores de matemáticas en lugar de ser simplemente receptores pasivos de conocimientos matemáticos preestablecidos. Se motiva a que los estudiantes desarrollen sus propias estrategias para resolver problemas, y luego profundizar y mejorar esos métodos a través de la interacción con otros estudiantes y con el docente. El proceso de aprendizaje se describe como una transición de “invenciones a convenciones”, lo que significa que se estimula a los estudiantes a innovar y, posteriormente, sus métodos pueden convertirse en parte del conocimiento matemático convencional compartido.

La secuencia didáctica se integra de cuatro fases. En la primera fase, el profesor inicia la actividad proporcionando una breve introducción verbal que describe la situación de un balón en caída libre desde una altura específica. En esta etapa se solicita a los estudiantes crear una gráfica cartesiana en papel blanco con total libertad para seleccionar las variables, definir el sistema de referencia y dar forma a la gráfica. El objetivo principal es que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos, ideas y concepciones para anticipar la forma de la gráfica. En la segunda fase se lleva a cabo el experimento real y se graba utilizando un dispositivo móvil. Este vídeo se emplea posteriormente para realizar mediciones precisas y construir una tabla de datos. La finalidad de esta fase es fomentar la reflexión sobre el significado de las variables y analizar su relación a partir de la información recopilada en la tabla de datos. En la tercera fase se repite el experimento y se introduce el uso del software Tracker, lo que simplifica la obtención de las coordenadas de posición-tiempo y facilita el análisis cualitativo de la gráfica resultante, este último se hace en comparación con la gráfica inicial en la cuarta fase. En esta fase también se exploran métodos para la formulación algebraica de una función cuadrática.

La secuencia didáctica se diseñó considerando dos momentos para la validación interna de los resultados obtenidos por los estudiantes. El primero tiene lugar cuando el software genera la gráfica del experimento, lo que brinda a los estudiantes la oportunidad de comparar sus propias gráficas, examinar sus particularidades, evaluar su ubicación en el sistema de referencia y reflexionar sobre posibles errores. El segundo momento se presenta al final del proceso, cuando se hace la confrontación de las tres gráficas y se realiza un análisis exhaustivo, tanto cualitativo como cuantitativo, de sus características.

3.2. *Procedimiento para la obtención de datos*

Con el propósito de analizar el proceso de matematización progresiva durante la implementación de la secuencia didáctica, se llevaron a cabo diversas acciones de recopilación de datos. Estas incluyeron la recolección de hojas de trabajo completadas por los estudiantes, la grabación de videos de las sesiones colectivas, grabaciones de audio de conversaciones de los equipos, la obtención de fotografías del contenido en el pizarrón y la recopilación de archivos generados por el software Tracker.

3.3. *Categorías de análisis*

Para estudiar el proceso de matematización progresiva se construyó una matriz que integra los cuatro componentes fundamentales de la EMR, los principios fundamentales que guían la enseñanza, los componentes de la matematización progresiva, los niveles de comprensión y las fases de la actividad. Esta matriz proporciona una visión integral y estructurada de la EMR, y ayuda a identificar cómo se aplican y se interrelacionan los principios fundamentales en cada etapa de la secuencia didáctica.

TABLA I

Matriz que integra el marco de la EMR y la secuencia didáctica

Fases de la Actividad / Componentes	*Principios Fundamentales*	*Matematización Progresiva*	*Niveles de Comprensión*
Fase 1: Introducción y Anticipación	Principio de actividad y realidad: Los estudiantes se involucran activamente en problemas prácticos y realistas, lo cual despierta su interés y curiosidad, fomentando una actitud proactiva en el aprendizaje.	Matematización horizontal: Conectar conocimientos previos con la realidad matemática promueve la relevancia y aplicabilidad de las matemáticas, facilitando una comprensión más intuitiva.	Nivel situacional: La anticipación basada en situaciones reales ancla el aprendizaje matemático en experiencias concretas, lo que ayuda a los estudiantes a construir significado.
Fase 2: Experimento y Datos	Principio de nivel y entrelazamiento: La observación y análisis de datos concretos permite a los estudiantes ver la matemática en acción, integrando diferentes áreas matemáticas de manera natural.	Matematización horizontal y vertical: La transición de lo concreto a lo simbólico es crucial para desarrollar la habilidad de abstracción y representación matemática.	Nivel referencial: El análisis de datos reales proporciona una base para que los estudiantes comiencen a generalizar y a ver patrones, fomentando la transición a un razonamiento más abstracto.
Fase 3: Uso de Tracker y Análisis Cualitativo	Principio de interactividad y orientación: El trabajo colaborativo en el análisis de datos y el uso de herramientas tecnológicas como Tracker refuerzan la naturaleza social del aprendizaje y permiten la guía del docente.	Matematización vertical: El uso de software especializado para analizar datos refina las habilidades de abstracción y formalización de conceptos matemáticos.	Nivel general: La manipulación de datos con herramientas tecnológicas permite a los estudiantes razonar y aplicar modelos matemáticos en una variedad de contextos, ampliando su comprensión.
Fase 4: Comparación y Formulación Algebraica	Principio de nivel y orientación: La formulación algebraica y el análisis crítico de los resultados reflejan la aplicación de conocimientos formales y el rol del docente en la orientación reflexiva del aprendizaje.	Matematización vertical: La construcción de modelos matemáticos abstractos y su generalización es el pináculo de la matematización, permitiendo a los estudiantes operar en el ámbito formal de las matemáticas.	Nivel formal: El desarrollo de herramientas abstractas y la aplicación de modelos matemáticos a nuevos problemas muestra una comprensión profunda y flexible de las matemáticas.

Nota. Fuente: Elaboración propia

Cada celda de la Tabla I no es una entidad aislada, sino que representa la intersección de un componente teórico de la EMR con una etapa práctica de la secuencia didáctica, en la que se detalla cómo se manifiestan los principios de la EMR durante una fase específica del proceso de enseñanza y aprendizaje. Durante la primera fase, la introducción y anticipación de la actividad se basan en el principio de actividad y realidad, donde los estudiantes son participantes activos y se conectan con problemas matemáticos que tienen relevancia concreta. Aquí, la matematización progresiva empieza con el establecimiento de conexiones entre la experiencia del mundo real y las matemáticas, y los estudiantes utilizan modelos concretos que reflejan directamente la situación problemática que enfrentan.

La segunda fase se centra en el experimento y la recolección de datos, se observa la integración de conocimientos matemáticos aplicados a datos concretos, representando así los principios de nivel y entrelazamiento de la EMR. Durante esta etapa, los estudiantes evolucionan en la matematización, tanto horizontal como vertical, traduciendo situaciones concretas a representaciones simbólicas y comenzando a generalizar desde los datos específicos que han observado. La tercera fase implica el uso de Tracker y análisis cualitativo, destacando la interactividad y la orientación docente. El uso de tecnología apoya la matematización vertical, ya que los estudiantes abstraen y formalizan las relaciones de variables a través del software. Finalmente, la cuarta fase conduce a la comparación y formulación algebraica. En esta fase, los estudiantes aplican conocimientos formales y realizan reflexiones críticas sobre sus procesos y resultados, lo cual es la esencia de los principios de nivel y orientación. La matematización vertical se completa con la construcción de un modelo abstracto y generalizable, y los estudiantes alcanzan el nivel formal de comprensión, demostrando su capacidad para aplicar conceptos matemáticos de manera flexible y en diversas representaciones.

A partir de esta matriz se establecieron descriptores específicos referentes a aspectos concretos del trabajo de los estudiantes que pueden ser medidos o identificados durante la aplicación de la secuencia didáctica.

El primer descriptor se denomina “elección y justificación de variables”, este se alinea con el principio de realidad y el nivel situacional, donde los estudiantes comienzan a conectar su comprensión intuitiva con situaciones reales y matemáticas formales. Este paso es esencial en la fase de anticipación, donde los estudiantes usan su conocimiento previo para predecir el comportamiento de la función y establecer una notación específica (Sakja, 2003). El segundo es “construcción y análisis de representaciones gráficas”, el cual emerge del principio de entrelazamiento y el nivel referencial. En la fase de experimentación, donde los estudiantes observan y registran datos, la habilidad para interpretar estas representaciones gráficas (Duval, 2006) y extraer significados matemáticos demuestra una matematización progresiva hacia una comprensión más abstracta

(Eisenberg, 2002). El tercero, “uso de herramientas tecnológicas para el modelado”, refleja el principio de interactividad y el nivel general, particularmente durante la fase de análisis con el software Tracker. Aquí los estudiantes aplican sus conocimientos en un contexto tecnológico, facilitando la transición de lo concreto a lo simbólico (Best y Bikner-Ahsbahs, 2017), una característica esencial de la matematización vertical. Cuarto: “formulación y manipulación de funciones algebraicas”, se justifica por el principio de orientación y el nivel formal. Durante la fase de comparación y formulación algebraica, los estudiantes muestran su capacidad para operar dentro del ámbito formal de las matemáticas, lo que indica una comprensión matemática avanzada y la habilidad para generalizar y aplicar conceptos matemáticos abstractos. El quinto es la “interpretación y aplicación de conceptos”, que se relaciona con todos los principios y niveles de comprensión a lo largo de las fases. Este descriptor se centra en la habilidad de los estudiantes para reconocer y utilizar relaciones proporcionales y patrones de cambio en el contexto de funciones lineales y cuadráticas. Finalmente, “la comunicación y argumentación” encapsula el principio de interactividad y todos los niveles de comprensión. La habilidad de los estudiantes para comunicarse matemáticamente es fundamental para el aprendizaje colaborativo y la reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje, lo cual es fomentado en todas las fases de la actividad didáctica.

3.4. *Participantes*

La secuencia didáctica se implementó en una sesión de dos horas con un grupo compuesto por 21 estudiantes de tercer grado de secundaria en un entorno rural en México. Previamente, los estudiantes tenían experiencia en la resolución y el estudio de problemas relacionados con modelos de variación lineal en cursos anteriores. Además, habían trabajado en otro experimento similar bajo el mismo enfoque y metodología que se describe en este artículo. Dicho experimento consistió en llenar recipientes con agua y analizar la variación de la altura del líquido en función del tiempo, lo cual condujo a la formulación de un modelo lineal.

El profesor organizó a los estudiantes en 7 equipos de trabajo, identificados como E1, E2, …, E7, cada uno conformado por tres integrantes numerados como A1, A2 y A3. Los estudiantes se distribuyeron las responsabilidades dentro de sus respectivos equipos, encargándose de la instalación y la recopilación de datos del experimento. Además, se proporcionaron materiales específicos a cada equipo para llevar a cabo el experimento.

El profesor encargado de implementar la secuencia didáctica forma parte del equipo de autores de esta investigación. Consciente de la importancia de no influir en las decisiones de los estudiantes ni imponer procedimientos, su rol se centró en la organización y coordinación de las sesiones colectivas, con el objetivo de fomentar el intercambio de ideas y guiar las discusiones de manera orientativa. En la primera fase, el profesor introdujo verbalmente el planteamiento del experimento, limitándose a describir las condiciones de variación sin sugerir una interpretación. En la siguiente fase, su función se orientó a coordinar la instalación del experimento, permitiendo que los estudiantes lo desarrollaran de manera autónoma. Durante la revisión del video, el profesor guio la discusión para identificar y resaltar las condiciones de variabilidad, la duración del experimento y otros aspectos relevantes. En la tercera fase, el profesor coordinó la discusión con el propósito de establecer conexiones entre la forma de la gráfica y el experimento en sí. También propuso la "lectura de la gráfica" para que los estudiantes pudieran identificar y describir las variaciones presentes. Asimismo, promovió el análisis de la tabla de datos para identificar la posición correspondiente en el video. En la cuarta fase, el rol del profesor consistió en coordinar la discusión destinada a la construcción del modelo algebraico del experimento; además, organizó la validación de los resultados utilizando el software Geogebra como una herramienta de apoyo.

4. Resultados

En la Tabla II se presenta el concentrado de descriptores y los observables en la implementación de la secuencia didáctica. Para la construcción de la tabla se analizaron los datos obtenidos en cada fase, enseguida, los autores de la investigación trabajaron de forma independiente para generar un concentrado y finalmente se trabajó en colectivo para la construcción de la tabla.

TABLA II
Descriptores y observables registrados después de la implementación de la secuencia didáctica

Descriptores	*Fase 1: Introducción y Anticipación*	*Fase 2: Experimento y Datos*	*Fase 3: Uso de Tracker*	*Fase 4: Análisis y Formulación*
Elección y Justificación de Variables	- Estudiantes identifican tiempo y distancia como variables relevantes. - Justifican su elección con base en el referente físico.	- Confirman o ajustan sus variables iniciales con datos reales. - Distinguen entre variables dependientes e independientes.	- Utilizan Tracker para medir las variables seleccionadas. - Discuten la precisión y relevancia de las variables.	- Relacionan las variables con una función matemática específica. - Justifican la forma de la función basada en la relación de las variables.

Construcción de Representaciones Gráficas	- Crean gráficos anticipados de la función basándose en suposiciones. - Discuten posibles formas y tendencias de la gráfica.	- Construyen gráficos basados en datos experimentales. - Analizan los puntos relevantes de la gráfica.	- Correlacionan gráficos de Tracker con predicciones iniciales. - Mejoran la interpretación de la gráfica con datos precisos.	- Comparan gráficos iniciales y finales. - Interpretan discrepancias y patrones consistentes.
Modelado Matemático con Herramientas Tecnológicas	- Discuten cómo Tracker podría ayudar en el modelado del fenómeno.	- Observan el fenómeno y plantean cómo modelarlo con Tracker.	- Utilizan Tracker para generar un modelo matemático del fenómeno. - Evalúan la efectividad del software en la representación del modelo.	- Refinan el modelo matemático usando Tracker y otros recursos matemáticos. - Validan la precisión del modelo con la teoría y los datos.
Formulación de Funciones Algebraicas	- Hipotetizan la forma de la función que modela el fenómeno.	- Desarrollan una función inicial basada en datos experimentales.	- Ajustan la función con base en el análisis de Tracker.	- Formulan la función cuadrática final que modela la caída libre. - Demuestran la habilidad para manipular la función algebraicamente.
Interpretación de Conceptos Matemáticos	- Predicen el comportamiento de la función basándose en conocimientos previos.	- Aplican la idea de relación entre variables en el análisis de datos.	- Relacionan el movimiento del balón con la naturaleza de las funciones.	- Usan conceptos matemáticos para explicar el fenómeno físico de manera abstracta.
Comunicación y Argumentación Matemática	- Explican sus predicciones y la selección de variables.	- Argumentan sobre las tendencias observadas en los datos y gráficos.	- Discuten el modelado en Tracker y la interpretación de los resultados.	- Presentan y defienden sus conclusiones matemáticas finales.

En la Tabla II se puede apreciar cómo los estudiantes identificaron y justificaron las variables relevantes, además de cómo avanzaron en la construcción y análisis de representaciones gráficas, pasando de hacer suposiciones basadas en su conocimiento previo a ajustar sus gráficos para reflejar los datos obtenidos y analizados con la ayuda del software Tracker. Además, la tabla evidencia la habilidad de los estudiantes para integrar la tecnología, utilizándola no solo para recopilar datos, sino también para modelar el fenómeno físico en estudio. A lo largo de la secuencia didáctica, los estudiantes desarrollaron y refinaron sus habilidades de modelado y formulación matemática, lo cual culminó con la formulación de una función algebraica que refleja la caída libre del balón. Finalmente, se evidenció la capacidad de los estudiantes para comunicar sus procesos y resultados matemáticos, así como para defender sus conclusiones, lo cual indica que la secuencia didáctica fomentó la comunicación y la argumentación matemática.

4.1. *Momentos de la matematización progresiva*

En la fase 1, los estudiantes se enfrentaron a la tarea de representar la caída libre de un balón desde una altura específica a través de una gráfica cartesiana; en esta etapa se les dio la libertad de elegir las variables. Los estudiantes pusieron en juego sus conocimientos previos y concepciones intuitivas sobre el movimiento para anticipar el movimiento del balón. Se observaron diferentes enfoques en la selección de variables: mientras que algunos estudiantes identificaron el tiempo (*t*) y la altura (*h*) como variables clave, otros incluyeron factores menos relevantes como la masa del balón o la velocidad del viento, lo que reflejaba una comprensión menos precisa del fenómeno físico a modelar.

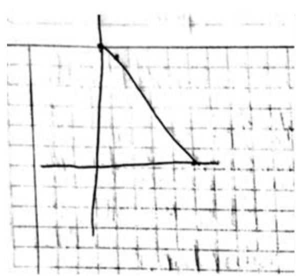

Figura 2. Grafica de un equipo para representar la caída libre del balón

Los errores en las gráficas iniciales variaron ampliamente, evidenciando las diferencias individuales en la comprensión del movimiento en caída libre. Algunos estudiantes dibujaron gráficas lineales decrecientes (Figura 2), presuponiendo una relación directa y constante entre la altura y el tiempo, sin considerar la aceleración debido a la gravedad. A su vez, el proceso de definir el sistema de referencia presentó desafíos. Se notó que algunos estudiantes situaron el origen de su sistema de coordenadas en la parte superior, donde se suelta el balón, y otros en el suelo, donde el balón termina su caída. Esto afectó la dirección en la que se dibujaban las gráficas: algunas empezaban en el punto más alto y disminuían hacia abajo (en el primer caso), mientras que otras se dibujaban ascendiendo desde el origen (en el segundo caso). La elección del origen del sistema de coordenadas es fundamental, ya que establece el punto de partida para interpretar la gráfica y puede conducir a errores de interpretación si no se elige de manera coherente con las convenciones físicas y matemáticas.

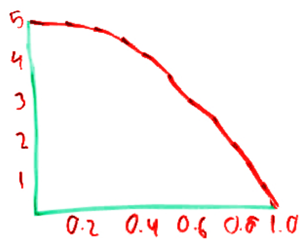

Figura 3. Curva conformada por segmentos rectos

En el análisis cualitativo de la gráfica de la caída libre, el equipo 3 presentó una interesante interpretación que ellos llamaron “linealidad de la curva”. Esta noción surgió de la suposición inicial de que el balón caía a una velocidad constante, implicando que, por cada unidad de tiempo transcurrida, el balón recorrería la misma distancia. Esta idea llevó al equipo a prever una gráfica con una recta de pendiente negativa, un indicador común de velocidad constante en un gráfico distancia-tiempo. A pesar de la inexactitud de esta hipótesis —dado que en la caída libre la velocidad aumenta debido a la aceleración constante de la gravedad—, esta suposición inicial fue útil para introducir el concepto de aceleración en la discusión. El equipo propuso una serie de segmentos lineales sucesivos, cada uno representando el movimiento del balón en intervalos de tiempo muy breves. Al unir estos segmentos, se visualizó una curva que reflejaba el aumento progresivo de la velocidad, como se ilustra en la Figura 3. Esta explicación intuitiva sobre el movimiento fue analizada en la plenaria donde el equipo 3 expuso sus ideas.

E3-A1: *suponga que [el balón] está en 5, y si en el primer segundo avanza 10 centímetros, en el segundo otros 10, lo que se obtiene es una recta para abajo*

P: *Entonces ¿están de acuerdo con que se obtiene una recta con pendiente negativa?*

E3-A2: *no, no, es que… si está bien para un corto tiempo, entonces está ahí el cambio a otra velocidad y otra recta más para abajo* [mayor inclinación]

E3-A1: *la idea es que la gráfica se puede ver como la unión de esas rectas, claro que si comparas con una curva, debes hacer las rectitas más pequeñas.*

Durante la fase 2 de la secuencia didáctica, los estudiantes se enfrentaron al desafío de la experimentación directa y la obtención de datos empíricos sobre el balón en caída libre. Después de haber especulado sobre la forma de la gráfica en la primera fase, tuvieron la oportunidad de contrastar sus ideas previas con mediciones reales. Se realizó el experimento y se grabó el movimiento del balón utilizando dispositivos móviles, lo que proporcionó un recurso visual que los estudiantes utilizaron para recopilar datos cuantitativos. Con estas grabaciones, los estudiantes midieron intervalos de tiempo específicos y la altura del balón en esos momentos, construyendo una tabla de datos que serviría como base para su análisis matemático (Figura 4).

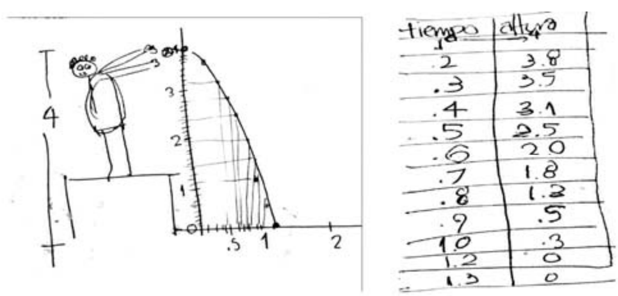

Figura 4. Gráfica y tabla obtenidas del equipo 1 a partir del análisis del video

Al analizar la tabla de datos, los estudiantes debían reconocer la relación entre el tiempo (*t*) y la altura (*h*) del balón, lo que resultó en una variedad de interpretaciones. En esta fase, algunos estudiantes pudieron identificar la naturaleza cuadrática de la relación, es decir, que la altura era proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido, un reflejo de la ecuación de movimiento bajo aceleración debida a la gravedad. Sin embargo, se observaron errores comunes en la interpretación de los datos. Algunos estudiantes, por ejemplo, persistieron en el error de la fase anterior y continuaron modelando la relación entre altura y tiempo como lineal, en lugar de cuadrática (ver Figura 2). Esto se evidenció en tablas de datos donde la disminución de la altura no se aceleraba con el tiempo. Otros estudiantes reconocieron la aceleración, pero se confundieron al intentar representarla en sus gráficos, lo que llevó a curvas con la concavidad en la dirección incorrecta o a líneas quebradas que no reflejaban la suavidad de la curva parabólica real. Además, algunos estudiantes lucharon con la interpretación de los datos a nivel más fundamental, como confundir los ejes al asignar la altura al eje horizontal y el tiempo al vertical, o no reconocer la importancia de comenzar el registro del tiempo desde el momento en que el balón comenzaba a caer, lo que introducía errores sistemáticos en sus mediciones. La fase 2 permitió a los estudiantes confrontar y corregir sus concepciones erróneas, utilizando la experimentación y la evidencia para desarrollar una comprensión más precisa del concepto matemático de función y su relación con fenómenos físicos.

En la plenaria, el profesor propició una reflexión sobre la información que aportan las tablas de valores sobre el experimento. El equipo 1 compartió la siguiente información.

E1-A3: Viste, era otra la… nuestra gráfica, lo datos que obtuvimos dan otra gráfica

E1-A2: la relación entre la altura y el tiempo no era como pensábamos. Definitivamente no, no es una línea recta.

E1-A3: ¿recuerden lo que preguntó el profesor? [¿A qué altura está el balón en el tiempo cero?]. Todo comenzaba a partir de los 4 metros, en el tiempo cero.

E1-A3: Es cierto lo que dijo el equipo 4, el experimento solo ocurrió en un intervalo de tiempo y espacio específicos, de 4 metros a cero metros y de 0 a 1.2 segundos.

E1-A1: fuera de esos valores no sabemos qué pasó porque nuestro experimento sólo está en esos valores. No tenemos información sobre el balón antes o después.

E1-A2: Bueno, antes del tiempo cero, el balón estaba en la mano de [nombre del alumno], así que no estaba cayendo aún. Después de los 1.2 segundos, ya habría tocado el suelo.

En el diálogo anterior, los estudiantes reflexionan sobre los resultados de la segunda fase del experimento, donde se observa un claro proceso de reconocimiento y corrección de concepciones previas. Se discuten las discrepancias entre sus expectativas iniciales y los datos reales, señalando que la relación entre altura y tiempo no se corresponde con la línea recta que habían anticipado. Esto es un hecho muy relevante, ya que indica un ajuste en su concepción sobre el movimiento de caída libre. La conversación revela que el punto de partida del experimento (el balón a 4 metros de altura en el tiempo cero) fue comprendido y aceptado por los estudiantes después de considerar las preguntas orientadoras del profesor. Además, se muestra una conciencia creciente de las limitaciones de su experimento, reconociendo que su análisis solo es válido dentro de un intervalo específico –de 4 metros a cero metros y de 0 a 1.2 segundos—, y que fuera de esos valores no tienen información. Esta reflexión demuestra una madurez en su pensamiento científico al ser conscientes de que cualquier afirmación sobre el comportamiento del balón más allá de esos parámetros sería especulativa.

Durante la tercera fase de la secuencia didáctica, los estudiantes repitieron el experimento de caída libre del balón y se adentraron en el uso del software Tracker para analizar el movimiento. Esta fase marcó un avance significativo en el proceso de matematización vertical, donde el enfoque se trasladó hacia la abstracción y la generalización de los modelos matemáticos. Una vez que el Tracker estuvo en uso, los estudiantes pudieron grabar el movimiento del balón con mayor precisión y extraer las coordenadas de posición-tiempo a partir del vídeo (Figura 5). Con esta tecnología comenzaron a visualizar el movimiento del balón en términos de una serie de puntos a lo largo de un eje temporal y espacial, con la posición en el eje vertical y el tiempo en el horizontal. La gráfica resultante mostró, para muchos, una parábola que representaba la aceleración constante debida a la gravedad, un reflejo de la relación cuadrática entre el tiempo y la posición.

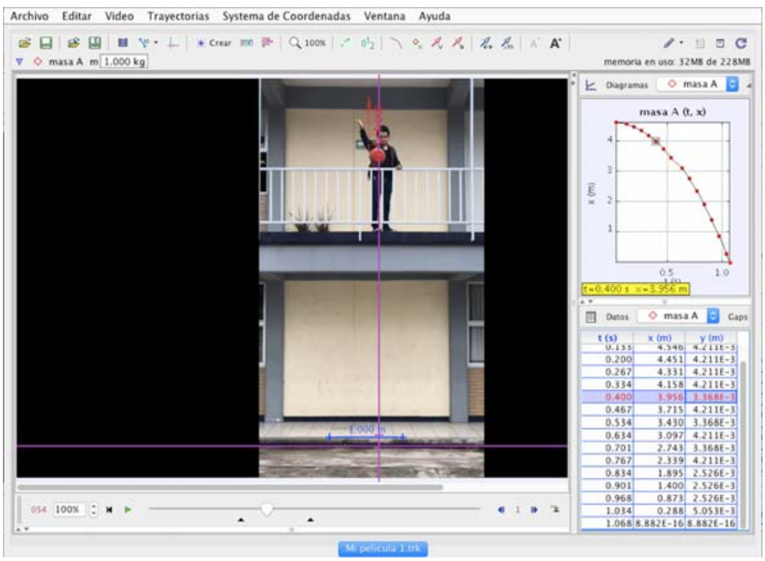

Figura 5. Experimento de caída libre de un balón, tabla de valores y gráfica generadas con el software

Sin embargo, no todos los estudiantes interpretaron correctamente estos resultados. Algunos errores observados incluyen la confusión entre las coordenadas del eje *x* y *y*, lo que llevaba a gráficos donde se representaba de manera incorrecta el tiempo en el eje vertical y la posición en el horizontal (Figura 6). Además, algunos estudiantes tuvieron dificultades con el concepto de aceleración constante, pues esperaban ver una línea recta en lugar de una curva parabólica. Otro error común fue la mala interpretación de la escala de tiempo. Algunos estudiantes configuraron incorrectamente la escala temporal en Tracker, lo que resultó en una gráfica que no reflejaba la realidad del experimento. En algunos casos, se observaron parábolas demasiado “aplanadas” o “comprimidas” debido a una mala elección de la escala temporal o espacial, lo que distorsionaba la relación cuadrática. La transición de una representación gráfica basada en conjeturas y observaciones simples a una más precisa y cuantitativa marcó un paso importante en su camino hacia la abstracción matemática y la formulación de un modelo matemático sólido de la caída libre.

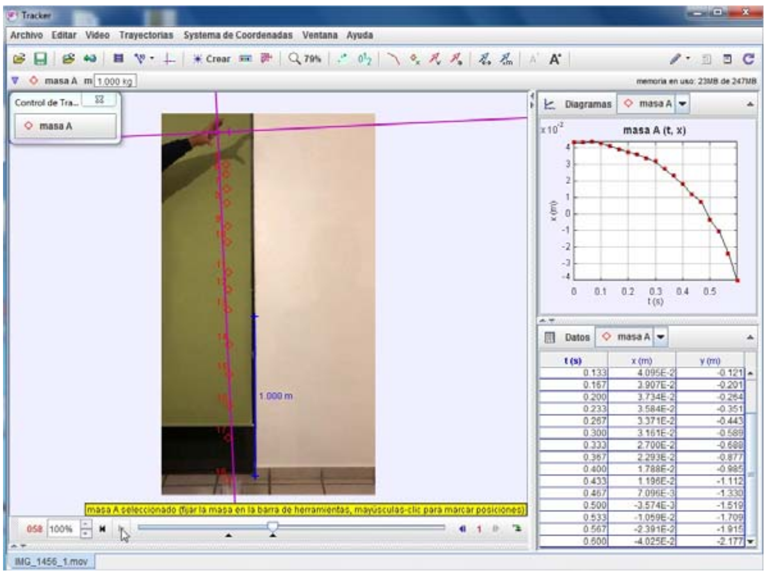

Figura 6. Análisis del video del equipo 7, con altura de 2m y un ajuste distinto del plano cartesiano

El diálogo entre los estudiantes del equipo 3 refleja el proceso de reconocimiento y definición del punto de partida para el análisis del movimiento del balón en la fase 3 de la secuencia didáctica.

E7-A3: *Ok, si, entonces, viendo el vídeo otra vez, el balón empieza a caer desde arriba de la pantalla.*

E7-A1: *Sí, y eso lo que hemos marcado como la altura física, el punto desde donde empieza a caer, ¿sí?*

E7-A2: *sí, sí, y según el software, ese es nuestro punto de referencia. Es como el punto de partida para todo el experimento.*

E7-A3: *Bueno, es el punto inicial, ¿no? En el vídeo, la tabla y la gráfica, todos comienzan en cero tiempo. Pero no en cero distancia porque está a unos 4 metros de altura.*

E7-A2: *¿Importa ese punto? ¿es importante para la tabla… y la gráfica?*

E7-A1: *Pues claro que sí, es donde inicia todo el experimento. Si no sabemos el punto de inicio, ¿cómo vamos a seguir el movimiento del balón?*

E7-A1: *Entonces, ese punto... es como el origen de los ejes en la gráfica.*

E7-A2: *Sí, y todos los puntos en la gráfica que vienen después indican cómo cambia la altura con el tiempo a medida que el balón cae.*

E7-A3: *Es como poner las piezas del rompecabezas juntas. El vídeo nos da una imagen visual, la tabla de valores traduce eso en números y la gráfica los pone en una imagen que podemos analizar matemáticamente.*

En este diálogo se discuten conceptos importantes relacionados con la matematización vertical y la interpretación de datos en el marco de un experimento de caída libre. Los estudiantes identifican la “altura física” como el punto desde donde el balón empieza a caer, lo cual es crucial porque establece la condición inicial del experimento en términos de altura y tiempo. Reconocen que, aunque el tiempo empieza en cero, la altura no es cero debido a que el balón se suelta desde una altura determinada, en este caso mencionan “unos 4 metros”.

El diálogo también revela la comprensión de que el punto de inicio es esencial tanto para seguir el movimiento en el vídeo como para registrar los datos en una tabla y representarlos en una gráfica cartesiana. Además, la discusión subraya la importancia de la coherencia entre las diferentes representaciones de datos: visual (vídeo), numérica (tabla de valores) y gráfica (gráfica cartesiana). Esta coherencia es esencial para la interpretación y análisis matemático del fenómeno físico.

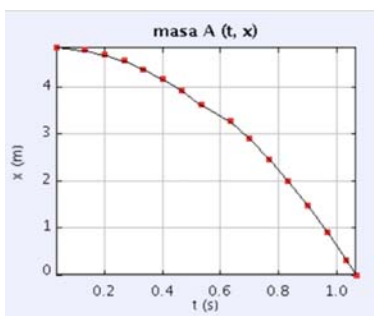

Figura 7. Gráfica obtenida en la fase 4

Durante la cuarta fase de la secuencia didáctica, los estudiantes emprendieron la tarea de analizar cualitativamente las gráficas resultantes, comparándolas con sus gráficas iniciales y explorando métodos para la formulación algebraica de una función cuadrática que modelara la caída libre del balón (Figura 7). Esta etapa representó la culminación de la matematización vertical, donde los conceptos matemáticos se abstraen y generalizan. Los estudiantes revisaron las gráficas generadas con Tracker, notando las diferencias entre sus predicciones iniciales y los datos reales. A través de la discusión, identificaron que la forma parabólica de la gráfica de posición-tiempo reflejaba la aceleración constante debida a la gravedad. Se dieron cuenta de que, a diferencia de sus gráficos anticipados lineales o incorrectamente curvados, la gráfica real mostraba una curva simétrica que representaba la relación cuadrática entre el tiempo y la distancia recorrida por el balón en caída.

De todos los equipos, únicamente cuatro consiguieron formular una ecuación algebraica, de los cuales tres lo hicieron de manera correcta. Dos grupos optaron por un enfoque práctico utilizando Geogebra, donde experimentaron con diferentes valores de los coeficientes dentro de una función cuadrática hasta que la curva se alineó adecuadamente con los datos experimentales. No obstante, el equipo 3 adoptó un procedimiento más analítico, aplicando un método algebraico que habían estudiado previamente para obtener una expresión algebraica a partir de un conjunto de puntos dados (SEP, 1999; página 112). En este episodio, se destaca la introducción de una notación específica para describir la función. En primer lugar, se seleccionaron tres pares de puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Luego, se empleó la ecuación general de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ para establecer un sistema de ecuaciones de 3 x 3. De esta manera, se construyó el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1 = ax_1 + bx_1 + c$$
$$y_2 = ax_2 + bx_2 + c$$
$$y_3 = ax_3 + bx_3 + c$$

La complejidad del cálculo los abrumó rápidamente, momento en el cual el profesor intervino recomendando el uso de Alpha Wolfram para simplificar la tarea y obtener los coeficientes. Varios meses después de la experimentación de la secuencia didáctica, un estudiante del equipo 6 compartió con el profesor una reflexión sobre cómo habían llegado a la ecuación de su función: utilizaron la plataforma Alpha Wolfram, introduciendo una instrucción directa para que les devolviera la fórmula basada en tres puntos específicos (Figura 8). Su justificación para este procedimiento se apoyó en una discusión previa de una clase donde se comentó que una única parábola puede definirse a través de tres puntos dados no colineales. Esta idea les permitió aplicar la tecnología digital para resolver el problema matemático que se les había presentado. En su momento, este equipo no compartió su procedimiento por temor a que se invalidara su procedimiento o se les sancionara por no usar los procedimientos convencionales.

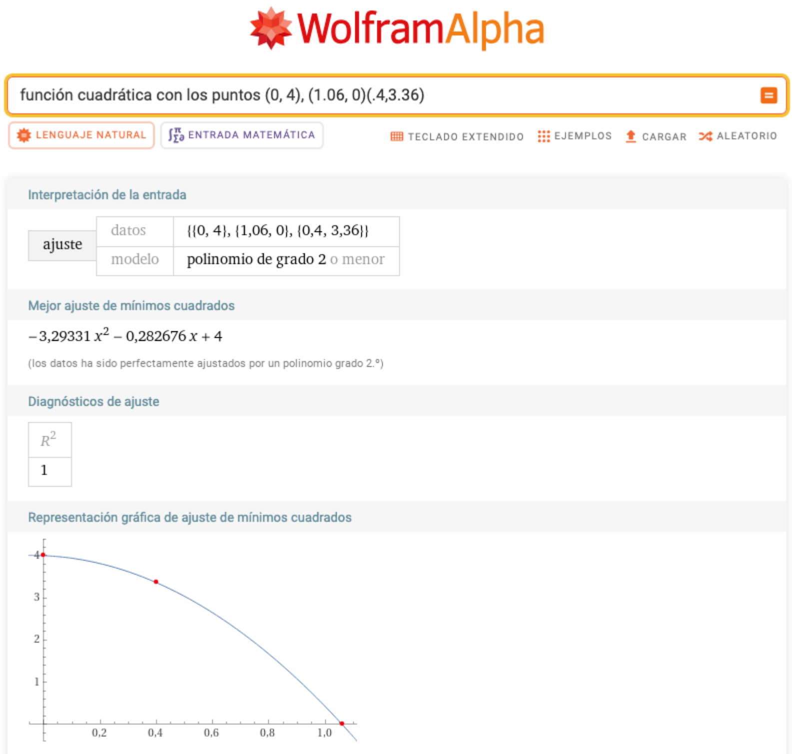

Figura 8. Reconstrucción del estudiante del procedimiento para obtener la función

En el debate colectivo, el equipo 5 se enfocó en cómo una función matemática puede ser vista como un concepto que expresa la realidad física, los datos numéricos, las representaciones gráficas y las formulaciones algebraicas, subrayando así la conexión entre la experiencia tangible y su interpretación matemática.

E5-A2: *¿o sea que todo lo que hicimos con la caída del balón estaba interconectado? Es decir, el experimento, la tabla de datos, las gráficas y la fórmula... todo habla de lo mismo.*

E5-A1: *…al principio, todo parecía separado, pero al final, al mirar la función se vió cómo se unía todo.*

E5-A2: *si, como dijo [nombre de otro estudiante] si, la función representar la situación. No es solo algo que graficas y ya.*

E5-A3: *…cuando estábamos tratando de encontrar la función me sentí un poco perdido, como si estuviera haciendo trampa al no hacer los cálculos a mano. Pero luego entendí que lo importante era comprender la relación, no quedarnos en las operaciones.*

E5-A2: *ja ja, creo que las funciones no es encontrar puntos y graficar, sino de entender qué representan esas gráficas y fórmulas en el mundo real.*

E5-A1: *¡sí! es más más que números y ecuaciones, es para entender lo que ocurre en la realidad*

E5-A2: *Y usar la tecnología para ayudarnos.*

El diálogo entre los estudiantes refleja una reflexión colectiva sobre la integración de diferentes representaciones matemáticas y cómo estas se relacionan con el fenómeno físico de la caída del balón. En la fase 4, la conclusión central es que todas las partes del proceso —el experimento físico, la recopilación de datos, la representación gráfica y la formulación de la función cuadrática— no son actividades aisladas, sino diferentes expresiones de un mismo fenómeno físico. Los estudiantes inicialmente percibían estos componentes como separados, pero al final comprendieron que la función cuadrática no es solo una abstracción para graficar, sino una representación concreta de la realidad física que estaban estudiando. La discusión indica un cambio de enfoque, de la realización mecánica de operaciones matemáticas hacia una comprensión conceptual más profunda.

El diálogo también sugiere que los estudiantes reconocieron el valor de la tecnología como una herramienta para facilitar la comprensión matemática. La sensación inicial de uno de los estudiantes de estar "haciendo trampa" al utilizar herramientas computacionales para calcular la función refleja una tensión entre los métodos tradicionales de cálculo manual y los métodos modernos que emplean la tecnología. Sin embargo, llegaron a la conclusión de que lo importante es la comprensión de la relación matemática y su aplicación en el mundo real, no el método de cálculo.

5. Conclusiones

En el marco educativo tradicional se observa que los estudiantes a menudo desarrollan una comprensión superficial de los conceptos matemáticos. Esta comprensión limitada se debe, en gran medida, a un enfoque que pide a los estudiantes observar ejemplos de funciones y notar sus propiedades, lo que los lleva a una generalización implícita y no a una comprensión profunda de los principios matemáticos subyacentes. Este enfoque convencional, que a menudo se centra en una representación predominantemente algebraica, puede resultar en que los estudiantes no desarrollen una comprensión completa de conceptos como el de función. La falta de énfasis en la transición entre diferentes representaciones puede llevar a interpretar una función solo como una fórmula o ecuación, sin comprender su significado más amplio. Esto limita su capacidad para aplicar el concepto de función en diferentes contextos y situaciones matemáticas; una comprensión integral requiere la capacidad de conectar y transformar entre representaciones gráficas, algebraicas, tabulares y verbales, así como identificar sus conexiones.

Ante este escenario, la principal motivación para abordar nuevas metodologías de enseñanza de las funciones es superar la comprensión fragmentada de los conceptos matemáticos y avanzar hacia una comprensión más integrada y flexible. El aprendizaje de las funciones requiere la integración de varios aspectos y representaciones matemáticas, y para lograr esto se necesita una metodología que permita a los estudiantes conectar sus experiencias previas y vivencias con el contenido matemático.

Esta investigación propone un enfoque alternativo en la enseñanza de funciones, centrado en la modelación matemática en el contexto de la Educación Matemática Realista (EMR). Este enfoque busca aplicar conceptos matemáticos en la resolución de problemas reales, poniendo énfasis en el proceso de modelación, que incluye desde la formulación del problema hasta la validación del modelo matemático. Esta investigación analiza cómo los estudiantes de secundaria avanzan en su comprensión de las funciones a través de la modelación de un experimento de caída libre con el soporte del software Tracker.

La integración de la teoría y la secuencia didáctica se estableció en la matriz desarrollada para el estudio. Esta matriz ofrece una visión integral y estructurada de la EMR, facilitando la identificación y la interrelación de los principios fundamentales en cada etapa de la secuencia didáctica. Por ejemplo, en la primera fase, el principio de actividad y realidad se manifiesta a través de la participación activa de los estudiantes en problemas prácticos y realistas, iniciando así el proceso de matematización horizontal, donde conectan conocimientos previos con la realidad matemática. Esta fase se corresponde con el nivel situacional de comprensión donde los estudiantes usan situaciones reales para anclar su aprendizaje matemático.

En fases sucesivas se observa una transición hacia la matematización vertical, donde los estudiantes profundizan y refinan su comprensión de los conceptos matemáticos, pasando de una comprensión superficial a una más estructurada y abstracta. Esto se ve claramente en la fase de uso de Tracker y análisis cualitativo, donde el principio de interactividad y orientación se enfoca en el trabajo colaborativo y el uso de tecnología para analizar datos, lo que eleva el nivel de comprensión al general. En la fase final, la comparación y formulación algebraica reflejan la aplicación de conocimientos formales y análisis crítico, alineándose con el nivel formal de comprensión.

La matriz utilizada en el estudio es una contribución que proporciona un marco analítico para examinar el proceso de matematización progresiva. Este marco posibilita una evaluación sistemática y detallada de cómo los estudiantes avanzan en su comprensión matemática a través de diferentes etapas, desde la comprensión concreta y contextualizada hasta el pensamiento abstracto y generalizado. En este enfoque, la matriz actúa como una herramienta que descompone el proceso de aprendizaje en componentes más pequeños y específicos, lo que permite a los docentes y a los investigadores observar de manera más puntual el impacto de la enseñanza basada en la EMR.

El estudio mostró un avance en la comprensión de los estudiantes sobre las funciones matemáticas. En la primera fase, los estudiantes aplicaron sus conocimientos previos para anticipar el comportamiento de una función, mientras que en la segunda fase, la experimentación y recolección de datos reales permitieron a los estudiantes explorar la relación entre variables y empezar a generalizar sus observaciones. El uso del software Tracker en la tercera fase ayudó a un análisis más detallado y preciso de los datos, lo que permitió a los estudiantes pasar de una comprensión intuitiva a una más abstracta y estructurada. Este proceso de matematización vertical se intensificó en la cuarta fase, donde los estudiantes compararon sus gráficos iniciales con los resultados finales y formularon funciones algebraicas que reflejaban el fenómeno físico estudiado.

El estudio también ha mostrado la importancia de la integración de diferentes representaciones de funciones (gráficas, algebraicas, tabulares y verbales) y el uso de tecnologías como el software Tracker. Esta integración resultó fundamental para la comprensión y el análisis de datos, permitiendo a los estudiantes articular las diferentes representaciones y desarrollar significados matemáticos.

Esta investigación resalta la trascendencia de un proceso de enseñanza de las matemáticas centrado en la matematización progresiva, particularmente dentro del contexto de la Educación Matemática Realista (EMR). La práctica de iniciar el aprendizaje con la matematización horizontal, donde los estudiantes establezcan conexiones directas entre los conceptos matemáticos y situaciones reales, demostró ser un punto de partida importante al recuperar las ideas previas y permitir el uso de ideas intuitivas, así como de diversas representaciones. Al avanzar hacia la matematización vertical, los estudiantes son guiados para transitar de lo concreto a lo abstracto, de lo intuitivo a lo formal. Esta habilidad para pasar de lo vivencial y práctico a la abstracción favorece que los estudiantes desarrollen una flexibilidad cognitiva, lo que los prepara para enfrentar desafíos matemáticos en diversos contextos.

Referencias

Andrade, J. M. y Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: Um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *RELIME - Revista Latinoamerica de Investivación en Matemática Educativa, 15*(2), 137-169. https://www.relime.org/index.php/relime/article/view/236/203

Arzarello, F. y Robutti, O. (2004). Introduction. Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics, 57*(3), 305-308. https://doi.org/10.1007/s10649-004-5933-4

Best, M. y Bikner-Ahsbahs, A. (2017). The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change. *ZDM - Mathematics Education, 49*(6), 865-880. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0880-6

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52*(1)**,** 3-28. https://doi.org/10.1023/A:1023696731950

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases teóricas* [Manuscrito no publicado]. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. https://documen.site/download/educacion-matematica-realista-bases-teoricas_pdf

Duval. R. (2006). Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eisenberg, T. (2002). Functions and Associated Learning Difficulties. En D. Tall (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*, pp.140–152. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_9

Falcade, R., Laborde, C. y Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 317-333. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9072-y

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting mathematics education. China lectures.* Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 137-144). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_12

Kaur, B., Wong, L. F. y Govindani, S. N. (2020). Graphing Linear Equations—A Comparison of the Opportunity-to-Learn in Textbooks Using the Singapore and the Dutch Approaches to Teaching Equations. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 97-111). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_7

Ortega, M. y Puig, L. (2017). Using Modelling and Tablets in the Classroom to Learn Quadratic Functions. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 565-575). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_47

Ortega, M., Puig, L. y Albarracin, L. (2019). The Influence of Technology on the Mathematical Modelling of Physical Phenomena. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs* (pp. 161-177). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_9

Rodríguez-Gallegos, R. y Quiroz-Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99-124. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1914

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 229-254. https://doi.org/10.1023/A:1026033415747

Selter, C. y Walter, D. (2020). Supporting Mathematical Learning Processes by Means of Mathematics Conferences and Mathematics Language Tools. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 229-254). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_13

Secretaría de Educación Pública (1999). *Fichero de actividades didácticas Matemáticas. Educación Secundaria*. SEP

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). Seen Through Other Eyes—Opening Up New Vistas in Realistic Mathematics Education Through Visions and Experiences from Other Countries. En M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 1-20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_1

Autores

Rosa Isela González-Polo. Universidad Autónoma del Estado de México, México.
rosselgonzalezp@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8252-5796

Apolo Castañeda. Instituto Politécnico Nacional, México. acastane@ipn.mx
https://orcid.org/0000-0002-7284-8081

