GLORIA SÁNCHEZ-MATAMOROS, MERCEDES GARCÍA,
SALVADOR LLINARES

LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA COMO OBJETO DE INVESTIGACION EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

THE UNDERSTANDING OF DERIVATIVE AS THE OBJECT OF INVESTIGATION IN MATHEMATICS EDUCATION

RESUMEN. La comprensión de la noción de derivada presenta dificultades para los estudiantes de Bachillerato (16-18 años) y primeros años de Cálculo en la Universidad. En dicho contexto, este trabajo revisa y organiza las aportaciones de las investigaciones hechas en Matemática Educativa para identificar el conocimiento generado y las áreas donde es necesario contribuir con información. La revisión se ha estructurado considerando: a) lo que se conoce sobre la comprensión de la derivada de una función en un punto; b) el papel que desempeñan los sistemas de representación; c) las características del desarrollo del esquema de derivada. Por último, se identifican líneas de investigación necesarias para aumentar nuestra comprensión de cómo los estudiantes dotan de significado y usan el concepto de derivada.

PALABRAS CLAVE: Pensamiento matemático avanzado, derivada, esquema de derivada, construcción del conocimiento.

ABSTRACT. High school students (16 to 18 years of age) and first year students of calculus in university have difficulty understanding the notion of the derivative. In this context, this study reviews and organizes the contributions of studies made in Mathematics Education to identify the knowledge generated and the areas where it is necessary to provide information. The review has been structured to consider: a) what is known about the understanding of the derivative of a function at a point; b) the role of representation systems; c) the characteristics of the development of the derivative schema. Lastly, the necessary lines of investigation were identified to enhance our understanding of how students give meaning and use to the concept of the derivative.

KEY WORDS: Advanced mathematical thinking, derivative, derivative schema, knowledge building.

RESUMO. Os estudantes de Ensino Médio (16 a 18 anos) e os que cursam os primeiros anos de cálculo na universidade têm dificuldades para compreender a noção de derivada. Em tal contexto, este trabalho revisa e organiza as contribuições das investigações feitas em Educação Matemática para identificar o conhecimento gerado e as áreas onde são necessárias contribuir com informação. A revisão se estruturou considerando: a) o que se conhece sobre a compreensão da derivada de uma função em um ponto; b) o papel que desempenham os sistemas de representação; c) as características do desenvolvimento do esquema de derivada. Por último, identificam-se linhas de

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2008) 11(2): 267-296
Recepción: Noviembre 16, 2007/Aceptación: Mayo 06, 2008

investigação necessárias para aumentar nossa compreensão de como os estudantes dotam de significado e usam o conceito de derivada.

PALAVRAS CHAVE: Pensamento matemático avançado, derivada, esquema de derivada, construção de conhecimento.

RÉSUMÉ. Les étudiants du lycée (16 à 18 ans) et ceux qui suivent les enseignements de calcul (analyse) dans l'université ont des difficultés pour comprendre la notion de dérivée. Dans ce contexte, notre travail analyse et organise les apports de recherches faites dans les Mathématiques Éducatives pour identifier la connaissance générée et les domaines dont il est nécessaire de donner plus d'information. L'analyse a été structurée en considérant : a) ce qui est connu sur la compréhension de la dérivée d'une fonction en un point; b) le rôle que jouent les systèmes de représentation; c) les caractéristiques du développement du schéma de dérivée. Finalement, des axes de recherche nécessaires sont identifiés pour augmenter notre compréhension de comment les étudiants donnent de la signification et utilisent le concept de dérivée.

MOTS CLÉS: pensée mathématique avancée, dérivée, schéma de dérivée, construction de la connaissance.

1. DIFERENTES MANERAS DE MIRAR EL DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA

Las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje variacional y el cálculo diferencial e integral (en derivada Azcárate, 1990; Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St. John, Tolias, & Vidakovic, 1997; Dolores, 1998; Baker, Cooley, & Trigueros, 2000, y Sánchez-Matamoros, 2004; funciones, a Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990, y García y Llinares, 1996; en integral, a Bezuidenhout & Olivier, 2000, y Camacho & Depool, 2002, 2003; en límites, a Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, & Vidakovic 1996; Sierra Vázquez, González Astudillo y López Esteban, 1999, y Espinoza y Azcárate, 2000; en variación y cambio, a Cantoral y Farfán, 1998), así como la experiencia de algunos de nosotros como profesores de educación secundaria –trabajando con alumnos de 12 a 18 años– nos ha permitido comprobar la dificultad de enseñar y aprender tales conceptos.

Artigue (1995) dice que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático. Por ejemplo, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

El fondo de la cuestión radica en que dichos alumnos no han construido un significado adecuado del concepto de derivada. La construcción de un significado parcial del concepto durante los primeros años puede generarles dificultades en su desempeño en los cursos de cálculo. Además, las concepciones previas de los estudiantes pueden tener aspectos contradictorios, que se manifiestan según las situaciones y son muy resistentes al cambio. Por tal motivo, es necesario comprender los procesos a través de los cuales los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada. Desde este supuesto, resulta relevante saber lo que la investigación en Matemática Educativa aporta sobre la comprensión de la derivada.

La noción de derivada de una función, junto con la de integral, son conceptos clave del cálculo. El concepto de derivada conlleva diversos aspectos: su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a la curva; su perspectiva analítica, como límite del cociente incremental; su carácter puntual o global –es decir, en intervalos– y, según exija la resolución de una determinada tarea, se pueden utilizar aspectos que relacionan a f' y f'' En conjunto, las características de los problemas planteados pueden mostrar a la derivada desde la integración de una perspectiva analítica y gráfica (apoyándose en la presentación de la idea de derivada en un punto y de la función derivada) con el operador derivada, a través el cálculo de derivadas sucesivas y la regla de la cadena.

En esta revisión hemos intentado describir no sólo los resultados de las investigaciones, sino también dar cuenta sobre la manera en que los investigadores han interpretado la forma como los estudiantes resolvían los problemas. Tener en cuenta las perspectivas teóricas de las investigaciones nos permite comprender mejor cómo intentan dotar de significado a la manera en que los alumnos resuelven los problemas, indicando las características del aprendizaje.

Entre las diversas perspectivas teóricas que han adoptado los investigadores, se encuentran las aproximaciones centradas en elementos de cognición, como:

- *Esquema conceptual* (Azcárate, 1990), derivada de la idea de imagen del concepto (Tall, 1989).

- Ideas procedentes de una aproximación piagetiana del conocimiento y su desarrollo, visto a través de la teoría APOE (Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997) y la del desarrollo de los esquemas (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros, García, García Blanco y Llinares 2006).
- Ideas procedentes del papel de las representaciones y actividades con ellas en el desarrollo de los significados (Font, 2000a; 2000b; Habre & Abboud, 2006)
- Las teorías de la reificación (Sfard, 1992), que se centran en los vínculos proceso-objeto (Zandieh, 2000)

Además, durante los últimos años se ha desarrollado en México una línea de investigación que ocupa la aproximación teórica conocida como *socioepistemología*, la cual estudia los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple (Cantoral & Farfán, 2003). Dicho enfoque incorpora el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización por vía de la enseñanza; con ello, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005). La perspectiva también subraya el papel que fungen el pensamiento y el lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998) para estudiar la derivada; de ahí que se centre en las prácticas sociales que dan vida a las matemáticas de la *variación* como una cuantificación del cambio. Una de esas prácticas sociales para ahondar en la derivada es la *predicción*, que se entiende como *“una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que lo producen”* (Cantoral et al 2005, p. 467). En suma, la socioepistemología considera al concepto de derivada como un complejo de prácticas de naturaleza social que le dan sentido y significado.

Los trabajos que recurren a esta línea de investigación abandonan el acercamiento a la derivada a *“partir de la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente”* (Montiel, 2005b, p. 668), pues defienden la idea de que hasta que no se vea la noción de derivada como una organización de las variaciones sucesivas no será comprendida (Cantoral y Farfán, 1998), lo cual implica acercarse a la derivada con base en *“la práctica social de la predicción mediante la matematización de* *fenómenos de cambio"* (Montiel, 2005b, p. 671). Esta hipótesis, dentro de la línea de investigación *pensamiento y lenguaje variacional*, ha generado el desarrollo de estudios que recorren distintas ramas: currículo, educación, vida y conocimiento en la escuela o sistema escolar (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral & Ferrari, 2004; Cantoral et al., 2005; Sánchez y Molina, 2006; Cantoral, Sánchez y Molina, 2007; Ordoñez y Buendía, 2007).

Con base en estos supuestos, hemos organizado la información atendiendo a los siguientes aspectos:

- Errores y dificultades en la comprensión del concepto de derivada: la noción de razón de cambio
- Relación entre razón de cambio y cociente incremental
- Los sistemas de representación como herramientas para pensar sobre las derivadas
- Lo local y lo global: la relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$.
- El desarrollo del esquema de derivada.
- La aplicación del concepto de derivada: el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena.

2. LA COMPRENSIÓN DE LA RAZÓN DE CAMBIO

La descripción sobre los errores y dificultades que tienen los estudiantes con respecto a la derivada fue el objetivo de las primeras investigaciones realizadas en este tema (Orton, 1983; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Porzio, 1997; entre otros). Orton identificó tres tipos de errores que cometían los alumnos en las tareas de diferenciación y sus aplicaciones:

Estructurales, relacionados con los conceptos implicados.

Arbitrarios, cuando el alumno se comporta arbitrariamente sin tomar en cuenta los datos del problema.

Manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

Los datos en que se basó el trabajo de Orton procedían de la aplicación de dos entrevistas: la primera estuvo dirigida a que los estudiantes respondieran preguntas sobre límites, áreas e integración; la segunda estaba centrada en el significado del cociente incremental, la diferenciación y aplicaciones. Ahora bien, los alumnos tuvieron menos dificultades en los ítems tocantes a las aplicaciones de la diferenciación que en los referentes a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada a la razón de cambio.

Si se considera que la derivada en un punto nos indica *la velocidad de cambio*, la comprensión de tal idea se apoya en el saber previo de la noción de la razón entre el incremento de x en relación al de y. Para obtener información sobre la aprehensión de dicha relación, uno de los ítems empleaba una tabla, una gráfica y la descripción de una situación. La posible generalidad sobre los significados de la idea de razón se buscaba viendo la manera en que los estudiantes podían interpretar la razón de cambio en puntos particulares y en generales ($x = T$), considerando a las funciones lineales y no lineales.

Uno de los errores que cometieron los alumnos fue que daban el valor de la abscisa cuando se les preguntaba por la razón de cambio en un punto no dado en la tabla, y para un valor genérico $x = T$ cuando se presentaban funciones lineales en forma de gráfico-tabla (Figura 1, Task C3).

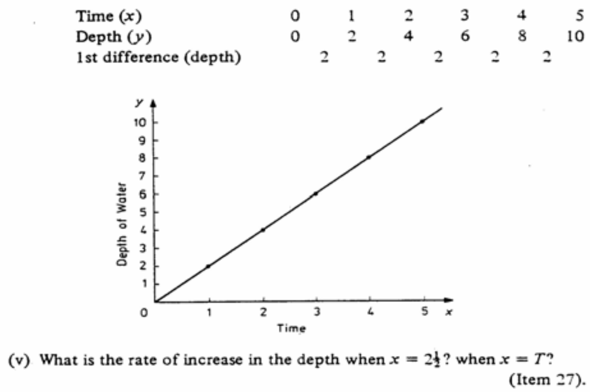

Figura 1. Tarea C3 en el estudio de Orton (1983).

En otras tareas se observó cómo la comprensión de la razón de cambio (razón entre el incremento de x y el de y) dependía del tipo de función utilizada (Orton, 1983; Hart, 1981). El uso de funciones lineales o cuadráticas mostró cómo influía el tipo de función en el significado dado a dicha razón, así como las dificultades manifestadas al considerar el límite cuando el incremento del intervalo tiende a cero (h tiende a cero al reparar en el intervalo $x + h$); en la Figura 2 se nota la forma de la tarea C6 en el estudio de Orton. La mayoría de los alumnos contestó de manera correcta al preguntarles por la razón de cambio con funciones lineales, mas no sucedía lo mismo en tareas donde la función era no lineal.

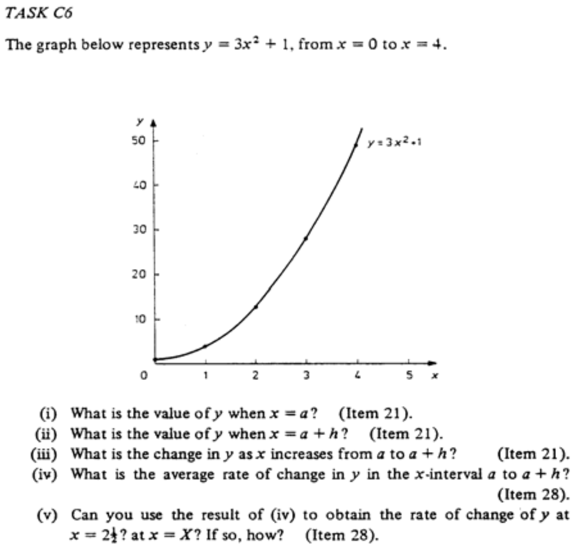

Figura 2. Tarea C6 en el estudio de Orton (1983).

Como consecuencia de tales resultados, Orton indicó que las dificultades con la idea de razón de cambio y su vinculación al tipo de función lineal o cuadrática podían tener su origen en una comprensión débil sobre el concepto de función. La información de estas investigaciones destaca la importancia de la relación entre la razón de cambio y el conciente incremental en la comprensión de la derivada, entendida como una cuantificación del cambio. Dicho aspecto ha sido el foco de algunos trabajos; sus resultados aparecen en la próxima sección.

3. LA RELACIÓN ENTRE LA RAZÓN DE CAMBIO Y EL COCIENTE INCREMENTAL. LA TASA DE VARIACIÓN

La relación entre razón de cambio y cociente incremental ha sido estudiada con la noción de *esquema conceptual* (Tall, 1989) y la teoría de la reificación (Sfard, 1992). Tall definió la imagen del concepto (*concept image*) como el conjunto de estructuras cognitivas asociadas al concepto, incluyendo a todas las imágenes mentales y los procesos y propiedades (Tall & Vinner, 1981). Desde esta perspectiva, Azcárate (1990) analizó la comprensión del concepto de derivada de una función en un punto, con estudiantes de 15 y 16 años, quienes habían seguido un material didáctico sin tener los conocimientos previos sobre límite y continuidad. El estudio se centró en la idea de recta tangente a una gráfica en un punto.

El análisis sobre las producciones de los estudiantes, que se obtuvieron a través de cuestionarios y entrevistas, permitió caracterizar las dificultades, errores y esquemas conceptuales asociados a tres conceptos: *pendiente de una recta*, *velocidad instantánea de un movimiento variado* y *tasa de variación instantánea de una función*. Se identificaron dos errores en los estudiantes que ilustraban las dificultades en cuantificar el cambio en contextos de velocidad: 1) confundir la pendiente de una recta con su ordenada en el origen; 2) dar el valor de la ordenada en el origen como valor de la pendiente de la recta.

Otros trabajos (Zandieh, 1997, 2000) tienen como base a la teoría de la reificación (Sfard, 1991, 1992), que plantea dos enfoques de un concepto: uno operacional y otro estructural. Las concepciones se llaman *operacionales* cuando abarcan a las nociones matemáticas como procesos, algoritmos y acciones, mientras que son *estructurales* cuando entienden a los conceptos matemáticos como objetos abstractos.

Según esta perspectiva, el proceso de aprendizaje consiste en interacciones entre concepciones operacionales y estructurales; las primeras significan para la mayoría de los estudiantes el primer paso en la adquisición de nuevos conceptos. Sfard distingue tres etapas en el proceso de formación de las concepciones, que equivalen a tres grados de estructuración progresiva: *interiorización*, *condensación* y *reificación*. Zandieh (1997, 2000) refiere que los *procesos* son operaciones sobre objetos previamente establecidos; cada proceso es reificado en un objeto donde actuarán otros procesos, con lo cual se forma una cadena que Zandieh llama *parejas de proceso-objeto*.

La reificación se define como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar con una perspectiva totalmente nueva. Se puede decir que un proceso solidifica en un objeto o en una estructura estática; Sfard (1992) precisa que la reificación es instantánea y se le puede entender como un salto cualitativo. La nueva entidad deificada se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a cierta categoría. Ahora bien, en el proceso de construcción del conocimiento matemático desempeñan un papel importante los significados asociados a las diferentes representaciones.

Como consecuencia de este hecho, Zandieh (1997, 2000) estudió el proceso de construcción de significados de la idea de derivada en un periodo instruccional largo (9 meses, 75 clases), centrando su atención en una muestra de nueve alumnos de cálculo. Este investigador consideró diversas representaciones del concepto de derivada: a) *gráfica*, como la pendiente de la línea tangente a la curva en un punto; b) *verbal*, como la razón de cambio instantánea; c) *física*, como la velocidad; d) *simbólica*, como el límite del cociente incremental.

Para caracterizar la evolución en la construcción de los significados, se recogieron exámenes de los estudiantes y se hicieron cinco entrevistas a cada uno de los participantes en el estudio. Zandieh utilizó la metáfora del *puzzle* para explicar la manera en que los estudiantes parecían construir su comprensión de la derivada. Desde los datos de esta investigación se indica que un estudiante parte de una comprensión parcial, cada estudiante con diferentes piezas de un *puzzle*; cuanto más completa era su comprensión, menos piezas quedaban sin encajar. Sin embargo, un resultado de la investigación fue que los estudiantes no conectaban de manera automática la comprensión sobre un proceso en un contexto con el mismo proceso en otro contexto. Por tanto, un alumno no tendrá una comprensión completa del concepto de derivada si no puede reconocer y construir cada uno de los procesos involucrados en su comprensión de la derivada en cualquiera de los contextos relevantes.

Estos trabajos, vistos en forma global, subrayan la importancia de la relación entre razón de cambio y cociente incremental en la comprensión de la derivada, así como la influencia de los contextos en la construcción del significado y las transformaciones entre diferentes representaciones. Dicha afirmación se encuentra en consonancia con la idea que exponen Harel, Selden & Selden (2006) respecto a que la comprensión de un concepto se pone de manifiesto a través de la comparación entre definiciones equivalentes del concepto y sus diferentes representaciones, al igual que con el conocimiento de sus propiedades.

4. LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN COMO HERRAMIENTAS PARA PENSAR SOBRE LA DERIVADA

El papel que se atribuye a los sistemas de representación como medios que ayudan a dotar de significado a los conceptos conlleva a que el foco de algunas investigaciones se centre en la manera en que los estudiantes usan las diferentes representaciones como pre-requisito para entender el desarrollo de la comprensión. Desde tal perspectiva, se intenta analizar el papel que cumplen las representaciones y su coordinación, vistas como *instrumentos conceptuales* o *herramientas* con las que el estudiante piensa al resolver problemas.

Así, la importancia del papel que tienen las representaciones estriba en que se asume que los significados de los conceptos son construidos a través del uso de los signos (D'Amore, 2006; Radford, 2000). Tal reflexión ha hecho que adquiera relevancia el estudio acerca de la función que desempeñan las representaciones en la construcción de los significados de la idea de derivada y en la introducción de tal concepto mediante el estudio de la variación con el uso inicial de contextos numéricos.

4.1. *La conexión entre lo gráfico y lo analítico en la construcción de las imágenes mentales*

La comprensión de la relación entre las gráficas de una función y la gráfica de su derivada es el objetivo de la investigación de Ferrini-Mundy & Graham (1994), quienes analizan las dificultades de los estudiantes al intentar esbozar la gráfica de la derivada de una función a partir de la gráfica de la función (de la gráfica de f a la de f'). La investigación, guiada por el constructivismo piagetiano, se centró en describir la reorganización cognitiva de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas (Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti & Perlwitz, 1991). El propósito fue describir la comprensión que tenían los estudiantes de cálculo sobre los conceptos de función, límite y continuidad, derivada e integral; asimismo, explorar la interrelación entre la comprensión y el papel que desempeñan los diferentes sistemas de representación. La metodología se basó en entrevistas a los alumnos en que se incluían tareas que podían resolver de forma rutinaria, ya que habían hecho problemas similares. Además, algunos ítems mostraban representaciones gráficas y otras fórmulas.

Los investigadores describen el caso de una estudiante cuyas compresiones y construcciones más ricas se daban en las nociones de funciones, límites y continuidad, mientras que sus ideas de derivada e integral eran definidas sobre todo a través de procedimientos. En lo tocante a la derivada, este caso permitió mostrar la dificultad de la alumna para relacionar la gráfica y la fórmula, pero tenía facilidad en derivar con el uso de algoritmos y habilidad para esbozar curvas siguiendo un algoritmo sobre puntos, al identificar las derivadas positivas y negativas.

Por otra parte, al decidir si ciertas gráficas representaban funciones de derivada, la estudiante debía buscar fórmulas para hallar la derivada por un procedimiento estándar, ya que admitió que no podía relacionar la idea de la línea tangente con la derivada de una función. Tales hechos fueron interpretados por los investigadores en el sentido de que la estudiante tenía conexiones débiles entre sus conocimientos procedimentales y conceptuales.

Esta característica sobre la comprensión del concepto de derivada también la han descrito Habre & Abboud (2006), quienes realizaron una investigación con estudiantes que procedían de un curso experimental de cálculo, donde se les introducía en los conceptos a través de múltiples representaciones. Dicho estudio mostró que los alumnos no tenían la misma comprensión del concepto de derivada en el modo analítico que en el modo gráfico.

Así, respecto al concepto de derivada, muchos estudiantes (unos fueron entrevistados, otros no) fallaron en los usos apropiados de la definición geométrica de derivada. Los autores del trabajo concluyeron que la representación algebraica de una función dominó la forma de pensar de la mayoría de los alumnos; esto se dio como consecuencia de que las definiciones matemáticas son tradicionalmente analíticas y crean un obstáculo en las mentes de los estudiantes.

Los resultados de las investigaciones que han analizado el papel que desempeñan las representaciones en la construcción de una comprensión de la idea de derivada indican que los significados que construyen los alumnos están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están conectados. Este hecho subraya la importancia de coordinar los diferentes modos de representación como una forma para que los estudiantes puedan comprender la derivada. El análisis sobre la manera en que los alumnos coordinan los modos de representación permite concluir que:

- Los estudiantes pueden considerar a los contextos gráficos y algebraicos como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación para resolver problemas.
- Los estudiantes de cálculo construyen sus conexiones, influidos por su experiencia previa.
- Hay grandes inconsistencias entre representaciones, particularmente en ítems procedimentales y comprensión de conceptos.

Por ejemplo, con el fin de analizar la manera en que las imágenes mentales construidas por los estudiantes influían en su comprensión y manejo de las conexiones gráficas entre una función y su derivada, Aspinwall, Shaw & Presmeg (1997) investigaron el caso de un alumno, llamado Tim, quien había completado un año de estudio de cálculo elemental. Ellos diseñaron veinte tareas que presentaron en un contexto de entrevista clínica; la mayoría de las tareas consistía en problemas no rutinarios, y en muchos había que determinar las gráficas de las derivadas desde la gráfica de la función y explicar el proceso seguido.

Para interpretar los datos de esta investigación hay que reparar en varios aspectos de la posición de Krutetskii (1976), quien distingue tres tipos de habilidades matemáticas en el nivel escolar:

- Analítica: Predomina la componente lógico-verbal
- Geométrica: Prevalece la componente pictórico-visual
- Armónica: Equilibrio de las dos componentes. En esta última se distinguen dos subtipos:
    - *Armónica abstracta*: Sí puede usar soporte visual en la resolución de problemas, pero no es el preferido.
    - *Armónica pictórica*: Sí puede usar soporte visual en la resolución de problemas y prefiere hacerlo así.

Los resultados que ofreció el trabajo de Aspinwall et al. (1997) sobre la capacidad de Tim para discriminar gráficamente una función y su derivada mostraron que el estudiante era un experto al aplicar reglas para determinar derivadas, mientras que utilizaba soporte visual cuando resolvía problemas y prefería hacerlo así, aunque su habilidad para pensar sobre un problema fue obstaculizada por una imagen mental incorrecta que asociaba a la idea de derivada para algunas funciones.

Tim construyó la imagen de una función polinómica de segundo grado como si tuviera asíntotas verticales; sin embargo, afirmó que el dominio era de todos los números reales. Esta imagen errónea le hizo dibujar una gráfica de la derivada en forma de función cúbica, que entraba en conflicto con su conocimiento analítico de que la derivada de una función cuadrática debía ser una recta. No obstante, Tim no fue capaz de controlar sus imágenes mentales, las cuales siguieron interfiriendo en su pensamiento sobre la derivada.

El estudio de Aspinwall y otros ilustró de qué manera las imágenes mentales que algunas veces los estudiantes crean y asocian a determinadas funciones pueden condicionar su actuar durante la resolución de problemas. Los resultados hacen hincapié en el papel que cumple el tipo de tareas que realizan los estudiantes y el tipo de funciones y representaciones (más o menos prototípicas) que los profesores usan al exponer las ideas sobre la derivada.

4.2. *La relación entre la gráfica de la función f y la gráfica de la función derivada f'*

Desde los resultados del estudio que llevaron a cabo Ferrini-Mundy & Graham (1994) se hizo énfasis en el papel clave que desempeñaba la comprensión de la relación entre la gráfica de una función (f) y la de la función derivada (f'). Los investigadores han empleado diferentes perspectivas teóricas para explicar tal vínculo.

Algunos trabajos ocupan un modelo de cognición neopiagetiano (Dubinsky, 1991, 1996), donde una *acción* es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo externo; él puede realizar *transformaciones* al reaccionar solamente a indicaciones externas que le proporcionan detalles precisos sobre qué pasos dar. Cuando una acción es repetida, el individuo reflexiona sobre ella y puede ser interiorizada en un *proceso*. Un individuo que ha construido un "proceso" puede describirlo, o invertir los pasos del proceso sin necesidad de hacer los mismos.

En contraste con una acción, según este marco teórico el individuo percibe a un proceso como interno y bajo su control. Cuando reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, hace aquellas transformaciones –sean acciones o procesos– que pueden actuar sobre él y puede construirlas. Aquí está pensando en dicho proceso como un objeto; en tal caso, decimos que *el proceso se ha encapsulado en un objeto*. Un esquema consiste en una colección coherente de procesos, objetos y esquemas elaborados previamente (Trigueros, 2004).

Con base en esta forma de entender la construcción de los significados de un concepto, Asiala y sus colaboradores (1997) estudiaron la comprensión de los alumnos sobre la relación entre la gráfica de una función y la de su derivada. De inicio, concibieron una *trayectoria de aprendizaje hipotética* del concepto derivada para conjeturar cómo se desarrollaba su comprensión, lo que en el modelo APOE se llama *descomposición genética del concepto*. La descomposición genética que efectuaron fue la siguiente:

- Conocer y comprender la representación gráfica de puntos de una curva en los ejes de coordenadas.
- Conocer y comprender el concepto pendiente de una línea.

- Conocer y tener una buena comprensión del concepto de función, así como una imagen bien desarrollada.
- Al construir un esquema para la derivada se deben recorrer dos caminos que están coordinados: el gráfico y el analítico.

Los investigadores entrevistaron a estudiantes que habían completado cursos tradicionales y experimentales de cálculo con ocho preguntas divididas en dos grupos: cuatro sobre comprensión gráfica de una función y cuatro sobre comprensión gráfica de su derivada.

Por ejemplo, la pregunta 6 (Figura 3) daba información gráfica de una función y la recta tangente en un punto, del cual se daban las coordenadas (5, 4), y se pedía calcular tanto el valor de la función en $x = 5$, $f(5)$ como el de la función derivada en el mismo punto, $f'(5)$*:*

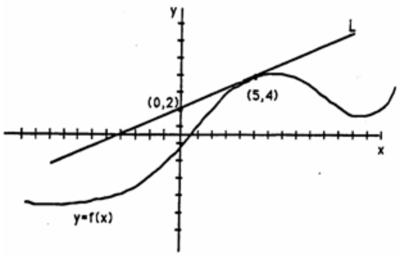

FIGURE 1. Question 6

2.2.1. *Interview Question 6*

Suppose that the line *L* is tangent to the graph of the function *f* at the point (5,4) as indicated in the figure.[2] Find *f*(5), *f'*(5).

Each student was asked "Explain how you arrived at your answers." The student was given another sheet of paper and asked the following question:

Figura 3. Pregunta 6 en la entrevista de la investigación de Asiala et al. (1997).

Sin embargo, la pregunta 7 (Figura 4) ofrecía información de tipo analítico sobre la función h y su derivada h' y pedía que se esbozara la gráfica de la función:

Estas cuestiones tenían como objetivo proporcionar información sobre la coordinación que hacían los estudiantes entre los modos gráficos y los analíticos, lo cual se consideraba como clave para construir un esquema del concepto de derivada. En tal contexto, el término *coordinar* alude a las relaciones que se establecen entre *signos* (geométricos o analíticos) de igual categoría *sintáctica* y, por ende, al proceso de *concertar medios para una acción común*; este es el caso de la resolución del problema propuesto.

2.2.2. INTERVIEW QUESTION 7

Sketch a graph of the function h which satisfies the following conditions:

h is continuous,

$h(0)=2$, $h'(-2) = h'(3) = 0$, and $\lim_{x \to -\infty} h'(x) = \infty$

$h'(x) > 0$ when; $-4 < x < -2$, and when $-2 < x < 3$,

$h'(x) < 0$ when $x < -4$, and when $x > 3$,

$h''(x) < 0$ when $x < -4$, when $-4 < x < -2$, and when $0 < x < 5$,

$h''(x) > 0$ when $-2 < x < 0$, and when $x > 5$,

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$ and $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -2$

Figura 4. Pregunta 7 en la entrevista de la investigación de Asiala et al. (1997).

Los resultados de la investigación realizada por Asiala y sus colaboradores indicaron que los estudiantes que habían seguido el curso experimental (el cual enfatizaba la relación entre lo gráfico y lo analítico, y cuyo diseño instruccional tomó en cuenta al análisis a priori de la forma en que se suponía que se construía el conocimiento) tuvieron más éxito que los que habían seguido los cursos tradicionales. Asimismo, que un énfasis en la enseñanza sobre la *coordinación* entre los modos de representación gráfico y analítico, así como sobre la relación explícita entre los significados gráficos de la función y los correspondientes a la derivada, ayudan a que los estudiantes lleguen a coordinar los dos modos de representación.

Este tipo de trabajo apoya la hipótesis de que una enseñanza dirigida a la generación de mecanismos de construcción del conocimiento, como la coordinación entre los modos de representación, que ofrece una manera de entender la encapsulación de los procesos en objetos –el *modelo de construcción del conocimiento explícito*– coadyuva a la elaboración del significado que pueden hacer los alumnos (Gavilán, 2005; Gavilán, García y Llinares, 2007).

Ahora bien, los resultados también plantean cómo caracterizar el proceso de construcción tocante a la comprensión del concepto de derivada. Buscar una caracterización del *proceso de construcción* (desarrollo) va más allá de referir simplemente las características de determinadas formas de conocer los conceptos en un momento determinado. Para abordar la problemática del desarrollo del concepto y, por tanto, de los mecanismos para construir el conocimiento, se ha tenido en cuenta el modelo de cognición descrito por Piaget & García (1983, 1989). Los resultados sobre este aspecto serán comentados en el apartado que concierne al desarrollo del esquema.

Font (2000a) ha planteado la cuestión de diseñar una enseñanza dirigida a que los alumnos puedan coordinar los diferentes sistemas de representación, asumiendo que dicho enlace es una prueba de la comprensión. La investigación de Font parte de la hipótesis de que el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como un proceso en que se ha de considerar a tres subprocesos donde intervienen diferentes modos de representación:

- Traducciones entre distintas formas ostensivas de representar $f(x)$.
- El paso de una forma de representación ostensiva de $f(x)$ a una de $f'(x)$.
- Traducciones entre las distintas formas ostensivas de representar $f'(x)$.

El término *ostensivo* es usado en el sentido de que se puede mostrar a otro directamente. Por *representación ostensiva* se entiende, a manera de ejemplo, la fórmula de la función que el profesor escribe en la pizarra y el alumno ve directamente.

Font (2000a) diseñó una unidad didáctica para alumnos de tercer año de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP), cuyas edades eran de 15 y 16 años, y primer año de Bachillerato Científico Tecnológico (jóvenes 16 y 17 años), con actividades donde el estudiante debía realizar alguno de los tres subprocesos, como una forma de modelizar los mecanismos de coordinación mentales entre los diferentes modos de representación. Como *representaciones ostensivas* puso a la expresión simbólica y gráfica, la tabla y la descripción verbal de la situación.

La secuencia de actividades tenía como fin calcular la función derivada con el uso de los procedimientos *límite del cociente incremental*, *pendiente de la tangente* y *tabla*, que se valen de los procedimientos ostensivos de *expresión simbólica*, *gráficos* y *tablas*. El análisis de los resultados no sólo puso de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos con los conocimientos previos (en este caso los de función, traducción entre diferentes representaciones de una función, variación de una función, pendiente, tasa de variación media, velocidad), sino también que la definición de función derivada $f'(x)$ –como límite del cociente incremental y como pendiente de la tangente– presenta una complejidad semiótica considerable. En cambio, la introducción de la derivada a partir de una tabla resultó más fácil de entender.

Los resultados del estudio muestran que, si se combinan en la enseñanza del concepto de derivada las tres aproximaciones citadas (como límite del cociente incremental, como pendiente de la recta tangente y como tabla de valores), se facilita la comprensión del estudiante.

5. LO LOCAL Y LO GLOBAL: LA RELACIÓN ENTRE LA DERIVADA EN UN PUNTO $f´(a)$ Y LA FUNCIÓN DERIVADA $f´(x)$

Otro aspecto importante en la comprensión de la derivada es la relación entre el aspecto local y global dado en un punto $f'(a)$ y la idea de función derivada $f'(x)$, que permite pasar de una perspectiva puntual a una global, en intervalos. El estudio que hizo Badillo (2003) dio a conocer la existencia de diferentes significados de la idea de derivada en un punto y de la función derivada. La comprensión gráfica de $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$, resultó ser difícil, ya que se identificaron algunas inconsistencias como las siguientes:

- La confusión entre la derivada en un punto $x=a, f'(a)$ y la función derivada, $f'(x)$.
- La reducción de la expresión simbólica de $f'(x)$ a la ecuación de la recta tangente, y la gráfica de $f'(x)$ a la de la recta tangente
- Las no justificaciones sobre el uso de las técnicas de derivación directas e indirectas (definición en término de límite y las reglas de derivación)

Los resultados del trabajo de Badillo señalaron que comprender la idea de función derivada en un punto, $f'(a)$, no implicaba comprender la idea de función derivada $f'(x)$. Sin embargo, aquellos sujetos que comprendían la idea de función derivada, $f'(x)$, parecía que entendían la de derivada de la función en un punto $f'(a)$.

La complejidad del concepto de derivada llevó a esta investigadora a reparar en que la comprensión del esquema de la derivada conlleva la tocante a la relación entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada). Sin embargo, tal vínculo no ha sido ampliamente estudiado hasta estos momentos, por lo cual se plantean interrogantes acerca de cómo las diferentes aproximaciones que pueden ser enfatizadas en la enseñanza pueden determinar el entendimiento de dicha relación, así como el papel que cumplen los diferentes modos de representación para favorecer la comprensión de la relación entre local y lo global en el desarrollo de la comprensión del esquema de derivada.

6. EL DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN DEL ESQUEMA DE DERIVADA

Otro aspecto que se necesita tomar en cuenta para la comprensión del concepto de derivada es atender a su desarrollo desde la idea de esquema (Trigueros, 2004). La teoría piagetiana sobre el desarrollo de un esquema ha sido empleada recientemente para tal fin (Baker et al., 2000; Cooley, Trigueros & Baker, 2007; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006). En la aproximación al desarrollo de un esquema (Piaget & García, 1983, 1989) a través de las fases *intra*, *inter* y *trans* un esquema se define como:

> La estructura matemática formada por las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de un problema.

Para Piaget, la abstracción reflexiva se lleva a cabo mediante actividades físicas o mentales del sujeto que constan de dos partes, necesariamente asociadas: *la proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento* y *la reorganización y reconstrucción de aquel conocimiento para formar nuevas estructuras*. Piaget & García (1983, 1989) caracterizan a las tres fases en el desarrollo de un esquema del siguiente modo:

- *Intra*. "Lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse"

  (p. 163).
- *Inter*. "Una vez comprendida una operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones.

Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos" (p. 165).

- *Trans*. "En función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de estructuras" (p. 167).

El análisis sobre el desarrollo de la comprensión gráfica de la conexión entre una función y su derivada, siguiendo esta aproximación piagetiana, lo han realizado Baker et al. (2000) y Cooley et al. (2007). Uno de los ítems en la investigación de Baker y colaboradores pedía a los estudiantes que esbozaran la gráfica de una función cuando se proporcionan algunas de sus propiedades (en la primera y segunda derivada, límites y continuidad) en intervalos específicos de su dominio de manera analítica (Figura 5).

Sketch a graph of a function *h* that satisfies the following conditions:
h is continuous;
$h(0) = 2$, $h'(-2) = h'(3) = 0$, and $\lim_{x\to 0} h'(x) = \infty$;
$h'(x) > 0$ when $-4 < x < -2$ and when $-2 < x < 3$;
$h'(x) < 0$ when $x < -4$ and when $x > 3$;
$h''(x) < 0$ when $x < -4$, when $-4 < x < -2$, and when $0 < x < 5$;
$h''(x) > 0$ when $-2 < x < 0$ and when $x > 5$;
$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \infty$ and $\lim_{x\to -\infty} h(x) = -2$.

Figura 5. Item de la investigación de Baker et al. (2000).

El análisis de las respuestas permitió determinar que el esquema gráfico del cálculo varía de una persona a otra y puede evolucionar por caminos diferentes; sin embargo, cada esquema personal pasa de algún modo por los mismos niveles de desarrollo que describe el modelo de Piaget & García.

Según estos investigadores, el *esquema gráfico* para un estudiante se caracteriza por una combinación de conceptos del cálculo como la derivada, los límites, la continuidad e ideas de precálculo comprendidas en diferentes niveles de desarrollo. De ahí, conjeturaron que el *esquema de cálculo gráfico* lo formaban dos esquemas que nombraron como *propiedad* e *intervalo*, lo cual permitía subrayar los diferentes niveles que tenían los estudiantes para coordinar, por un lado, las propiedades del gráfico dadas por condiciones analíticas; por otro, para los diferentes niveles de los estudiantes para ligar una propiedad gráfica a través de intervalos contiguos. Baker et al. (2000) señalan varios aspectos que constantemente provocaron dificultades a los estudiantes, y ayudaban a explicar algunos de los resultados:

- La existencia de puntos cúspide en la grafica de la función (y su derivada).
- La existencia de una tangente vertical y el significado asociado.
- La supresión de la condición previa de continuidad, que permitía determinar los limites de aplicación de los conceptos.

Los resultados que arrojó la investigación de Baker y sus colaboradores indicaron que un número significativo de alumnos tenía una comprensión muy limitada de la segunda derivada; otros trabajaron sólo a partir de la memorización, mientras algunos fueron incapaces de coordinar las condiciones de la primera y la segunda derivada, lo cual puso de manifiesto que no consideraban a las derivadas como funciones. Esto llevó a Baker y sus colaboradores a afirmar que los estudiantes necesitan concebir a la primera derivada en sí misma como una función para entender la importancia de la segunda derivada.

Para explicar el desarrollo del esquema de derivada con la perspectiva piagetina de los niveles *intra*, *inter* y *trans*, en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004) se aplicó un cuestionario y se entrevistaron a estudiantes de tres niveles educativos: 50 de primero de bachillerato (16-17 años), 50 de segundo año de bachillerato (17-18 años) y 50 de primer año de licenciatura en Matemáticas. Con el fin de interpretar la manera en que los alumnos resolvían los problemas y justificaban sus decisiones se distinguieron los elementos matemáticos de la noción de derivada, considerando los modos de representación (analítico/gráfico) y el carácter tanto puntual ($x = a$) como global (intervalo).

Asimismo, para determinar la coordinación entre los diferentes elementos matemáticos se identificaron tres tipos de relaciones lógicas que caracterizaban las *operaciones cognitivas* que los estudiantes podían estar aplicando durante la resolución de los problemas (transformaciones, coordinaciones y síntesis que conllevan a la construcción de las estructuras cognitivas). De esta manera, los niveles de desarrollo del esquema de derivada se caracterizaron tomando en cuenta a las relaciones lógicas que podían establecerse entre los elementos matemáticos que conformaban el esquema (la manera de hacer efectiva la coordinación de elementos) y en función del uso que hacían de ellos los alumnos al solucionar los problemas. Esta caracterización es una manera de entender al *desarrollo* como *coordinación* de la información que posee el estudiante al intentar resolver un problema.

Los resultados del trabajo realizado por Sánchez-Matamoros apuntan que el desarrollo del esquema de derivada no es algo que esté necesariamente vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto, sino ser capaces de coordinarlos al resolver problemas. En términos piagetianos, significa deducir *operaciones cognitivas* a partir de las iniciales, o coordinar dichas operaciones para hacer sistemas cognitivos más complejos. Ahora bien, los alumnos de primer año de licenciatura en Matemáticas podían conocer más elementos del esquema de derivada que los de bachillerato. Sin embargo, un número importante de ellos sólo eran capaces de usar los elementos matemáticos de manera aislada, o de relacionar un número limitado para obtener información para resolver el problema.

Al caracterizar el desarrollo de la comprensión mediante las relaciones lógicas que se constituían entre los elementos matemáticos para obtener información pertinente en la resolución de problemas, los resultados de Sánchez-Matamoros subrayaron que, al cabo de tres años de enseñanza de la derivada, el 31% de los estudiantes no eran capaces de ir más allá de recordar de manera aislada o relacionar algunos elementos.

Sin embargo, dicha investigación puso de manifiesto que había una construcción progresiva del esquema y que se presentaba cierta influencia de los modos de representación al establecer las relaciones lógicas, o al ocupar los elementos matemáticos necesarios en determinadas situaciones (es decir, en la coordinación cognitiva). En tal contexto, la *síntesis* de la información gráfica y analítica fue considerada como característica del nivel *trans* de desarrollo del esquema de la derivada. Además, con las respuestas que dieron los estudiantes situados en el nivel *trans* se tuvo evidencia sobre la tematización del esquema de derivada cuando eran capaces de trasladar las relaciones entre una función y su derivada a las concernientes entre la función derivada y la derivada segunda, y hacían uso de ello para tomar decisiones en la resolución de problemas (Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006).

En tal sentido, los resultados del estudio hecho por Sánchez-Matamoros (2004) parecen corroborar la conjetura formulada por Baker et al. (2000), al mostrar que los alumnos que estaban situados en el nivel *trans* de desarrollo del esquema de la derivada, y eran capaces de trasladar las relaciones entre f y f' al par de funciones (f', f''), tenían un comportamiento en la resolución de determinados problemas que podía ser interpretado en el sentido de que habían tematizado el esquema de derivada. Tanto en la investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2006) como en la de Baker et al. (2000) se pone de relieve que hay una construcción progresiva del esquema y que los modos de representación influyen en la constitución de los mecanismos de transición de un nivel al siguiente.

7. La aplicación del concepto de derivada: el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena

Los libros de cálculo que introducen el concepto de derivada, como el capítulo cinco de *Análisis matemático*, de Apóstol (1982), inicia con la definición de derivada, sigue con las relaciones entre derivada y continuidad y finaliza con el álgebra de derivadas y una aplicación importante de esta noción concepto: *la regla de la cadena*.

Algunas investigaciones, como la de Clark et al. (1997), se han centrado en las aplicaciones de la derivada, con fundamento en el marco teórico de APOE. Clark y sus colaboradores supusieron el desarrollo del esquema de la regla de la cadena a través de los niveles *intra*, *inter* y *trans*. En su estudio participaron 41 alumnos que al menos habían completado dos semestres de cálculo en una variable; ellos cursaban las carreras de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias, de cuales 17 habían tomado un curso experimental y los 24 restantes un curso con un método estándar.

Estos investigadores llevaron a cabo una descomposición genética inicial del concepto de la regla de la cadena, a la que concibieron como la descripción de una *trayectoria hipotética del aprendizaje* por la cual puede transitar un estudiante en el aprendizaje del concepto; además, entrevistaron a los estudiantes sobre diferentes tareas (Figura 6).

1. **Let f be the function given by $f(x) = (1-4x^3)^2$. Compute f'.**
2. **Can you think of another way of doing this problem?**
3. **Can you be sure that two methods will always give the same answer? Explain.**
4. **Let F be the function given by $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt$. Compute F'. Explain what you did.**
5. **Why is the chain rule true?**

9. **Let A be a real number. Given that the following relation defines a function, $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = A$, find its derivative.**
10. **A ladder A feet long is leaning against a wall, but sliding away from the wall at the rate of 4 ft/sec. Find a formula for the rate at which the top of the ladder is moving down the wall.**

Figura 6. Tareas presentadas en la entrevista de la investigación de Clark et al. (1997).

Así, en la tarea 1 el alumno tenía que derivar $(1-4x^3)^2$ de dos formas y comparar los dos métodos. En la tarea 4 se daba $F(x)$ como la integral entre 0 y $senx$ de e^{t^2} y se pedía completar F'. La tarea 5 preguntaba por qué la regla de la cadena era cierta; la 9 inquiría sobre la diferenciación implícita y la 10 sobre razones. El análisis de la resolución en las diez tareas permitió a los investigadores obtener información acerca de la comprensión que tenían los estudiantes del esquema de la regla de la cadena.

Ahora bien, el análisis de las respuestas que formularon los alumnos hizo posible que Clark y sus colaboradores propusieran una descomposición genética revisada:

- En el nivel *intra* los alumnos tienen una colección de reglas para encontrar derivadas, que incluye algunos casos especiales, pero no han reconocido los vínculos entre ellas.
- El segundo nivel de desarrollo, el *inter*, se encuentra caracterizado por la habilidad del estudiante para ver todos los casos diferentes y distingue que en algunas ocasiones están relacionados.
- En el nivel *trans*, el alumno debe construir la estructura de la regla de la cadena; vincular la composición o descomposición de funciones a la diferenciación, así como hacer que los elementos del esquema se muevan desde sus descripciones, realizadas de manera esencial por una lista, a su descripción mediante una regla simple. Asimismo, los estudiantes conjeturan que un esquema maduro de la regla de la cadena depende estrechamente del esquema de función del individuo.

La comprensión de la derivada conlleva su uso en distintas aplicaciones, entre las que destaca la regla de la cadena. Como podemos inferir del trabajo realizado por Clark y sus colaboradores, la construcción que el estudiante hace de esta aplicación puede seguir unas pautas. La descomposición genética ofrece una aportación que se requiere atender en las decisiones instruccionales que tomen los profesores.

8. CONCLUSIONES

La información de los trabajos que hemos citado, en forma conjunta, ahondan en dos ámbitos que conciernen a la manera como los estudiantes llegan a entender el concepto de derivada:

- Las características de los significados del concepto de derivada que elaboran
- El desarrollo de tales significados

Respecto al primer ámbito, se ha mostrado la influencia que tienen los contextos, ya que los estudiantes no conectan automáticamente un proceso vinculado con la idea de derivada (razón, límite, función, etc.) dado en un contexto con el mismo proceso que aparece en otro contexto. Un ejemplo es la confusión de la velocidad media con la instantánea en un punto (Azcárate, 1990). En este sentido, se aboga por la idea de que se alcanzará una comprensión completa de la derivada cuando se reconozcan y reconstruyan los significados de razón, límite y función en diferentes contextos (Zandieh, 2000; Zandieh & Knapp, 2006).

Asimismo, los modos de representación gráfico y analítico influyen en la construcción de los significados que hacen los alumnos, debido a que los pueden considerar como separados al aplicar algoritmos sin relación (Ferrini-Mundi & Graham, 1994). En este sentido, se han identificado dificultades en la comprensión de la diferenciación y en la gráfica asociada al cociente incremental (Orton, 1983), así como en dotar de significado gráfico a la derivada de la función en un punto $(f'(a))$, al confundirla con la ordenada $(f(a))$, de acuerdo con Azcárate (1990). Las dificultades para relacionar los modos gráfico, numérico y analítico se manifiestan en contextos gráficos, cuando los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997). Habre & Abboud (2006) dicen que quizá es consecuencia de que las definiciones matemáticas son tradicionalmente analíticas, lo cual genera un obstáculo en las mentes de los alumnos.

Por otra parte, el comportamiento de los estudiantes frente a aspectos característicos de las funciones como la existencia de puntos cúspides, tangentes verticales y cambios en las condiciones de continuidad, al igual que la relación entre la primera y la segunda derivada, permite discriminar aspectos de la comprensión construida (Baker et al., 2000). En cuanto a tal punto, la instrucción que se basa en las traslaciones entre distintos modos de representación (Font, 2000a) y potencia el estudio de la idea de variación desde contextos numéricos parece ayudar a la construcción del significado de la derivada. De esta manera, se empieza a argumentar que la introducción al cálculo diferencial a través de la variación del movimiento debería desarrollarse en un contexto numérico, y el aspecto gráfico se complementaría con el uso de dispositivos tecnológicos, como la calculadora gráfica. (Sánchez y Molina, 2006).

Harel et al. (2006) señalan que la tendencia de muchos estudiantes a recordar parte de sus *concepto imagen* en lugar de la definición al resolver tareas matemáticas no es necesariamente malo. Afirman que una de las formas de instrucción que enriquece el *concepto imagen* de los alumnos es ayudarlos a adquirir la habilidad para visualizar los conceptos matemáticos. Sin embargo, Mamona-Downs & Downs (2002) precisan que, si bien los múltiples *concepto imagen* para una misma noción matemática pueden ser de ayuda a una persona, también pueden crear factores potenciales de conflicto entre ellos.

En cuanto al segundo ámbito, las investigaciones señalan que, en primer lugar, el desarrollo de los significados de la derivada está vinculado a la integración de los significados de la derivada en un punto $(f'(a))$ y la función derivada $(f'(x))$, como dice Badillo (2003), al igual que a las conexiones entre los modos gráfico y analítico (Asiala et al., 1997). Por su parte, el trabajo de Baker et al. (2000) sugiere que el esquema de *cálculo gráfico* consta de dos esquemas: la *propiedad* y el *intervalo* que permitía subrayar, por un lado, los diferentes niveles que alcanzan los estudiantes para coordinar las propiedades del gráfico, dadas por condiciones analíticas; por otro, los diferentes niveles logrados para enlazar una propiedad gráfica a través de intervalos contiguos.

El análisis de Sánchez-Matamoros (2004) reveló que había una construcción progresiva del esquema de derivada, y que los modos de representación influían para instaurar relaciones lógicas entre los elementos matemáticos durante la resolución de problemas, o bien para hacer uso de los elementos matemáticos necesarios en determinadas situaciones. Los dos aspectos llevaron a introducir subniveles en la caracterización del desarrollo del esquema de derivada, visto desde la aproximación teórica que ofrece el modelo APOE.

Una característica importante en el desarrollo de la comprensión es la idea de *síntesis* de la información gráfica y analítica en el nivel *trans*. Además, en tal nivel se tuvo evidencia sobre la tematización del esquema de derivada cuando, en la resolución de problemas, los alumnos eran capaces de trasladar las relaciones entre una función y su derivada a las concernientes entre la función derivada y la función derivada segunda, ocupando esto para tomar decisiones.

Los dos ámbitos que se identificaron en la comprensión de la derivada, las características del significado construido y el desarrollo del esquema de derivada permiten compartir con Harel et al. (2006) la idea de que una de las formas para empezar a conocer un concepto es: a través de conexiones con otros conceptos (límites o funciones, en el caso de la derivada); a través de los diversos modos de representación (el gráfico y el analítico en la derivada) y a través de conocer sus diferentes propiedades y procesos. Esta inferencia desde las investigaciones apoya el desarrollo de aproximaciones sistémicas al estudio de la comprensión y uso de todo lo relativo a la cuantificación del cambio relacional (Cantoral y Farfán, 1998).

Aún existen aspectos en los que se deben centrar las investigaciones, tomando en cuenta la complejidad que representa la derivada, lo cual ha hecho que el estudio sobre su comprensión haya sido abordado desde distintas perspectivas. Entre ellas, destaca la teoría del desarrollo de un esquema, formulada por Piaget (a través de los niveles intra, inter, trans), de la que se han hecho distintas adaptaciones que contemplan particularidades o especificidades (Baker et al., 2000; Clark et al., 1997; Cooley et al., 2007; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006).

Hemos podido detectar tres ámbitos en que se desarrolla la comprensión de la noción de derivada. El primero ocurre en la relación entre los conceptos básicos de razón de cambio y cociente incremental, que dan forma a la derivada de una función en un punto; el segundo en los sistemas de representación, cuya integración origina una dimensión necesaria para el desarrollo de la comprensión; el tercero en la relación entre la derivada de una función en un punto y la función derivada y el operador derivada.

En este sentido, la aproximación socioepistemológica permite introducir el estudio del lenguaje variacional desde perspectivas sistémicas. Si bien la adquisición de un concepto toma relevancia en todos los niveles de matemática educativa, lo es especialmente en Pensamiento Matemático Avanzado, donde un número significativo de *ideas* deben ser consideradas necesariamente de manera conjunta para interpretar una presentación formal.

Existe la creencia de que la toma de decisiones curriculares en la política educativa, así como las instruccionales que realizan los profesores, deberían basarse, entre otras cosas, en los resultados de investigaciones. La revisión que expusimos en este artículo busca aportar una información útil, la cual debe ir completándose y ampliándose con los estudios que aborden las nuevas líneas de investigación identificadas, cuyo objetivo radica en aumentar nuestra comprensión de cómo los alumnos de secundaria y primeros años de universidad dotan de significado y usan el concepto de derivada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior 16* (4), 399-431.

Aspinwall, L.; Shaw, K. L. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics 33* (3), 301-317.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis de doctorado, Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia.* Tesis de doctorado no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona.

Baker, B.; Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education 31* (5), 557-578.

Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73-80). Hiroshima, Japan.

Camacho, M. & Depool, R. (2002). Using derive to understand the concept of definite integral. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, 1-16.

Camacho, M. y Depool, R. (2003). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) Derive. *Educación Matemática 15* (3), 119-140.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353-369.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53* (3), 255-270.

Cantoral, R. & Ferrari, M. (2004). Uno studo socioepistemologico della previsione. *La Matematica e la sua Didattica 2*, 33-70.

Cantoral, R.; Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp. 463-468). México: Clame.

Cantoral, R.; Sánchez, M. y Molina, J. (2007). Aspectos numéricos y gráficos de la derivada de orden superior. En C. Crespo, P. Lestón. T. Ochoviet y C. Oropeza (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 20, pp. 554-559). México: Clame.

Clark, J. M.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; DeVries, D. J.; St. John, D.; Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior 14* (4), 345-364.

Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E.; Nicholls, J.; Wheatley, G.; Trigatti, B. & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem centered second grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (1), pp. 3-29.

Cooley, L.; Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education 38* (4), 370-392.

Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols, D.; Schwingendorf, K.; Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *The Journal* *for Mathematical Behavior 15*, 167-192.

D' Amore, B. (2006). Objeto, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Número Especial), 177-195.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemáticas Educativas II* (pp. 257-272). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Holland: Kluwer Academia Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática 8* (3), 24-41.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de *límite de función*: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias 18* (3), 355-368.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. In E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning. MMA Notes 33* (pp. 31-45). Washington, DC: MMA.

Font, V. (2000a). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada.* Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2000b). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de f'(x). El caso de la función seno. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas 25,* 21-40.

García, M. y Llinares, S. (1996). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurrículum 10-11*, 103-115.

Gavilán, J. M. (2005*). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Gavilán, J. M.; García, M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias 25* (2), 157-170.

Habre, S. & Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior 25* (1), 57-72.

Harel, G.; Selden, A. & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp.147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London, England: John Murray.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago, USA: University of Chicago.

Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research 60* (1), 1-64.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2002). Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 165-195). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Montiel, G. (2005a). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (2), 219-235.

Montiel, G. (2005b). Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp.667-672). México: Clame.

Ordóñez, A. y Buendía, G. (2007). Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas. En C. Crespo, P. Lestón. T. Ochoviet y C. Oropeza (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 20, pp. 427-431). México: Clame.

Orton, A. (1983). Student's understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics 14* (3), 235-250.

Piaget, J. y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores.

Porzio, D. T. (1997). Effects of different instructional approaches on calculus student's understanding of the relationship between slope, rate of change and the first derivate. In John A. Dossey, Jane O. Swafford, Mariyln Parmantie & Anne E. Dossey (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volume 2, pp. 37-44). Bloomington-Normal, Chicago, Illinois: Illinois State University.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics 42* (3), 237-268.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Sánchez-Matamoros, G.; García, G.; García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias 24* (1), 85-98.

Sánchez, M. y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 19, pp. 739-744). México: Clame.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22* (1), 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification- the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept function: aspects of epistemology and pedagogy* (volume 25, pp. 59-84). Washington, DC: MAA.

Sierra Vázquez, M.; González Astudillo, M. T. y López Esteban, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y COU: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias 17* (3), 463-476.

Tall, D. (1989). Concept image, generic organizers, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics 9* (3), 37-42.

Tall, D. & Vinner, Sh. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151-169.

Trigueros, M. (2004). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17* (1), 5-31.

Zandieth, M. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivate.* Tesis de doctorado, Oregon State University.

Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In E. Dubinsky, A. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics Education* (volume 8, pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society.

Zandieth, M. & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning. The concept of derivative as an example. *Journal of Mathematical Behavior 25*, 1-17.

Autores

Gloria Sánchez-Matamoros. I.E.S. “Andrés Benítez”, Jerez de la Frontera-España, España; gloriasanchezmg@yahoo.es

Mercedes García. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sevilla, Sevilla, España; mgblanco@us.es

Salvador Llinares. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante, Alicante, España; sllinares@ua.es