

VALÉRIA ESPÍNDOLA LESSA, ADRIANO CANABARRO TEIXEIRA

ESPIRAL DA CONCEITUAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE O CAMPO CONCEITUAL DAS FUNÇÕES AFIM E A PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES

SPIRAL OF CONCEPTUALIZATION: A STUDY ON THE CONCEPTUAL FIELD
OF AFFINE FUNCTIONS AND COMPUTER PROGRAMMING

RESUMEN

En este artículo presentamos un estudio que ha objetivado averiguar los procesos de representaciones y la comprensión de invariables operatorias del Campo Conceptual de las Funciones Afines de dos estudiantes de la Carrera Técnica en Informática del IFRS, Campus Erechim, por medio de la programación de computadoras. Los referentes teóricos están puestos en la Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud y en la Teoría Construccionalista de Seymour Papert y sus aportadores. Los datos de esta investigación han sido producidos a través de la realización, por los estudiantes, de situaciones sobre Funciones Afines con el ambiente Scratch, junto al método de observación interactiva. Como resultados, la investigación ha apuntado hacia la concretización y dinamización del concepto de la tasa de variación constante, además de aportar en la elaboración de la Espiral Conceptual.

PALABRAS CLAVE:

- *Funciones afines*
- *Programación de computadoras*
- *Invariables operatorias*
- *Representaciones*
- *Comprensiones*

ABSTRACT

In this article we present a study that aimed to investigate the processes of representation and understanding of operative invariants of the Conceptual Field of Affine Functions of two students of the Technical Course in Informatics of IFRS, Campus Erechim, through computer programming. The theoretical framework was based on the Conceptual Fields Theory of Gérard Vergnaud and the Constructionist Theory of Seymour Papert and collaborators. The research data were produced through the realization, by the students, of situations about Affine Functions with the Scratch environment, associated with the interactive observation method. As results, the research pointed to the concretization and dynamization of the concept of constant rate of change, besides enabling the elaboration of the Spiral of Conceptualization.

KEY WORDS:

- *Affine functions*
- *Computer programming*
- *Operative invariants*
- *Representations*
- *Comprehensions*



RESUMO

Neste artigo apresentamos um estudo que objetivou investigar os processos de representação e de compreensão de invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim de dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS, Campus Erechim, por meio da programação de computadores. O referencial teórico foi embasado na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e na Teoria Construcionista de Seymour Papert e colaboradores. Os dados da pesquisa foram produzidos mediante a realização, pelos estudantes, de situações sobre Funções Afim com o ambiente Scratch, associado ao método da observação interativa. Como resultados, a pesquisa apontou para a concretização e dinamização do conceito de taxa de variação constante, além de possibilitar a elaboração da Espiral da Conceitualização.

PALAVRAS CHAVE:

- *Funções afim*
- *Programação de computadores*
- *Invariantes operatórios*
- *Representações*
- *Compreensões*

RÉSUMÉ

Dans cet article nous présentons une étude qui avait pour but d'investiguer les processus de représentation et de compréhension des invariants opératoires du Champ Conceptuel des Fonctions Affines de deux étudiants du Cours Technique d'Informatique de l'IFRS, Campus Erechim, à travers la programmation informatique. Le cadre théorique était basé sur la Théorie des Champs Conceptuels de Gérard Vergnaud et la Théorie Constructiviste de Seymour Papert et collaborateurs. Les données de recherche ont été produites par la réalisation, par les élèves, de situations sur les fonctions affines avec l'environnement Scratch, associé à la méthode d'observation interactive. Comme résultats, la recherche a indiqué la concrétisation et la dynamisation du concept de taux constant de changement, en plus de permettre l'élaboration de la Spirale de Conceptualisation.

MOTS CLÉS:

- *Fonctions affines*
- *Programmation informatique*
- *Invariants opératoires*
- *Représentations*
- *Compréhensions*

1. INTRODUÇÃO

O presente artigo é fruto de uma investigação desenvolvida no Grupo de Pesquisa em Cultura Digital na Educação (GEPID) da Universidade de Passo Fundo (UPF) que, em linhas gerais, tem preocupações com os processos pedagógicos no contexto da cultura digital e da informática educativa. O objeto de investigação foi produzido a partir da articulação da Teoria dos Campos Conceituais (TCC),

do conteúdo matemático das Funções Afim, da importância e relevância dos conceitos e raciocínios à formação matemática do estudante da escola básica e da programação de computadores como recurso tecnológico e pedagógico do processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, temos o interesse em conhecer as possibilidades que a programação de computadores pode trazer ao professor de Matemática da escola básica em relação às manifestações conceituais dos estudantes, não apenas como um recurso avaliativo no sentido de verificação (se conseguiu fazer a programação correta), mas no sentido de mediação que visa a troca de ideias entre e com seus estudantes, num movimento de construção do conhecimento.

Para a construção do problema de pesquisa, realizamos uma revisão de literatura a partir do mapeamento de teses e dissertações, produzidas entre os anos de 2006 e 2017, que abordassem a TCC como referencial teórico, associada ao conteúdo matemático de Funções e que envolvessem o recurso tecnológico da programação de computadores. Nesse estudo, encontramos apenas um trabalho, a dissertação de mestrado de Ventorini (2015), que além de trazer importantes contribuições para a área, possibilitou encontrarmos lacunas e possibilidades para novas investigações (os detalhes metodológicos da revisão de literatura podem ser encontrados em Lessa (2017)).

Diante disso, o problema de pesquisa constitui-se da seguinte forma: Como se manifestam os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim em dois estudantes do Curso Técnico em Informática do IFRS – *campus* Erechim a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores?

Para tanto, objetivamos investigar os teoremas em ação manifestados pelos estudantes no ambiente de programação de modo a reconhecer os processos de representação e de compreensão dos invariantes operatórios. Nos tópicos que seguem, apresentamos o referencial teórico, a metodologia empregada e os resultados obtidos.

2. O CAMPO CONCEITUAL DAS FUNÇÕES AFIM

Um campo conceitual, segundo a TCC de Gérard Vergnaud, constitui-se a partir de um conjunto de *situações* que o sujeito é confrontado em sua vida, um conjunto de *invariantes operatórios*, conhecimentos em ação (conceitos em ação e teoremas em ação) que permitem a compreensão das situações e a resolução destas e um conjunto de *representações*, que permitem dar formas simbólicas às ideias.

Invariantes operatórios, são os conhecimentos que os sujeitos põem em ação durante a atividade e podem ser conceitos em ação ou teoremas em ação. Os teoremas em ação, para Vergnaud (2014), são invariantes operatórios de tipo lógico das proposições, no sentido de descreverem uma ideia, uma premissa, uma relação entre objetos e propriedades, passíveis de serem verdadeiros e falsos para a situação real dada. Já os conceitos em ação são invariantes operatórios de tipo lógico das funções proposicionais, que não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas “constituem tijolos indispensáveis à construção das proposições” (Vergnaud, 1996, p. 162).

Para exemplificar, trazemos a resolução de uma equação do 1º grau. É possível supor que, ao realizar equações do tipo $ax + b = c$, a criança tenha criado um teorema em ação na qual, numa linguagem coloquial usada por ela, pode ser traduzido como: “sempre que um número trocar de membro, troca de sinal”. Para elaborar este teorema, a criança associou conceitos e argumentos: adições, subtrações e igualdade constituem os conceitos e os valores numéricos atribuídos a “*a*”, “*b*” e “*c*” são os argumentos. No entanto, há teoremas em ação que constituem proposições verdadeiras para algumas situações e que, se forem usados em outras situações, falham. Para a equação $x + 2 = 3$, vai funcionar o teorema em ação descrito acima, pois, quando o 2 mudar de membro, trocará de sinal; já para situações do tipo $2x + 3 = 5$, funciona para o número 3 e não funciona para o número 2, pois o 2 não passa com sinal trocado, e sim com sua operação inversa. Logo, o teorema em ação é falso para esta segunda situação. Com isso, percebe-se o caráter local e não universal do teorema em ação, o que constitui a sua principal diferença se comparado aos teoremas matemáticos cientificamente comprovados e aceitos. Um teorema em ação não é, necessariamente, um teorema, entretanto, pode ser modificado e evoluir para tal. Ajudar nesta transformação é um dos papéis do ensino.

Em outro exemplo, em que crianças precisavam comparar volumes de objetos, Vergnaud (1996, pp. 160-161) diz que “o primeiro esquema mobilizado foi o da comparação das alturas”, e elas concluíram que “quanto mais alto, maior o volume”. Na situação foi utilizado o conceito de altura e, portanto, é um conceito em ação; a hipótese das crianças, de que quanto mais alto o objeto maior é o seu volume, é um teorema em ação. Este teorema é verdadeiro para as situações em que os objetos possuam a mesma base e falso para situações mais gerais, em que a base não é sempre a mesma, pois daí desconsidera que a área da base do objeto influencia no seu volume. Neste sentido, para a criança reformular e ampliar seu teorema em ação, precisará de outras situações envolvendo volume, altura e base,

a fim de compreender a relação de proporcionalidade ali envolvida: o volume é proporcional à altura e à área da base do objeto.

Conceituar ou conceitualizar, na perspectiva da TCC, significa aceder ao porquê dos esquemas e dos invariantes operatórios com o qual se enfrenta a situação (Grossi, 2017). Isso requer saber operar com tais esquemas e invariantes ao mesmo tempo que requer saber falar sobre eles. Neste sentido, a conceituação, para Vergnaud (1996, 2017), significa desenvolver duas formas distintas de conhecimento, porém complementares: a forma operatória, que permite agir em situação, que é o saber-fazer; e a forma predicativa, que permite enunciar, falar sobre os objetos e suas propriedades, que é o saber-explicar.

Uma pessoa, por exemplo, executa muito bem uma função, uma tarefa, em seu trabalho, mas, quando precisa comunicar suas ações a um colega que irá auxiliá-lo, pode não “[...] estar em condições de formular completamente o que considera verdadeiro ou razoável, da mesma forma que as palavras lhe faltam [...]” (Vergnaud, 2009, p. 18). Ainda, é possível dizer que a forma predicativa não atinge sua forma operatória e, por isso, fracassa em transmitir o seu saber-fazer.

Vergnaud (1996) apresenta a metáfora do *iceberg* da conceituação para explicar as formas com que os invariantes operatórios podem se apresentar na conceituação. Para o autor, conhecimentos explícitos constituem apenas a parte visível do *iceberg* e, na parte escondida, está a maior parte dos conhecimentos, que, por sua vez, são implícitos. No entanto, uma parte não existe sem a outra. Neste sentido, sendo o *iceberg* a representação dos invariantes “operatórios”, a operacionalidade dos conhecimentos (forma operatória) está em todo o *iceberg*, desde sua base, onde o “fazer tem prioridade sobre o dizer” (Grossi, 2017, p.9), até a parte visível e explícita, enquanto o saber-explicar (forma predicativa) só é possível a partir dos conhecimentos que já estão explícitos.

Ademais, acreditamos que nem todos os conhecimentos explícitos, representados por meio de gestos, ações, linguagens e símbolos, estão na sua forma predicativa. No exemplo que apresentei da pessoa que faz com eficiência seu trabalho, mas não consegue comunicá-lo com a mesma competência, é possível perceber explicitações de seus conhecimentos acompanhando sua atividade, pois na ação há manifestação de conhecimentos, mesmo sem uma elaboração discursiva. Assim, acreditamos que a forma predicativa é mais do que explicitar, é saber-explicar o que fez e o porquê fez quando atuou em situação. A partir dessas ideias, formulamos a Figura 1, que representa nosso entendimento deste processo de conceituação.

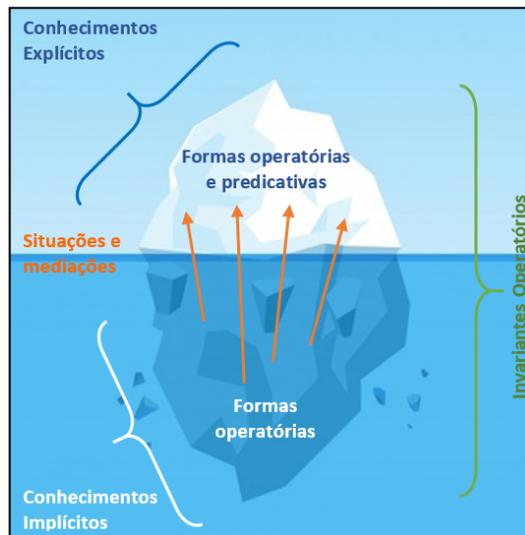


Figura 1. Iceberg da conceituação

Com efeito, a conceituação não é uma simples passagem de conhecimentos implícitos a explícitos ou da forma operatória à predicativa. Ela está no movimento, no processo que envolve situações a serem vividas, resolvidas e superadas e mediações, principalmente no âmbito escolar, porque há diferentes níveis de compreensão nos conhecimentos operatórios dos sujeitos em atividade, os quais levam a diferentes níveis de compreensão dos conhecimentos predicativos. Na experiência, no enfrentamento das situações, os níveis de compreensão se complexificam.

Para explicar o raciocínio, um sujeito pode operar com determinados conceitos, ter sucesso e explicar o que fez e como fez. Há, portanto, uma manifestação do saber-fazer e do saber-explicar. Numa próxima situação do mesmo campo conceitual, a operação realizada anteriormente pode não servir e, então, precisará encontrar outros meios de resolver ou reformular as ideias anteriores. A partir disso, haverá também a manifestação do saber-fazer e do saber-explicar com algumas diferenças, porque houve modificações nas operações empregadas e nas suas compreensões sobre o que fez.

Em síntese, há que se considerar os diferentes níveis de complexidade do conhecimento operatório e do predicativo no processo de conceituação. Segundo Muniz (2009, p. 50), o “pensar como eu pensei”, o “tomar consciência dos caminhos e descaminhos que percorreu”, são fundamentais na produção dos esquemas e dos invariantes operatórios. E é essa compreensão conceitual, no movimento da manifestação dos invariantes operatórios do campo conceitual das Funções, que interessa a essa pesquisa.

Neste sentido, consideramos que a conceituação científica de sujeitos em escolarização se dá mediante a construção de campos conceituais em que cada conceito deste campo passa por um processo de complexificação a partir dos conhecimentos operatórios e predicativos. E isso não acontece do dia para a noite. É um movimento intelectual gradativo, que depende das mediações, dos incentivos que recebe, das situações com as quais se depara e das interações que estabelece.

Para Vergnaud, na Matemática há dois campos conceituais a serem considerados: os campos das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. No entanto, não são os únicos que existem. Em uma de suas obras, o autor traz como exemplo a eletricidade que a partir de um conjunto de situações como a iluminação de uma sala, a ligação de uma lâmpada à pilha, exigem a compreensão de um conjunto de conceitos como circuito elétrico, tensão, resistência elétrica e etc. (Vergnaud, 1996).

Dessa maneira, pensamos que é possível falar em Campo Conceitual das Funções Matemáticas dentro do Campo das Estruturas Multiplicativas, ou seja, um conjunto de situações, cujo tratamento implica no uso de relações de correspondência e dependência entre variáveis, ao mesmo tempo que diversos outros conceitos são envolvidos: proporcionalidade, taxa de variação, taxa fixa, regularidade, generalização, continuidade, entre outros.

Ainda, é possível delimitarmos um conjunto de situações, cujo tratamento implica, especificamente, no uso de relações de correspondência biunívoca e de taxa de variação constante. Assim, tal conjunto pode ser compreendido como o Campo Conceitual das Funções Afim. Nesse sentido, podemos pensar no Campo Conceitual das Funções Afim como parte de um campo maior, o das Funções Polinomiais, que, por sua vez, fazem parte do Campo Conceitual das Funções.

Como já dito anteriormente, consideramos que o Campo das Funções está dentro do Campo das Estruturas Multiplicativas. Além disso, dentro do Campo das Funções Afim, temos seus diferentes tipos, como por exemplo, Função Identidade, Função Constante e Função Linear, que requerem, cada uma, um conjunto de situações específicas. Esse exercício de delimitar as Funções Afim como um campo conceitual ajuda-nos a identificar as situações que dão sentido ao conceito e, conseqüentemente, os invariantes operatórios e as representações que os estudantes deverão desenvolver nesse campo conceitual.

Independentemente do campo conceitual de interesse, a ser ensinado e aprendido, é fundamental considerar as diferentes formas de estabelecer uma situação didática, os diferentes contextos em que estas situações estão inseridas e as principais noções conceituais envolvidas. Para Vergnaud (2014), quanto mais diversificadas forem as situações, mais condições os estudantes terão de compreender o respectivo campo conceitual. Neste sentido, foi importante sistematizar os

principais invariantes operatórios que constituem o campo conceitual em questão, no sentido de servirem como categorias de análises do estudo. Isso se mostra indispensável para a pesquisa, que visa investigar as manifestações das representações e das compreensões destes elementos pelos estudantes, pois nos permite ter clareza do que olhar nas mobilizações conceituais deles durante a ação de resolver um problema.

A partir de uma análise das situações apresentadas em livros didáticos foi possível categorizar os principais invariantes operatórios associados à compreensão do conceito de Função Afim. Tais invariantes categorizados são do tipo conceitos em ação, pois não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos na situação, podendo ser úteis ou não para sua resolução e, fundamentalmente, são os conceitos que dão sustentação aos teoremas em ação elaborados pelos estudantes. Essa categorização se mostrou indispensável para a pesquisa, que visa investigar as manifestações das representações e das compreensões destes elementos pelos estudantes, pois nos permite ter clareza do que olhar nas mobilizações conceituais deles durante a ação de resolver um problema. No Quadro I apresentamos com mais detalhes os quatro invariantes operatórios categorizados.

QUADRO I
Invariantes operatórios categorizados

<i>Invariante Operatório</i>	<i>Observações</i>
Variável	Representação simbólica para grandezas que variam de acordo com a situação. Possibilitam a generalização da relação estabelecida entre as grandezas.
Taxa de variação constante	Seja a Função $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b$. Dados $x, x + h \in R$, sendo $h \neq 0$ o acréscimo (ou decréscimo) em x , o número $a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se taxa de variação da função f no intervalo de extremos $x, x + h$ (LIMA et al, 2002).
Taxa fixa	Seja a Função $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b$. O coeficiente b é o valor que a função assume quando $x = 0$, ou seja $f(0) = b$, sendo às vezes, chamado de valor inicial da função f ou taxa fixa (LIMA et al, 2002).
Correspondência biunívoca	A Função $f: A \rightarrow B$ é bijetora quando, para todo elemento $y \in B$, pode-se encontrar um único elemento $x \in A$, ou quando todo elemento $y \in B$ é imagem de apenas um elemento de $x \in A$ (DANTE, 2014).

É por meio da observação das representações que podemos inferir sobre as capacidades operatórias do estudante. No entanto, para sabermos sobre sua compreensão das noções que está operando será preciso perguntar para ele. E será por meio de suas explicações e argumentos que nós, professores e pesquisadores, teremos condições de conhecer mais sobre seus conhecimentos, portanto, investigar as mobilizações conceituais, suas representações e compreensões requer olharmos para a ação do estudante na resolução das situações propostas, nas justificativas e explicações que dá sobre suas ações. Requer identificarmos os invariantes operatórios, a fim de detectar os esquemas ineficazes e tentar auxiliar os estudantes na tarefa de transformá-los em esquemas aplicáveis. Assim, passamos, no próximo item, à discussão dos recursos tecnológicos por meio do qual o estudante pode estar manifestando suas ideias.

3. A PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES E O PROCESSO DE CONCEITUAÇÃO

Considerando os diversos ambientes tecnológicos disponíveis para o planejamento e execução das situações didáticas, principalmente em relação à Matemática, há que se pensar sobre o recurso tecnológico utilizado na pesquisa desenvolvida. Se nossa escolha é trabalhar com as Funções Afim, poderíamos utilizar softwares como o Geogebra, o *Winplot*, o *GraphEq*, o *Graphmatica*, entre outros, que se constituem ferramentas interessantes e capazes de dinamizar os objetos matemáticos pertinentes ao conteúdo.

No entanto, nos aproximamos das ideias de que o ato de escrever um algoritmo é associado à ação de “ensinar” o computador a fazer algo, seja um desenho, um cálculo, o movimento de um objeto na tela do computador ou outra coisa. E para “ensinar” é necessário dispor de conhecimentos tanto da ferramenta computacional quanto do conteúdo envolvido. Um ambiente de programação proporciona o *feedback* contínuo entre a ação do programador e resposta do *software*, e a profusão de representações dinâmicas com as quais o aluno interage e expressa suas ideias (Papert, 1985, 2008).

Para Papert (1985, 2008), programar permite a construção de micromundos, onde a criança pode criar e recriar objetos e movimentos, aplicando seus conhecimentos tanto cotidianos como científicos. Se ela deseja programar o movimento de um ponto para que desenhe um quadrado, por exemplo, precisará mobilizar conhecimentos reais sobre a figura geométrica e sobre os movimentos necessários para este ponto realizar o desenho. Na tela do computador, a criança

passa a ver o que ela mesma projetou, o que ela sabe sobre aquilo que fez e se seu programa desenhou um quadrado ou não. Isso possibilita reformular suas ideias até conseguir alcançar seu objetivo.

O processo sequencial, utilizado na elaboração de algoritmos, permite que a criança, ao testar suas hipóteses sobre a realização de um procedimento na forma de linguagem de programação, confronte imediatamente os resultados a partir do *feedback*. Este retorno imediato na tela do computador, permite a reflexão sobre a ação e, se necessário, a reformulação das hipóteses iniciais para testá-las novamente. É um processo em espiral (Valente, 2005), em que podemos perceber nas representações dos códigos, as descrições do pensamento e os diversos conhecimentos em ação.

A partir de influências piagetianas, Papert e Vergnaud associam-se à perspectiva da epistemologia genética, na qual o desenvolvimento cognitivo acontece no desequilíbrio constante das estruturas mentais dos sujeitos na interação destes com os objetos. Para Papert, o desequilíbrio se dá no processo de criação dos “micromundos” pela criança com a programação de computadores e, para Vergnaud, acontece na necessidade de resolver as situações na sua vida. Em ambos os casos, por meio de micromundos ou situações, a criança mobiliza-se em busca dos elementos que lhe faltam e, assim, aprende.

A realização de uma tarefa desafiadora por meio da programação de computadores dá indícios, a princípio, que os esquemas do estudante são desequilibrados pela situação proposta e a busca pelo reequilíbrio propicia o desenvolvimento de uma espiral de aprendizagem, na qual denominamos espiral da conceituação. Assim, elaboramos uma ilustração, representada pela Figura 2 a fim de representar a aproximação que estamos fazendo. A partir da situação (micromundo) no centro da imagem, vão se desenvolvendo os elementos da espiral em níveis de compreensão diferenciada, o que caracteriza o enriquecimento dos esquemas e dos invariantes operatórios.

Para tanto, qualquer ambiente de programação poderia ser utilizado para a realização deste estudo, desde que permita o trabalho com variáveis, a interação com o usuário e que faça cálculos matemáticos. Diante de várias opções, algumas razões nos levaram a escolha do ambiente Scratch, lançado em 2007 pelo *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). Primeiramente, porque é um ambiente gratuito, de fácil acesso aos estudantes e professores de escola pública e possui um *website* com muitas informações relevantes, tutoriais, compartilhamento das criações e a possibilidade de usar o ambiente de forma *online* ou *offline*.

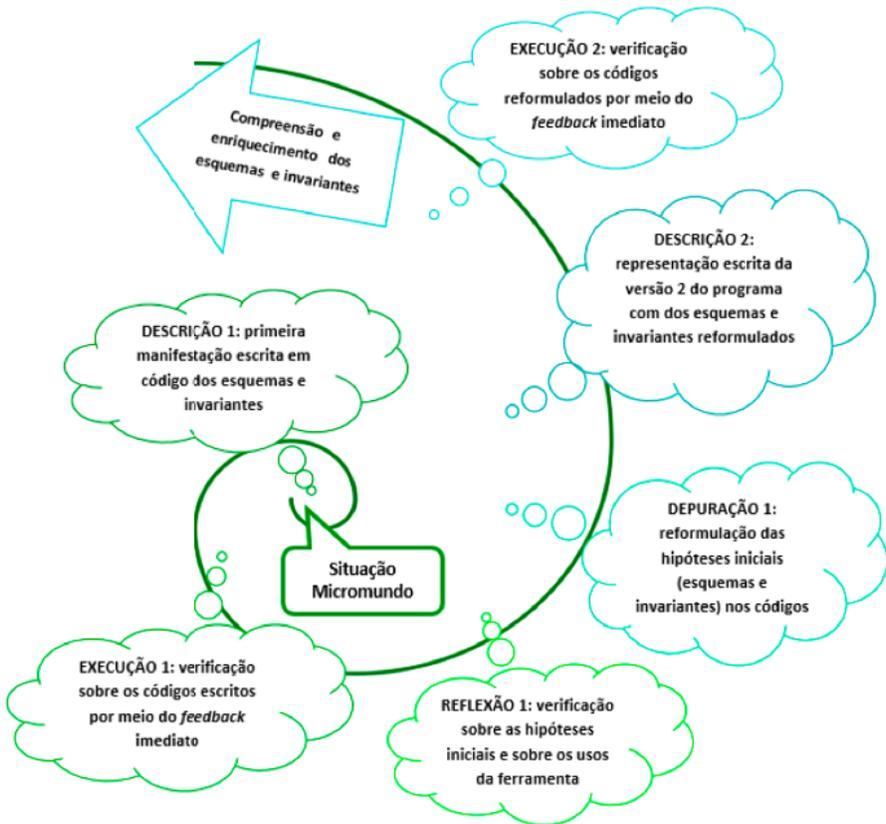


Figura 2. Espiral da Conceituação

Depois, ao comparar programações simples em alguns ambientes, percebemos que a linguagem em blocos avança no sentido da aplicabilidade para a educação em relação às linguagens de programação em texto. Segundo Marji, para se programar com as linguagens em texto, “[...] você deve dar comandos ao computador no que parece ser uma forma enigmática de inglês” (2014, p. 21), possuindo regras próprias de sintaxe, que a princípio são desafiadoras aos estudantes.

Neste sentido, programação em blocos parece favorecer a utilização da lógica de programação quando comparado a ambientes que possuem a programação baseada em texto, uma vez que os comandos estão todos visualmente disponíveis aos usuários bastando apenas “arrastar” os blocos e “montar” o algoritmo, evitando erros de sintaxe. Além disso, são ambientes cujos comandos têm tradução para a língua portuguesa, facilitando de forma considerável o trabalho com estudantes da escola básica.

A partir das características específicas dos ambientes de programação, e mais especificamente, das peculiaridades do Scratch, vemos uma grande potencialidade nas elaborações conceituais dos estudantes, quando noções são postas em ação, testadas e reformuladas. Neste sentido, nos interessamos em saber como estes processos de elaborações acontecem, como os conceitos em ação e os teoremas em ação se desenvolvem, como são representados nos códigos de programação e como são compreendidos pelos estudantes.

4. METODOLOGIA

Esta pesquisa insere-se numa perspectiva que se preocupa com o universo dos significados e com um nível de realidade que não pode ser quantificada (Minayo, 2013). Ao assumir a postura epistemológica construtivista de que o conhecimento não está nos sujeitos e nem fora deles, mas é construído nas interações estabelecidas, preocupamo-nos com o processo, com o como, o porquê e os meios com os quais os sujeitos compreendem o mundo, culminando, portanto, numa pesquisa qualitativa.

O estudo empírico da pesquisa aconteceu em três momentos, conforme sistematizado na Figura 3. Primeiramente, realizamos uma ambientação (três encontros de duas horas cada) com a turma de estudantes do terceiro semestre do Curso Técnico em Informática do IFRS – *Campus Erechim*, ingressantes em 2017, que cursavam concomitantemente a 2^a série do Ensino Médio em escola pública do município de Erechim/RS. No segundo momento, aplicamos um instrumento de diagnóstico com toda a turma que objetivou selecionar os estudantes (Alan e João, 16 anos de idade) e servir como diagnóstico dos conhecimentos destes para a próxima etapa.

O terceiro e último momento foi a etapa empírica mais importante desta pesquisa, pois a partir dela foi possível produzir o material de análise. Esse momento aconteceu em um encontro de 3h30min com cada estudante, na qual realizamos, primeiramente, uma entrevista sobre suas respostas no instrumento de diagnóstico aplicado com a turma toda na etapa anterior. O objetivo foi estabelecer um panorama do que eles sabiam sobre os conceitos matemáticos. Em seguida, realizamos a atividade no ambiente de programação, em que o estudante solucionou as situações com o Scratch e nós fizemos as intervenções sob o método da observação interativa. A transcrição desse momento gerou o protocolo diagnóstico e o protocolo Scratch que foram nossos materiais de análises.

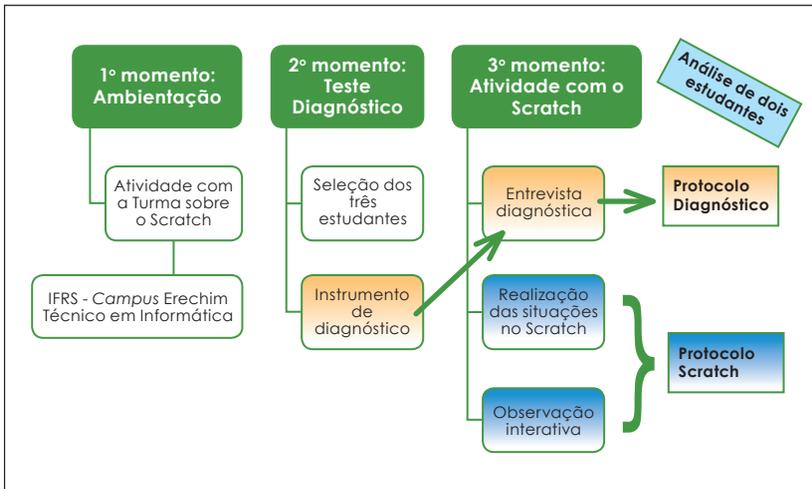


Figura 3. Etapas do método

O instrumento de diagnóstico foi constituído de três questões sobre Funções Afim e uma sobre a programação em Scratch. A primeira era uma situação de deslocamento de um corpo em função do tempo, em que a lei da função foi dada. A segunda solicitava a modelagem da Função Afim que relacionava o valor pago ao se frequentar um parque de diversões em função do número de brinquedos usados. A terceira questão informava o gráfico de uma Função Afim, os dois pontos de interseção com os eixos ordenados e solicitava a modelagem dessa função. E, por último, a questão com o Scratch solicitava que o estudante realizasse um programa de livre escolha, mas que contivesse os seguintes comandos: variáveis, o sensor pergunte e espere a resposta, operadores, movimentos e aparência.

Na entrevista diagnóstica, elaboramos roteiros de entrevista individualizados para cada estudante de modo a compreendermos melhor os seus entendimentos sobre os invariantes operatórios presentes em suas respostas. Questionamos sobre o modo de resolução apresentado, sobre o significado dos elementos matemáticos presentes nas resoluções, sobre as relações entre as questões, entre outras. O roteiro serviu como orientação para nossa intervenção, possibilitando que outras questões surgissem durante a conversa.

As situações com o Scratch foram elaboradas com o objetivo de proporcionar a manifestação dos teoremas em ação relacionados ao Campo Conceitual das Funções Afim através da programação de computadores. No Quadro II apresentamos os enunciados das situações.

QUADRO II
Situções com Scratch

SITUAÇÃO 1 (S1) - ANDANDO DE TAXI

Numa certa cidade, o cálculo para saber quanto custará uma corrida de taxi é feito a partir da fórmula $P = 2,50 + 1,40q$, em que q é a quantidade de quilômetros e P é o preço final da corrida.

- Crie um programa no Scratch no qual um usuário qualquer deste programa possa inserir as quilometragens percorridas em suas viagens e obter o valor gasto em cada uma.
- Vamos supor agora que uma pessoa tenha um certo valor em Reais, por exemplo, R\$ 80,00 e deseja saber quantos quilômetros ela poderia percorrer nesta cidade. Como o Scratch poderia ajudar estas pessoas que querem saber a quilometragem que poderá ser percorrida a partir do dinheiro que elas possuem?

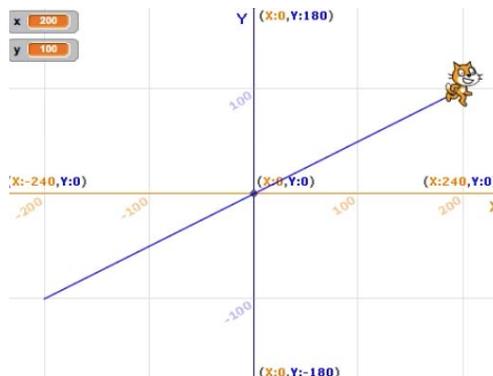
SITUAÇÃO 2 (S2) - SALÁRIO

A remuneração mensal dos funcionários em diversos estabelecimentos comerciais do estado do Rio Grande do Sul é composta de duas partes. Uma parte fixa, referente ao piso regional do comércio (salário base) de R\$ 1.150,00, e uma parte variável, que se constitui de 20% do valor total das vendas do mês anterior deste funcionário.

- Elabore no Scratch, um programa para que os funcionários destas lojas possam simular seu salário mensal a partir da inserção do total das suas vendas no mês. Teste para uma venda de R\$ 50.000,00 no mês.
- Um funcionário precisa receber no mês de junho um salário mínimo de R\$ 7.500,00 para conseguir pagar suas contas. Dessa forma, quanto precisará ser o seu total de venda no mês anterior? Faça um programa no Scratch que responda a essa pergunta e que possibilite calcular o valor de vendas mensais a partir do salário desejado.

SITUAÇÃO 3 (S3) - QUAL É O SEGREDO

A imagem abaixo, produzida no Scratch, representa uma trajetória retilínea que o personagem desenha no plano cartesiano. Visualize a execução do programa no vídeo disponibilizado em <https://goo.gl/z2Ht89> e, a partir disso:



- a) Encontre o modelo matemático por trás do movimento.
- b) Reproduza esta construção no Scratch, considerando as modificações nas variáveis x e y a cada movimento do personagem. Sugestão: inicie em $(-200, -100)$.

SITUAÇÃO 4 (S4) - RESTAURANTE

Em certos restaurantes, há duas modalidades de serviços prestados para o almoço:

1 - Buffet Livre: em que é cobrada uma taxa por pessoa, independente do seu consumo.
 2 - Buffet a quilo: em que é estipulado um preço por quilograma e o valor cobrado será proporcional ao consumo.

- a) Elabore um programa no Scratch que auxilie um usuário a saber quanto custou seu prato de comida, em qualquer restaurante desse tipo, e qual modalidade foi usada.
- b) Elabore outro programa no Scratch que nos ajude a descobrir o valor máximo a ser consumido para ser vantajoso o Buffet a Quilo, em qualquer restaurante desse tipo.

SITUAÇÃO 5 (S5) - LIVRE

Crie um programa no Scratch que represente uma situação matemática que envolva as Funções Afim, ou seja, uma situação que estabeleça uma certa relação do tipo $f(x) = ax + b$ entre duas variáveis. Use sua criatividade.

A observação interativa caracterizou-se como um método de intervenção, baseado nas estratégias de entrevistas que Piaget (1977, 1978) e seus colaboradores (Inhelder e Caprona, 1996) desenvolveram em seus trabalhos sobre epistemologia genética, notadamente as diversas modificações realizadas ao longo dos anos em virtude de adaptações às questões de interesse.

Nesta nova abordagem, chamada de observação interativa, “[...] as intervenções do observador são controladas de forma a não interferir na compreensão do funcionamento de seus próprios conhecimentos por parte do sujeito” (Saad-Robert, 1996, p. 129). Quando ocorrem, as perguntas não devem direcionar, mas esclarecer para o observador os processos, as condutas, as ações empregadas na atividade de resolução.

Considerando que o objetivo desta pesquisa é investigar as manifestações conceituais no ambiente de programação, ou seja, investigar os invariantes operatórios que estão sendo postos em ação, suas representações e compreensões pelos estudantes, nos aproximamos mais dos estudos de Inhelder e seus colaboradores sobre os aspectos funcionais do conhecimento. Assim, constituímos o método de intervenção com os estudantes durante a atividade empírica, a qual chamamos também de observação interativa, com o objetivo de explorar as formas predicativas dos conhecimentos em ação dos estudantes sem pretender, entretanto, influenciar e direcionar os raciocínios. Neste sentido, estabelecemos também um roteiro de orientação, que serviu como norte para

as perguntas feitas aos estudantes sem, entretanto, pretender engessar a conversa, pois outras perguntas surgiram no decorrer da atividade, assim como algumas previstas não foram feitas.

Na descrição dos resultados, apresentamos quadros com imagens dos programas realizados pelos estudantes no Scratch e excertos de suas falas. Para a organização dos diálogos nesses quadros, usamos a letra P para pesquisadores, A para Alan e J para João.

5. RESULTADOS

A partir da análise dos dados, foi possível perceber as manifestações conceituais dos dois estudantes sobre os quatro invariantes operatórios categorizados por meio das representações feitas tanto nos códigos de programação (na sua forma operatória) quanto nas falas (na sua forma predicativa). No entanto, foi essa última forma que nos permitiu saber sobre sua compreensão do invariante, pois, conforme já discutido, a forma operatória nem sempre vem acompanhada de compreensões explícitas. Neste sentido, é possível afirmar que os estudantes conseguiram operacionalizar o conceito matemático na programação de computadores e que compreenderam o que estavam fazendo.

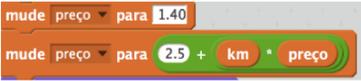
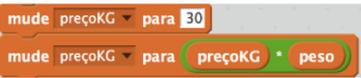
A terceira situação proposta nas atividades com o Scratch mostrou-se mais desafiadora aos dois estudantes, pois associou movimento, variáveis e o conceito de variação constante, que, provavelmente, nunca tinham sido relacionados dessa forma antes. Isso proporcionou desequilíbrios nos conhecimentos prévios deles, tanto de matemática quanto de programação, levando-os a apostar mais em estratégias de tentativas e erros. Neste sentido, é possível dizer que seus esquemas e teoremas foram testados e reformulados a fim de adaptarem-se à nova situação. Com isso, iremos limitar a discussão dos resultados ao invariante operatório *taxa de variação constante*, que possibilitou respondermos ao problema de pesquisa.

5.1. Análise de Alan

No diagnóstico de Alan, a partir da atividade feita no papel, a taxa de variação constante aparece como a ideia de que o coeficiente “ a ” da função multiplicada pela variável independente. É o que aparece na forma operatória do invariante, quando se está fazendo cálculos. No entanto, quando questionado, Alan manifesta na forma predicativa a noção de variação constante, ou seja, o coeficiente “ a ” representa o quanto varia “ y ” a cada unidade de variação de “ x ”.

Nas situações com Scratch, a noção de variação constante aparece, tal como antes, na forma operatória quando usa o comando multiplicação das operações do Scratch e na forma predicativa a partir das suas falas. Neste sentido, o mesmo teorema em ação se manifesta na qual interpretamos da seguinte forma: *numa função do tipo $f(x) = ax + b$, a cada unidade de variação de x , há uma variação constante em $f(x)$ determinado pelo coeficiente “a”*. No Quadro III, apresento recortes dos programas que Alan criou para S1, S2, S4 e S5 apenas das partes que correspondem à operação de multiplicação e, também, trago excertos que corroboram com as ideias apresentadas.

QUADRO III
Manifestações na S1, S2, S4 e S5, por Alan

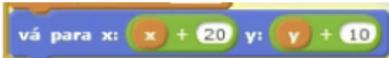
S	FO	FP
S1(a)	$P = 1,40q + 2,50$ 	- P: O que é o 1,40? - A: <i>É o preço pela quilometragem.</i> - P: Para cada quilômetro que passa, quanto se paga na corrida? - A: <i>1,40 a cada quilômetro.</i>
S2(a)	$f(x) = 0,2x + 1150$ 	- A: [...] os 20% do total das vendas, que seria 0,2 vezes o preço de vendas.
S4(a)	$Preço = 30 * peso$ 	- P: O que significa os 30? - A: <i>É o peso por quilo.</i> - P: O que ele faz no cálculo? - A: Ele multiplica pelo peso da comida que a pessoa comer.
S5	$Lucro = 75 * peças - 1200$ 	- A: ... agora para cada peça, o preço de venda de cada uma é... vamos botar 75.

Outro aspecto importante a considerar é sua resolução na S3 (b), na qual apenas obteve sucesso após várias descrições, execuções, reflexões e depurações do código. Primeiramente, na letra (a), Alan aplicou sua estratégia de modelagem da Função a partir de dois pontos do gráfico, mas cometeu um pequeno erro e encontrou a função $y = 0,25x + 0,5$ ao invés de $y = 0,5x$. No item (b), sem usar o modelo gerado no item (a), usou uma estratégia inicial de tentar criar um movimento do ator a partir de um ângulo de inclinação com a horizontal. Fez várias tentativas, mas não conseguiu estabelecer a relação do ângulo necessário de inclinação do ator e a trajetória solicitada na questão.

Depois disso, passou a usar outra estratégia e estabeleceu a seguinte relação entre as coordenadas x e y : “quando x anda 20, y anda 10”. Após realizar algumas tentativas e erros com os comandos do Scratch, a fim de fazer o ator andar e marcar suas coordenadas nas variáveis criadas, elabora seu programa final. No término de sua programação, questionamos sobre a relação deste programa com a função modelada no item (a) e ele percebe que há algo errado no seu modelo. Após arrumar o modelo para $y = 0,5x$, questionamos novamente sobre a relação e ele manifesta compreender, então, a relação existente entre o coeficiente “ a ” da função e o movimento das coordenadas do ator do programa no Scratch. O que se percebe, portanto, é a operacionalização de duas noções a respeito da Função Afim da S3, que é a variação constante da $f(x)$ em relação a x dada pelo coeficiente 0,5 e a ideia de proporcionalidade com os valores das coordenadas x e y , tendo em vista ser uma Função Linear.

A ideia da variação foi, portanto, mais uma vez manifestada quando relacionou tais variações com uma progressão aritmética, ao dizer “andava 2 e andava 1”, e a ideia de proporcionalidade fica clara na sua resposta à pergunta sobre o que fazer se a função fosse $y = x/3$, no final da conversa sobre essa situação. Assim, é possível descrever essas ideias a partir do seguinte teorema em ação: *i) na função $f(x) = 0,5x$, a cada unidade de variação em x , há meia unidade de variação em y e, também, os valores da ordenada são sempre a metade dos valores da abscissa; ii) na função $f(x) = x/3$, os valores da ordenada são sempre um terço dos valores da abscissa.* No Quadro IV, é exposta a forma operatória e predicativa que ilustram o que acabamos de mostrar.

QUADRO IV
Manifestação na S3, por Alan

FO	FP
Primeira relação estabelecida: 	Enquanto assistimos ao vídeo novamente: - A: O y vai ser o metade de x . - P: Sempre? - A: Sim. [...] Quando faz sua primeira elaboração no Scratch: - P: Por que tu mandaste andar $x + 20$ e $y + 10$? - A: Para ele fazer isso aqui, <i>para ele sempre adicionar 20 ao x e 10 ao y.</i>



Depois que termina o programa, perguntamos:

- P: A relação que tu estabeleceste foi x anda 20 e y anda 10...
- A: *Sempre a metade.*
- P: Ok. O que essa relação tem a ver com a tua função do modelo?
- A: Isso aqui, porque... (aponta para o 0,5)... pensando bem, não faz sentido.
- P: O que não faz sentido?
- A: O x ... tem 0,25 e não 0,5...

Alan coloca um x ao lado do 0,5 na função, ficando $f(x) = 0.25x + 0,5x$.

- P: Tá, tu colocaste o x do lado do 0,5 e isso faz alguma diferença?
- A: Está sendo a metade.

Revisa os cálculos, acha o erro e arruma a função para $f(x) = 0,5x$.

- P: Nesta fórmula aí, se eu colocar x igual ao 40, o que vai sair no y ?
- A: 20.
- P: Por quê?
- A: Porque aqui é 0,5.
- P: E o 0,5 faz o quê?
- A: Ah... é isso ele deixa pela metade. Como aqui não tá somando nada (não tem o b), fica só esse valor aqui. Se colocar 20 no x , fica y igual a 10. Entendi agora.

Questionamos sobre o fato de ele não ter usado a resposta da letra (a) para fazer a letra (b) e ter estabelecido uma relação.

- A: Eu usei as marcações aqui, ele andava 2 e andava 1, conforme a PA.
- P: Se eu pedisse para fazer o movimento para $y = \frac{1}{3}x$, como tu faria?
- A: Colocaria $x = 21$ e $y = 7$, porque daí ficaria um terço.

Vemos, portanto, que o estudante Alan não utiliza de seus conhecimentos prévios já evidenciados no diagnóstico para resolver o item (b) da S3. Quando não consegue fazer o seu ator andar na direção que precisava por meio do ângulo de inclinação, desiste da estratégia (que não era ruim, porém faltavam-lhe elementos conceituais) e passa a estabelecer a relação de variação entre x e y , ou seja, “ x anda 20 e y anda 10”. Com as etapas de descrição, execução, reflexão e depuração, Alan encontra o caminho para fazer o ator andar e descrever a reta conforme o vídeo¹ da situação. No entanto, foram necessárias intervenções no sentido de fazer com que ele relacionasse seu programa com seu modelo matemático equivocado do item (a) da situação e que percebesse a relação entre o coeficiente “ a ” e a variação do y em relação a x no movimento do ator. A partir disso, percebe também a relação proporcional entre os valores das coordenadas x e y . Sobre os teoremas em ação, podemos ver uma ampliação da noção do conceito incluindo, a partir do Scratch, a ideia de proporcionalidade. No entanto, consideramos teoremas locais, pois estão centrados na situação específica das Funções $f(x) = 0,5x$ e $f(x) = x/3$. Para ter certeza de uma generalização da ideia, seria preciso ter proposto a realização da tarefa para outros tipos de funções, variando os valores dos coeficientes “ a ” e “ b ”.

5.2. Análise de João

No diagnóstico, João manifesta a forma operatória do invariante da mesma forma que Alan manifestou, a partir da multiplicação do coeficiente “ a ” pela variável independente. E é possível perceber sua noção de variação constante, por meio da forma predicativa.

No ambiente de programação, João manifesta sua noção do invariante na forma operatória por meio dos códigos do Scratch e na forma predicativa por meio de suas explicações. O teorema em ação manifestado no diagnóstico é novamente percebido: *numa função do tipo $f(x) = ax + b$, a cada unidade de variação em x , há uma variação constante em $f(x)$ determinado pelo coeficiente “ a ”*. No Quadro V, apresentamos as ideias representadas por João sobre a S1, S2, S4 e S5.

Assim como Alan fez na S3, João também utilizou o teorema em ação nas suas várias descrições, execuções, reflexões e depurações do programa. Na S3(a), que não necessitava o uso do Scratch, mas solicitava a descoberta do modelo matemático do movimento do ator no vídeo, João procurou descrever matematicamente a relação entre as variáveis por meio de raciocínio. Tendo em

¹ Vídeo disponibilizado em <<https://goo.gl/z2Ht89>>.

vista que o estudante não havia resolvido uma das situações do diagnóstico que solicitava a modelagem da lei da função a partir do gráfico e que na entrevista não soube falar sobre a questão, podemos dizer que, no momento da pesquisa, ele não tinha esquemas relacionados a procedimentos formais da Matemática para encontrar a lei da função dados dois de seus pontos.

QUADRO V
Manifestações na S1, S2, S4 e S5, por João

S1(a)	<p>FO Associa: Valor 1 = 1,40 e Valor 2 = 2,50</p> 
	<p>FP</p> <ul style="list-style-type: none"> - P: Ótimo. A cada um km que passa quanto que eu tenho que pagar a mais? - J: <i>A cada km seria 1,40 reais.</i> - P: Ok. Tentando relacionair com a situação 1 do diagnóstico, daria para dizer que o 1,40 tem a mesma função que o 3? Por quê? - J: Sim, por causa que no caso só mudando o conceito, que seria a questão da aceleração, <i>seria um multiplicador da variável recebida.</i>
S2(a)	<p>FO Associa: Porcentagem = 0,2- e Salário base = 1150</p> 
	<p>FP</p> <ul style="list-style-type: none"> - P: Qual é a diferença entre o 1150 e os 20%? - J: A aplicação dele. - P: Como assim? - J: Um seria um fixo e o outro <i>uma fração do valor.</i> - P: Um é uma constante fixa e outro é uma constante que multiplica pela variável, é isso? - J: Sim.
S5	<p>FO “Distância” foi a variável criada para ler a resposta do usuário.</p> 
	<p>FP</p> <ul style="list-style-type: none"> - P: O que significa o 3/4 da tua função? - J: O quanto a segunda pessoa correu em relação a primeira.

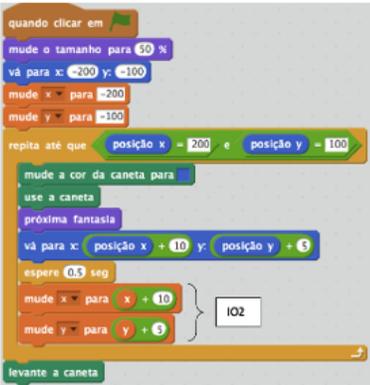
Neste sentido, sua elaboração da S3(a) aconteceu mediante a estratégia de estabelecer uma lógica e fazer testes. Primeiramente, percebeu a relação “x anda

10 e y anda 5” e estabeleceu o modelo $y = (x + 10)/2$. Ao testar $x = -200$ fazendo contas no papel, não encontrou o correspondente $y = -100$ que ele observou ser o par ordenado de -200 no vídeo. Depois mudou para $y = (x + 10) * 2$ e ao testar $x = -200$ também não encontrou $y = -100$. Resolvemos intervir. Mostramos o vídeo novamente, fazendo pausas para que visse os valores das coordenadas até que ele chegou à função $y = x/2$. O que vemos, principalmente quando ele escreveu $x + 10$, é uma tentativa de estabelecer uma relação envolvendo os acréscimos que x e y recebem a cada movimento na tela. Isso indica que ele percebe a variação envolvida na função e que a variação de x influencia na variação de y , mas foi quando percebeu a relação proporcional existente entre as coordenadas dos pontos em que o ator do vídeo passava que conseguiu elaborar o modelo correto. Assim, explicita o seguinte teorema em ação: *se a cada passo em x é dado meio passo em y e a abcissa é o dobro da ordenada nos pontos, então, a Função que descreve o movimento é $y = x/2$ ou $y = 0,5x$.*

Na S3(b), em que precisava elaborar um programa, foi possível ver nos códigos a aplicação na forma operatória dessas ideias de “ x anda 10 e y anda 5” quando João: criou as variáveis x e y , inseriu para cada uma os valores das coordenadas iniciais $(-200, -100)$, usou um comando de movimento “vá para...” para que o ator se posicionasse nessas coordenadas no início do movimento e usou o mesmo comando de movimento para que ele adicionasse 10 ao x e 5 ao y dentro de um comando de controle, no caso, “repita até...”. Mais adiante, após alguns testes sem sucesso, percebeu que o programa que elaborou não estava mudando o valor contido nas variáveis, assim, inseriu um comando de “muda x para $x + 10$ ” e “mude y para $y + 5$ ”.

Ao final da atividade, fazemos um questionamento para João, que não foi feito para Alan, sobre o que aconteceria com a função $f(x) = 2x$ e $f(x) = 0,5x + 50$. Para a primeira função sugerida, percebeu rapidamente a relação proporcional entre os valores de x e y . Para a segunda, inicialmente João tentou projetar onde a nova função passaria, então, mudou os pontos iniciais do programa e o valor associado à variável y , colocando “ $y + 25$ ”. Fez o teste e percebeu que não deu certo. Voltou para “ $y + 5$ ” e viu que deu certo. Assim, percebeu que as duas funções, $y = 0,5x$ e $y = 0,5x + 50$ possuem a mesma variação constante. No Quadro VI, apresentamos as ideias de João representadas nos códigos de programação e nas falas, o que nos possibilita interpretar os seguintes teoremas em ação: *i) nas funções $f(x) = 0,5x$ e $f(x) = 2x$, a relação entre x e y é proporcional ao valor do coeficiente “ a ”; ii) nas funções $y = 0,5x$ e $y = 0,5x + 50$, a relação de crescimento entre x e y é a mesma, a cada unidade que o x aumenta, o y aumenta meia unidade.*

QUADRO VI
 Manifestação na S3(b), por João

FO	FP
<p>1) Faz um planejamento: criar variáveis, iniciar em $x = -200$ e $y = -100$, repetir o movimento até $y = 100$, com $y + 5$ e $x + 10$.</p>	<p>- V: Me aplica a plano. - J: <i>Criar as variáveis x e y, já atribuo o valor a elas de -200 e -100, e vai fazer uma repetição, y já tendo um valor de -100, até chegar no valor de 100, positivo, sendo que a cada repetição aumenta 5, e o x aumenta 10.</i></p>
<p>2) Primeira elaboração do programa:</p> 	<p>- V: Depois de fazer a última elaboração do programa, pergunto: - V: O que tem o ver esse $0,5$ do teu modelo matemático com o movimento do gato? - J: <i>Seria a multiplicação do x para resolver o y.</i> - V: A cada variação do x, a cada unidade que o x aumenta, quanto aumenta no y? - J: $0,5$ [...] - V: <i>Se eu tivesse um modelo que fosse $y = 2x$. O que ia acontecer?</i> - J: ... o valor do x ia multiplicar com 2. - V: Se iniciasse em $x = -50$ e $y = -100$, (aponto na tela com o mouse) o que ele ia fazer? - J: Ia passar pela origem de novo, <i>daí vai dar um passo no x e o dobro no y e os pontos também ficam o dobro, quer dizer, x vai ser a metade agora.</i></p>
<p>O gato não sai do lugar.</p>	<p>- V: E se fosse $y = 0,5x + 50$, usando $x = -200$ e $y = -50$. Onde ele vai passar? - J: Não vai passar mais pela origem. - V: E será que essa relação do x e do y continua? Ou seja, x aumenta 10 e o outro 5? - J: Não, acho que tem que mudar. - V: Ele testa com o mesmo aumento, depois muda para $y + 25$ e não dá certo. Volta ao $y + 5$. - V: O que está acontecendo? Qual a diferença entre essas duas construções (refiro-me a $y = 0,5x$ e $y = 0,5x + 50$)? - J: ... Ah, porque a lógica aqui aumenta o mesmo. - V: Por que aumenta o mesmo? Mudamos a função, tem mais 50, mas a lógica de aumentar 10 e aumentar 5 continua a mesma. Por quê? - J: Porque os valores são proporcionais ... e esse (50) só é um acréscimo ao valor anterior.</p>
<p>3) Algumas modificações e elaborações intermediárias (tentativas e erros).</p>	
<p>4) Última elaboração do programa:</p> 	

Conforme pode ser visto, há também uma diversificação do teorema em ação do diagnóstico, aplicado aos casos específicos discutidos. Primeiramente, o estudante estabelece o modelo da Função por meio da observação à regularidade com que os pontos se modificavam no vídeo e estabelece a relação proporção: $f(x) = 0,5x$. No entanto, para criar seu programa no item (b) também não usa a lei modelada do item (a) e, assim como Alan, leva em conta a relação de variação “ x anda 10 e y anda 5”. Depois de tentativas e erros, de descrições, execuções, reflexões e depurações do código, João elabora seu programa. Quando questionado sobre a relação entre o 0,5 da função e o movimento do ator, percebe as duas noções do conceito, quando diz que “seria a multiplicação do x para resolver o y ” e que, a cada unidade que o x aumenta, o y aumenta 0,5. Assim, foi possível perceber sua compreensão sobre a proporcionalidade e sobre a variação constante, estabelecer os teoremas em ação e verificar que a situação experimentada com a programação, juntamente com as perguntas, possibilitou a manifestação da ideia da taxa de variação num contexto de movimento.

Em síntese, percebemos que a aplicação de um teorema em ação prévio numa situação de contexto diferenciado pelo uso da programação não foi automática. Foi preciso um tempo para a realização de testes e conjecturas a fim de estabelecer as novas relações necessárias e perceber que se tratava da mesma ideia manifestada anteriormente sobre a variação constante de y em relação a x . Vergnaud (1996, 2009) se refere à necessidade de propor situações diferentes sobre um mesmo conceito matemático, nas quais o estudante se sinta desafiado o suficiente para, a partir do que sabe, construir ele próprio as novas relações, pois só assim haverá desequilíbrios que possibilitem novas assimilações, acomodações e adaptações. Pelo que pudemos perceber, a estratégia didática com o Scratch possibilitou isso.

Após a realização dessas análises, identificamos que diversas variações na elaboração da Situação 3 poderiam ser propostas a fim de explorar mais ainda o conceito de variação constante e, com isso, talvez seja possível que os estudantes generalizassem mais seus teoremas. Poderíamos ampliar as Funções para que tivessem valores dos coeficientes negativos, por exemplo, em que seja possível perceber a variação de decrescimento constante em certos contextos. Também, poderíamos aproveitar o recurso de movimento do ambiente de programação e propor uma situação que foque na relação do ângulo de inclinação do ator e as coordenadas dele, possibilitando uma aplicação da fórmula do coeficiente angular da Geometria Analítica. Portanto, é bem possível que outras relações pudessem, ainda, ser exploradas.

5.3. *A espiral da conceituação: concretização, dinamização, compreensão e reformulação dos invariantes operatórios*

Segundo a perspectiva de Papert (1985, 2008), a programação de computadores se constitui um meio para que as crianças externalizem expectativas intuitivas, tornando-as mais evidentes e acessíveis à reflexão. Por meio do estudo empírico, foi possível perceber as explicitações do pensamento dos estudantes através dos códigos, das reflexões e conjecturas que surgem na análise do que foi feito no programa e das reformulações de esquemas e teoremas em ação quando necessário. Neste sentido, consideramos que os invariantes operatórios das Funções Afim foram concretizados, dinamizados, compreendidos e reformulados por meio dos programas realizados.

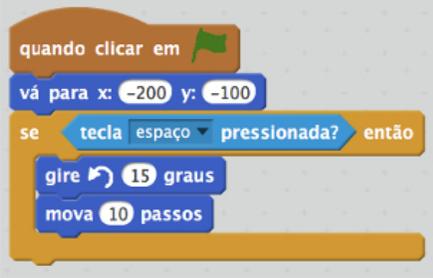
Por concretização entendemos a possibilidade de criar alguma coisa, um objeto, um programa, um micromundo, que sirva para algo, mas que esta criação não está fisicamente ao alcance. Ela existe, só que pertence ao mundo digital proporcionado pelo computador. Por dinamização entendemos a possibilidade de criar movimentos e simulações na tela do computador que se utilizem de conceitos matemáticos, bem como a possibilidade de interagirmos com o que é criado.

Assim, na etapa de descrição da espiral da conceituação, há a concretização dos invariantes; na etapa da execução, há a dinamização do que foi pensado, com a realização do movimento ou a interação com o usuário por meio de perguntas e respostas; na etapa da reflexão, há a compreensão do que foi feito, se a ideia empregada foi eficaz ou não; e, finalmente, na etapa da depuração, há a reformulação, se for necessário, daquilo que foi percebido na reflexão. Na necessidade de melhorias no uso e na compreensão do conceito, há repetições das etapas da espiral.

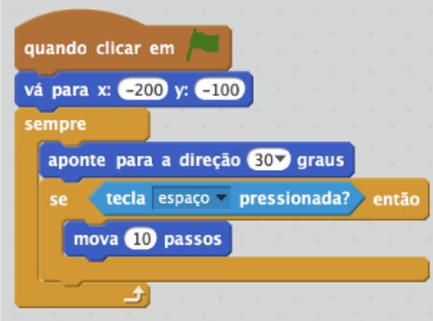
Isso foi percebido nos dois estudantes e, como exemplo, cito a realização da S3(b) por Alan. Na Figura 4, mostramos quatro programas mais significativos. Nessa situação, o estudante elaborou uma hipótese inicial, no P1, de uso de ângulos de inclinação para fazer o ator andar e descrever o gráfico, executou o programa, percebeu erros, refletiu sobre tais erros e reformulou o programa mais algumas vezes com essa estratégia, até chegar no P2. Com a sucessão de erros usando ângulo de inclinação, mudou a estratégia. Passou a considerar a variação que as coordenadas da posição do ator do vídeo sofriam. Estabeleceu a ideia “ x anda 20 e y anda 10” e foi testando comandos a fim de encontrar a melhor descrição. No P3, seu ator deu um passo e voltou à posição inicial (-200, -100). Com isso, percebeu que as variáveis x e y não mudavam, continuavam sendo sempre (-200, -100) e que a soma de 20 e 10 acontecia por apenas um instante.

Assim, reformulou algumas vezes até estabelecer uma mudança nas próprias variáveis, no P4, com os comandos “adicione a x : 20” e “adicione a y : 10”, chegando ao término da atividade.

P1: Estratégia de ângulo de inclinação



P2: Estratégia de ângulo de inclinação



P3: Estratégia de variação



P4: Estratégia de variação



Figura 4. Estratégias do Alan

Dado o exemplo, consideramos que o invariante operatório *taxa de variação constante* foi mobilizado e operacionalizado dentro de cada uma das etapas

da espiral. Isso significa que, na descrição do código, houve a concretização das ideias sobre o invariante; na execução do programa, houve a dinamização das ideias estabelecidas sobre esse invariante; na reflexão sobre o programa, houve a compreensão de aspectos que estavam errados e que poderiam ser melhorados; e, na depuração do programa, houve a possibilidade de reformulação das hipóteses anteriores e o estabelecimento de novas hipóteses sobre o uso do invariante. Isso permite complementar as etapas da espiral da conceituação com elementos relacionados aos invariantes. Na Figura 5, retomamos a ideia já delineada anteriormente, mas enfatizando as quatro etapas a partir das ações que descrevemos em relação aos invariantes.



Figura 5. Etapas da Espiral da Conceituação a partir das ações relativas aos invariantes operatórios

Em resposta ao problema de investigação, apontamos que essa pesquisa, a partir de todo estudo teórico e empírico realizado, permitiu mostrar que os processos de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim, bem como a ampliação dos usos destes invariantes, aconteceram por meio das ações de concretização, dinamização, compreensão e reformulação proporcionados pelas etapas da espiral da conceituação a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores.

No Quadro VII, trazemos excertos das falas dos estudantes que sinalizam suas perspectivas sobre as situações realizadas com o ambiente de programação a partir de perguntas mais gerais. Estas perguntas ajudam no reconhecimento das possibilidades da programação de computadores para a identificação, desenvolvimento e manifestação de conhecimentos matemáticos.

QUADRO VII
Percepção dos estudantes sobre as situações no Scratch

<i>Perguntas realizadas</i>	<i>Respostas de Alan</i>	<i>Respostas de João</i>
O que tu achaste das atividades no Scratch?	Acho que ... fica mais dinâmico. [...] Acho que é mais visual e mais fácil de entender, porque tu estás vendo, aqui no papel não pode testar tanto sem usar o braço [...]. As questões bem simples são mais fáceis de fazer no papel, mas para quem não entende a matéria, aqui é melhor, assim, ah saquei!	Achei algumas até desafiadoras, que exigem usar um raciocínio lógico, não só na matemática, mas na forma como tem que construir [...]. Não chega a ser mais difícil, mas tem que ver a lógica de como vai montar, diferente do papel. Porque que tem uma ordem certa para montar...
- Tem alguma coisa específica que hoje tu passaste a entender melhor sobre matemática?	- Acho que tudo um pouco.	- Acho que a variação constante.

Dado o exposto, percebemos que os dois estudantes entenderam que as situações realizadas com a programação de computadores proporcionaram aspectos diferenciadores em relação às situações realizadas no papel. Para Alan, o Scratch foi mais dinâmico e visual, possibilitou vários testes rápidos e poderia proporcionar a compreensão de ideias e conceitos por quem ainda não havia compreendido o conteúdo. Para João, as Situações no Scratch exigiram o uso de conceitos matemáticos, que também são exigidas nas atividades no papel, mas, além disso, exigiu o uso de lógica de programação e a necessidade de estabelecer uma organização no pensamento para elaborar o algoritmo. Tais percepções, portanto, corroboram com os resultados dessa análise, em que entender, raciocinar, ver, testar, construir e montar (verbos trazidos pelos estudantes), são ações presentes nas etapas da Espiral da Conceituação.

Por último, consideramos que há vantagens evidentes no uso da programação de computadores para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos se comparado com atividades matemáticas que usam, exclusivamente, o recurso analógico do lápis e do papel. Conforme já foi dito, o uso de um ambiente de programação proporciona que as ideias e hipóteses sobre uma situação a ser resolvida sejam postas em ação nos códigos de uma forma organizada e seguindo uma lógica específica. Mas isso também pode ser realizado em atividades no papel, bem como em atividades mais práticas com material manipulável. No entanto, o feedback imediato entre a sequência de comandos e a execução da ação programada, a visualização do movimento, do cálculo ou da interação resultante, a facilidade de pensar sobre o resultado obtido que está visualmente acessível e, se necessário, a possibilidade de alterar as ideias iniciais e o código do programa, são aspectos que vão além do que os recursos analógicos oferecem. O que defendemos, portanto, é pensar a Educação Matemática no sentido de unir, mesclar, complementar metodologias e tecnologias analógicas e digitais, a fim de proporcionar mais e melhores situações aos estudantes.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos dados produzidos na pesquisa teórica e empírica demonstra que, no processo de elaborar e descrever os códigos de programação, os invariantes operatórios foram manifestados, testados, reformulados e, de certa forma, ampliados a partir da estratégia didática com o Scratch. Também, suscitou pensar em diversas outras potencialidades que a programação poderia proporcionar ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos de um modo geral, quando permitiu explorar o invariante operatório *taxa de variação constante* por meio de um movimento do ator no *software*.

A partir disso, respondemos ao problema de pesquisa considerando que o processo de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das Funções Afim, a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores, aconteceu por meio das ações de *concretização*, na etapa de descrição, de *dinamização*, na etapa da execução, de *compreensão*, na etapa de reflexão, e de *reformulação*, na etapa de depuração da espiral da conceituação, conforme está representado pela Figura 5 já mostrada. Vale lembrar que, segundo Valente (2002), as etapas da espiral podem acontecer simultaneamente sem que possamos identificar na prática esse

processo sequencial apresentado, por isso a conceituação é muito mais complexa do que é perceptível ao olhar do pesquisador e do professor. O observável é apenas a parte visível do *iceberg* da conceituação do estudante que, conforme Vergnaud (1996), sem a parte escondida nada seria.

Fazendo uma associação desse modelo da espiral com o modelo do *iceberg* da conceituação daria para dizer que, dentro do *iceberg*, para cada situação proposta, há uma espiral, cuja função estaria em levar os conhecimentos da forma operatória para sua forma predicativa, não de maneira linear, mas processual, respeitando o tempo, as condições, as potencialidades e os limites de cada sujeito. É possível pensar numa imagem que integrasse os dois modelos, mas, com receio de limitar a ideia apresentada, deixamos a criação de tal representação simbólica sobre o que falamos para o entendimento e a abstração do leitor.

Tendo em vista o exposto, a pesquisa se mostrou valiosa tanto na elaboração das situações com a programação de computadores quanto no estudo das manifestações conceituais dos estudantes, uma vez que valorizou tanto a operacionalidade dos esquemas e invariantes na atividade quanto as explicações e noções interpretativas que o estudante tem do que está fazendo. O diálogo de evidenciação dos teoremas em ação que estabelecemos com cada estudante pelo método da observação interativa mostra que assumir a verbalização dos estudantes sobre suas produções, além da análise sobre as ações, foi importante à pesquisa, bem como abre novas possibilidades para a práxis na sala de aula. Nas palavras de Muniz, “desilenciar a aula de Matemática é preciso” (2009, p. 51).

É importante retomar a ideia de que a pesquisa com dois estudantes, realizada de forma individual, foi importante para conseguir adentrar nas minúcias das elaborações conceituais e verificar os processos de representação e de compreensão de cada um. A partir de agora, é possível pensar em práticas para salas de aula reais, com um número maior de estudantes, tendo como base os resultados desta pesquisa. Além disso, acreditamos ser indispensável que tais práticas promovam uma cultura de colaboração, de partilha e de rede entre os pares, em que possam dialogar, discutir, concordar e discordar, construir juntos e, portanto, explicitar seus esquemas e invariantes operatórios em diversas formas de representação.

Além disso, durante a produção dos dados, em que as manifestações realizadas nas situações do diagnóstico e nas situações com o Scratch, tanto na forma operatória como na forma predicativa dos conhecimentos, evidenciaram diferenças significativas, possibilitou refletirmos sobre o papel das tecnologias digitais na educação, e o que elas trazem de diferente para aquilo que, há muito tempo, é mediado por tecnologias analógicas. Com base nos resultados já apontados na

pesquisa, a tecnologia específica da programação de computadores apresenta a possibilidade de criar, concretizar, visualizar e dinamizar as ideias na tela do computador, ao mesmo tempo que possibilita pensar sobre o que se sabe, podendo reformular as ideias quando necessário. É a operacionalização das etapas da Espiral da Conceituação o diferencial em relação às tecnologias analógicas.

REFERÊNCIAS

- Grossi, E. P. (2017). Apresentando. Em E. P. Grossi (Org.), *O que é aprender? O Iceberg da conceitualização* (pp. 6-10). GEEMPA.
- Inhelder, B. e Caprona, D. (1996). Rumo ao construtivismo psicológico: estruturas? Procedimentos? Os dois “indissociáveis”. Em B. Inhelder e G. Cellérier (Comps.), *O desenrolar das descobertas na criança: um estudo sobre as microgêneses cognitivas* (pp. 7-37). Artes Médicas.
- Lessa, V. E. (2017). Teoria dos Campos Conceituais: um estado do conhecimento. Em *Anais da II Mostra de Pesquisa em Educação da Universidade de Passo Fundo* (pp. 1-13). Universidade de Passo Fundo. <http://docs.upf.br/download/meduc/images/Anais2017/Valeria%20Espindola%20Lessa.pdf>
- Marji, M. (2014). *Aprenda a programar com scratch: uma introdução visual à programação com jogos, arte, ciência e matemática*. Novatec.
- Minayo, M. C. de S. (2013). O desafio da pesquisa social. Em M. C. de S. Minayo (Org.), *Pesquisa social: teoria, método e criatividade* (33 ed., pp. 11-32). Vozes.
- Muniz, C. (2009). O conceito de esquema para um novo olhar para a produção matemática na escola: as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. Em M. Bittar e C. Muniz (Orgs.), *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (pp. 37-52). Editora CRV.
- Papert, S. (1985). *Logo: computadores e educação* (J. A. Valente, B. Bitelman e A. V. Ripper, Trad.). Editora Brasiliense.
- Papert, S. (2008). *A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática*. Artmed.
- Piaget, J. (1977). *A tomada de consciência*. Melhoramentos.
- Piaget, J. (1978). *Fazer e compreender*. Melhoramentos.
- Saad-Robert, M. (1996). Didier e as bonecas russas: análise de caso e conceituação. Em B. Inhelder e G. Cellérier (Comps.), *O desenrolar das descobertas na criança: um estudo sobre as microgêneses cognitivas* (pp. 127-168). Artes Médicas.
- Valente, J. A. (2002). A espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. Em M. C. R. A. Joly (Org.), *Tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem* (pp. 15-37). Casa do Psicólogo Editora.
- Valente, J. A. (2005). *A espiral da espiral de aprendizagem: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação* [Tese de doutorado não publicada]. Universidade Estadual de Campinas.
- Ventorini, A. E. (2015). *Construção de relações funcionais através do software Scratch*. [Tese de mestrado não publicada]. Universidade Federal de Santa Maria.

- Verganud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. Em J. Brun (Org.), *Didáctica das matemáticas* (pp.155-191). Instituto Piaget.
- Verganud, G. (2009). O que é aprender. Em M. Bittar e C. Muniz (Orgs.), *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (pp. 13-35). Editora CRV.
- Verganud, G. (2014). *A criança, a matemática e a realidade: problemas no ensino da matemática na escola elementar*. UFPR.
- Verganud, G. (2017). Prenunciando a teoria dos campos conceituais. Em E. P. Grossi (Org.), *Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud: teoria dos campos conceituais* (pp. 63-70). GEEMPA.

Autores

Valéria Espíndola Lessa. Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
valeria.lessa@erechim.ifrs.edu.br

 <https://orcid.org/0000-0002-0520-5721>

Adriano Canabarro Teixeira. Universidade de Passo Fundo, Brasil. teixeira@upf.br

 <https://orcid.org/0000-0002-7941-3515>