Elementos de una teoría cultural de la objetivación[1]

Luis Radford [2]

RESUMEN

En este artículo se presentan los lineamientos generales de una teoría cultural de la objetivación –una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje. De acuerdo con la teoría, lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada sino sobre todo su modo de ser en tanto que *praxis reflexiva*. El aprendizaje de las matemáticas es tematizado como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados.

- **PALABRAS CLAVE**: Objetivación, pensamiento matemático, semiótica, sentido, significado, significación cultural, signos.

ABSTRACT

In this article, we present the general bases for a cultural theory of objectification. The theory in question deals with the teaching and learning of mathematics and takes its inspiration from some anthropological and historico-cultural schools of knowledge. This theory relies on a non-rationalist epistemology and ontology which give rise, on the one hand, to an anthropological conception of thought, and on the other, to an essentially social conception of learning. According to the theory of objectification, thought is not only characterized by its semiotically mediated nature but more importantly by way of its existence as a *reflexive praxis*. The learning of mathematics is thematized as the acquisition, by the community, of a form of reflection on the world guided by epistemic-cultural modes which have been historically formed.

- **KEY WORDS:** Objectification, mathematical thinking, semiotics, meaning, signification, cultural signification, signs.

Fecha de recepción: Febrero de 2006/ Fecha de aceptación: Abril de 2006

1 An English translation of this article is available at: http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML. Este artículo es resultado de un programa de investigación subvencionado por The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

2 Université Laurentienne, Ontario, Canada.

RESUMO

Este artigo apresenta as linhas gerais de uma teoria cultural da objetivação uma teoria da ensino e a aprendizagem das matemáticas que se inspira de escolas antropológicas e histórico-culturais do conhecimento. Tal teoria se apóia em uma epistemologia e uma ontologia não racionalistas que dão lugar, por um lado, a uma concepção antropológica do pensamento e, por outro, a uma concepção essencialmente social da aprendizagem. De acordo com a teoria, o que caracteriza o pensamento não é somente sua natureza semióticamente mediatizada, mas sobre todo seu modo de ser como *praxis reflexiva*. A aprendizagem das matemáticas é tematizado como a aquisição comunitária de uma forma de reflexão do mundo guiada por modos epistémico-culturais historicamente formados.

- **PALAVRAS CHAVES:** Objetivação, pensamento matemático, semiótica, sentido, significado, significação cultural, signos.

RÉSUMÉ

Dans cet article, on présente les bases générales d’une théorie culturelle de l’objectivation. Il s’agit d’une théorie de l’enseignement et de l’apprentissage des mathématiques qui s’inspire de certaines écoles anthropologiques et historico-culturelles du savoir. Cette théorie s’appuie sur une épistémologie et une ontologie non rationalistes qui donnent lieu, d’une part, à une conception anthropologique de la pensée et, d’autre part, à une conception essentiellement sociale de l’apprentissage. Selon la théorie de l’objectivation, ce qui caractérise la pensée n’est pas seulement sa nature sémiotiquement médiatisée mais surtout son mode d’être en tant que *praxis réflexive*. L’apprentissage des mathématiques est thématisé comme étant l’acquisition communautaire d’une forme de reflexion du monde guidée par des modes épistémo-culturels historiquement formés.

- **MOTS CLÉS:** Objectivation, pensée mathématique, sémiotique, sens , signification, signification culturelle, signes.

Introducción

Incluso para los empiristas, todo aprendizaje supone la actividad del pensamiento. El pensamiento aparece como el sustrato del aprendizaje, aquello a través del cual se establece la relación entre el ser y el mundo. Curiosamente, a pesar de su importancia, y aun si se habla del pensamiento numérico, geométrico, etc., el pensamiento como concepto en sí no forma parte de las teorías didácticas actuales. Sin duda, una de las razones tiene que ver con la idea popular de que el pensamiento es inobservable. Como afirma el fundador del Constructivismo Radical,

> Entre las actividades humanas más intrigantes que no pueden ser observadas, está pensar (thinking) o reflexionar. A veces pueden inferirse los pensamientos o las reflexiones … pero el proceso real del pensamiento queda invisible así como los conceptos que éste usa y el material crudo del cual está compuesto. (von Glasersfeld, 1995, p. 77)

Esta idea de la inobservabilidad del pensamiento es parte de la influencia de la filosofía racionalista y su concepto del ser. Así,

> El ser cartesiano habita un mundo en el que la actividad material es imposible, pues el pensamiento es concebido como una relación entre el ser y las entidades mentales, las ideas, que no son objetos posibles de actividad material. (Bakhurst, 1988, p. 35)

A estos dos elementos –el sujeto y el objeto– que une el pensamiento, las teorías del aprendizaje añaden otro elemento: el profesor, que viene a completar el famoso triángulo didáctico. A menudo, sin embargo, el profesor es revestido de un papel menor: literalmente el de facilitador del aprendizaje. En las medida en que las teorías didácticas conceptualizan al individuo como sujeto auto-regulado y auto equilibrante, desarraigado de su contexto socio-cultural, capaz de reflexionar como científico que explora los alrededores en busca de fenómenos que confirmen la viabilidad de su saber, en la medida en que el individuo es visto –como lo apunta Martin y sus colaboradores– en tanto que individuo que parece llevar de alguna manera en su propio interior las condiciones de su crecimiento, un ser que solamente necesita un entorno facilitador para alcanzar, a través de la experiencia personal, su plena socializacion y potencial intelectual[3], el profesor aparece, contra la abrumadora evidencia de la constatación cotidiana, como simple catalizador del encuentro entre el alumno y el objeto del saber.

La teoría de la objetivación que se esbozará aquí parte de presupuestos diferentes. En oposición a las corrientes racionalistas e idealistas, ésta aboga por una concepción no mentalista del pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados.

En las dos primeras partes del artículo se discuten las bases epistemológicas y ontológicas que dan sustento a la teoría, así como el concepto de pensamiento y su significado antropológico. En las dos últimas partes se aborda el problema de la enseñanza-aprendizaje, en particular a la luz del concepto fundamental de sala de clase como comunidad de aprendizaje.

1. Una concepción no mentalista del pensamiento

En una clase de primer grado de primaria, los alumnos debían resolver un problema sobre una secuencia numérica. La maestra introdujo el problema a través de una historia en la cual una ardilla, al final del verano, lleva cada día dos nueces a su nuevo nido en preparación al invierno que se acerca. En una parte del problema los alumnos debían encontrar el número de

3 Martin (2004), Martin, Sugarman y Thompson (2003).

nueces almacenadas por la ardilla en su nido al final del décimo día, sabiendo que cuando la ardilla encuentra el nido había ya 8 nueces y que la ardilla no come nueces de su provisión de invierno. Cristina, una de las alumnas, empezó a contar de dos en dos: diez, doce, catorce, dieciséis. Como notó que no había pensado en el número del día, decidió empezar el conteo. Sin embargo, hacer las dos cosas al mismo tiempo resultó una tarea muy difícil. Dirigiéndose a Miguel, su compañero de equipo, Cristina dijo: “¡vamos a hacerlo juntos!” Mientras que el resto de la clase continuaba su trabajo en pequeños grupos, Cristina y Miguel fueron al frente del pizarrón y utilizando una regla larga de madera, Cristina empezó a contar de dos en dos, mientras que Miguel contaba los días en voz alta. En la figura 1, Cuando Miguel dice “nueve”, Cristina señala con una regla de madera el número 26 sobre una recta numérica colocada arriba del pizarrón, que es el número de nueces acumuladas hasta el día 9. En la figura 2, Miguel, que continuó contando los días, dice “diez”, mientras que Cristina desplaza la regla hacia la derecha y señala el número 28, que es la respuesta a la pregunta.

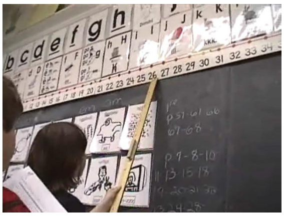


Figura 1. Miguel dice 9 y Cristina señala el número 26.

Figura 2. Miguel dice 10 y Cristina señala el número 28.

Es usual que por pensamiento se entienda una especie de vida interior, una serie de procesos mentales sobre ideas que lleva a cabo un individuo. De acuerdo con esta concepción, a partir de los datos dados por la maestra, Cristina y Miguel, habrían recuperado de su memoria la información pertinente para producir una representación mental del problema. Con la ayuda de esta representación, el pensamiento de Cristina y Miguel se hubiese movido a lo largo de los estados de un espacio-problema, procesando informaciones codificadas quizás bajo la forma de representaciones proposicionales, a través de reglas lógicas o de inferencia.

Esta concepción del pensamiento, como “actividad mental” (de Vega, 1986, p. 439), proviene de la interpretación de la filosofía griega por parte de San Agustín a fines del siglo IV, interpretación que operó, en particular, una transformación del significado inicial del término griego *eidos*. Mientras que Homero, entre otros, utilizaba el término *eidos* en el sentido de algo externo, no mental -“lo que uno mira”, por ejemplo la figura, la forma, la apariencia[4]- para San Agustín *eidos* se refiere a algo que está *dentro del individuo*[5]. Influenciados por esta

4 Por ejemplo, en la traducción al inglés del Libro VIII, líneas 229-30, de la Ilíada, Homero dice: “ Argives, shame on you cowardly creatures, brave in semblance [eidos] only”. (Homer, ca. 800 A.-C.). Estoy en deuda con Eva Firla por su ayuda en la etimología del término eidos.

5 Una discusión sobre la manera en que ocurre esta transformación en la concepción del pensamiento en las matemáticas renacentistas se encuentra en Radford (2004).

transformación, los racionalistas del siglo XVII, como Descartes y Leibniz consideraban que las matemáticas pueden practicarse hasta con los ojos cerrados, pues la mente no necesita el concurso de los sentidos ni de la experiencia para alcanzar las verdades matemáticas: los principios que necesitamos para entender los objetos o para percibir sus propiedades, las leyes eternas de la razón, son "principios internos", es decir que están en nuestro interior (Leibniz, 1966, pp. 34-37).

Antropólogos como Geertz han puesto en evidencia las limitaciones de la concepción de las ideas como "cosas en la mente" y del pensamiento como proceso exclusivamente intracerebral:

> La idea comúnmente aceptada según la cual el funcionamiento mental es un proceso intracerebral que puede ser sólo asistido o amplificado en segundo término por los varios dispositivos artificiales que dicho proceso ha permitido al hombre crear, resulta estar completamente equivocada. Al contrario, siendo imposible una definición adaptativa, completamente específica de los procesos neuronales en términos de parámetros intrínsicos, el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales para su propia operación; y esos recursos no son, en consecuencia, [objetos] añadidos a la actividad mental sino constituyentes de ésta. (Geertz, 1973, p. 76)

La teoría de la objetivación parte de una posición no mentalista del pensamiento y de la actividad mental. Dicha teoría sugiere que el pensamiento es una *praxis cogitans*, esto es una práctica social (Wartofsky, 1979). De manera más precisa, el pensamiento es considerado *una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos*.

En el resto de esta sección serán discutidos los diferentes aspectos de esta definición.

1.1 Mediación semiótica

El carácter mediatizado del pensamiento se refiere al papel, en el sentido de Vygotsky (1981a), que desempeñan los artefactos (objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.) en la realización de la práctica social. Los artefactos no son meras ayudas al pensamiento (como lo plantea la psicología cognitiva) ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de éste[6]. Se piensa con y a través de los artefactos culturales, de manera que hay una región externa que, parafraseando a Voloshinov (1973), llamaremos el *territorio del artefacto.* Es en este territorio donde la subjetividad y la objetividad cultural se imbrican mutuamente y en el que el pensamiento encuentra su espacio de acción y la mente se extiende más allá de la piel (Wertsch, 1991).

De acuerdo con la teoría de la objetivación, el pensamiento de Cristina y Miguel no es, pues, algo que transcurre solamente en el plano cerebral de los alumnos. El pensamiento también ocurre en el plano social, en el territorio del artefacto. La regla de madera, la recta numérica, los signos matemáticos sobre la hoja que sostiene Miguel mientras lee detrás de Cristina, son artefactos que *mediatizan* y *materializan* el pensamiento. Esos artefactos son parte integral del pensamiento.

---

6 Una crítica a la concepción de artefactos como amplificadores se encuentra en Cole (1980).

1.2 La naturaleza reflexiva del pensamiento

La naturaleza reflexiva del pensamiento significa que el pensamiento del individuo no es simple asimilación de una realidad externa (como proponen las escuelas empiristas y conductistas), ni tampoco construcción *ex nihilo* (como proponen ciertas escuelas constructivistas). El pensamiento es una *re-flexión*, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios.

En el ejemplo anterior, el pensamiento de los alumnos se desarrolla a lo largo de una compleja coordinación de actividad perceptual y de acciones semióticamente mediatizadas según la interpretación y los sentidos subjetivos de los alumnos (por ejemplo, reinterpretar el problema sobre una recta numérica, contar de dos en dos, etc.). Al mismo tiempo, el problema sobre el cual los alumnos reflexionan es parte de una realidad históricamente constituida. Problemas sobre secuencias de números (progresiones aritméticas) se encuentran en la matemática babilónica y fueron teorizados luego por los pitagóricos y las diferentes escuelas numerológicas griegas (Robbins, 1921). No sólo dicha realidad no se presenta de manera directa o inmediata, como pensaban los empiristas, sino que tampoco puede ser reconstruida a través de la sola experiencia personal, pues

> Ninguna experiencia personal, por rica que sea, puede llegar a pensar de manera lógica, abstracta o matemática, e individualmente establecer un sistema de ideas. Para hacer esto se requeriría no una vida, sino de miles. (Leontiev, 1968, p. 18)

Uno de los papeles de la cultura (sobre el cual vamos a detenernos en la siguiente sección) es sugerir a los alumnos formas de percibir la realidad y sus fenómenos, formas de apuntar (*viser*), como diría Merleau-Ponty (1945), o formas de intuición, como diría Husserl (1931).

En resumen, dicho de manera más general, la *re-flexividad* del pensamiento consiste en que, desde el punto de vista filogenético, los individuos dan lugar al pensamiento y a los objetos que éste crea. Pero al mismo tiempo, desde el punto de vista ontogenético, en el acto de pensar, un individuo concreto cualquiera es subsumido por su realidad cultural y la historia del pensamiento humano, las cuales orientan su propio pensamiento. “El ser social”, dice Eagleton, “origina el pensamiento, pero al mismo tiempo es abarcado por éste”[7].

1.3 La dimensión antropológica del pensamiento

En la sección precedente se dijo que el pensamiento es considerado como una *re-flexión* mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos. ¿Qué significa que la *re-flexión* que constituye el pensamiento se realice de acuerdo con la *forma o modo de la actividad de los individuos*? Esto significa que la manera en que llegamos a pensar y conocer los objetos del saber está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido mismo de la actividad en cuyo interior ocurre el acto de pensar. Estos significados culturales actúan como enlaces mediadores entre la conciencia individual y la realidad cultural objetiva, y se constituyen

7 Eagleton (1997,p.12).

en prerrequisito y condición de la actividad individual mental (Ilyenkov, 1977, p. 95). Dichos significados culturales *orientan* la actividad y le dan cierta *forma*. Es por eso que pensar no es algo que simplemente nos ponemos a hacer, de forma más o menos antojadiza, en el transcurso del cual de repente encontramos una buena idea. Si bien es cierto que la actividad práctica sensual, mediatizada por los artefactos, entra en los procesos del pensamiento, en su propio contenido, la manera en que esto ocurre está sujeta a los significados culturales en los que se sostiene la actividad.

He aquí un ejemplo. La diferencia entre el pensamiento del escriba babilónico y el del geómetra griego no se reduce únicamente a los tipos de problemas de los que cada uno de ellos se ocupó, ni en los artefactos utilizados para pensar matemáticamente, ni al hecho de que el primero reflexionaba en un contexto ligado con la administración política y económica, mientras que el segundo lo hacia dentro de un contexto aristocrático-filosófico. La diferencia entre el pensamiento matemático babilónico y el griego tiene que ver con el hecho de que la forma de las actividades que enmarcaron esos pensamientos está igualmente subtendida por una *superestructura simbólica* que, a pesar de su importancia, no ha sido tomada en cuenta en las teorizaciones contemporáneas sobre el concepto de actividad[8]. Esta superestructura simbólica, que en otros trabajos hemos llamado *Sistemas Semióticos de Significación Cultural* (Radford 2003a), incluyen significados culturales tales como concepciones en torno a los objetos matemáticos (su naturaleza, su modo de existencia, su relación con el mundo concreto, etc.) y patrones sociales de producción de significados. El pensamiento del escriba babilónico está enmarcado por un pragmatismo realista en el que cobran vigencia los objetos matemáticos "rectángulo", "cuadrado", etc., objetos que el geómetra griego del tiempo de Euclides concibe en término de formas platónicas o abstracciones aristotélicas (ver Figura 3).

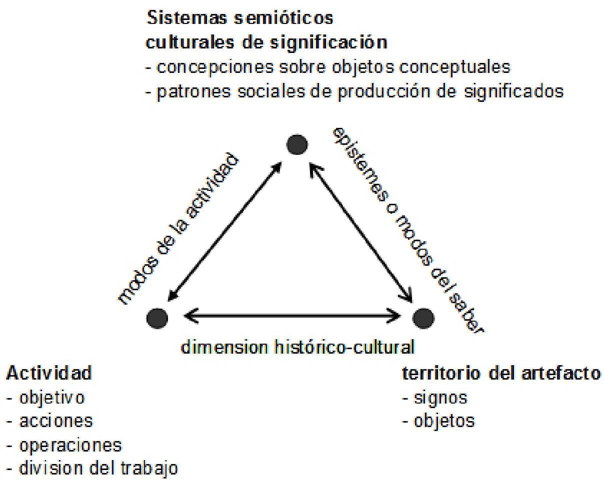


Figura 3. Las flechas muestran la interacción entre los Sistemas Semióticos de Significación Cultural con la actividad y el territorio del artefacto. Dicha interacción general los modos de la actividad y del saber, modos que, en un movimiento dialéctico, vienen a su vez a alimentar a los vértices del triángulo.

8 Leontiev no teorizó la dimensión de la superestructura simbólica que estamos poniendo en evidencia aquí y que es, sin embargo, fundamental para entender el pensamiento en su dimensión antropológica. En la prolongación de la Teoría de la Actividad de Leontiev, hecha por Engeström (1987), dicha superestructura no fue tampoco tomada en cuenta.

En interacción con las actividades (sus objetivos, acciones, distribución del trabajo, etc.) y con la tecnología de la mediación semiótica (el territorio del artefacto), los *Sistemas Semióticos de Significación Cultural* dan lugar, por un lado, a formas o modos de actividad y, por otro lado, a modos específicos del saber o *epistemes* (Foucault, 1966). Mientras que la primera interacción da lugar a maneras particulares en que las actividades son realizadas en un momento histórico, la segunda interacción da lugar a modos de saber específicos que permiten una identificación de los problemas o situaciones "interesantes" y demarcan los métodos, argumentos, evidencias, etc. que serán consideradas válidas en la reflexión que se lleva a cabo sobre los problemas y situaciones en una cultura dada[9].

El triangulo mostrado en la figura 3 ilustra la complejidad de la actividad y la naturaleza diversa de la misma.

La diversidad cultural en las formas de la actividad humana explica, en nuestra perspectiva, la diversidad de formas que toma el pensamiento matemático, y que la historia nos muestra. En vez de ver esas formas históricas como versiones "primitivas" o estados "imperfectos" de un pensamiento que marcha hacia la forma acabada que presenta el pensamiento matemático actual (etnocentrismo), la dimensión antropológica de la teoría de la objetivación considera esas formas como propias de las actividades humanas que la enmarcan y renuncia así a privilegiar la racionalidad occidental como la racionalidad *par excellence*.

Como Spengler (1948, p. 68 y p. 70) sugería hace muchos años, las matemáticas de una cultura no son sino el estilo de la forma con que el hombre percibe su mundo exterior y que, contrario a la idea común, la "esencia" de éstas no es culturalmente invariable. Es precisamente la diversidad cultural la que explica la existencia de universos de números tan diferentes como irreducibles unos a otros (ibid. p. 68).

La manera en que el escriba babilónico, el geómetra griego y el abaquista Renacentista llegan a pensar y a conocer los objetos del saber, la manera en que plantean sus problemas y los considera resueltos, está enmarcada por el modo mismo de la actividad y la episteme cultural correspondiente (Radford, 1997, 2003a, 2003b).

2. Las bases epistemológicas y ontológicas de la Teoría de la objetivación

Cualquier teoría didáctica debe en un momento u otro (a menos de confinarse voluntariamente a una especie de posición ingenua) clarificar su posición ontológica y epistemológica. La posición *ontológica* consiste en precisar el sentido en que la teoría aborda la cuestión de la naturaleza de los objetos conceptuales (en nuestro caso, la naturaleza de los objetos matemáticos, su forma de existencia, etc.). La posición *epistemológica* consiste en precisar la manera en que, según la teoría, esos objetos pueden (o no) llegar a ser conocidos.

9 De allí que no es solamente la acción del sujeto que constituye el esquema del concepto (Piaget) o su sello o emblema (Kant) sino sobre todo el significado de la acción en tanto que momento de la actividad socio-cultural misma (Radford, 2005).

Las teorías didácticas contemporáneas que parten de una aplicación de las matemáticas abrazan a menudo, aun si no es mencionado explícitamente, una ontología realista, y plantean el problema epistemológico en términos de abstracciones. Claro, la situación no es tan simple, como el propio Kant lo reconoció.

Para el realismo, que en un sentido importante es la versión platonista de la racionalidad instrumental (Weber, 1992) que emerge en el renacimiento, la existencia de los objetos matemáticos antecede y es independiente de la actividad de los individuos. Al igual que el platonista, el realista considera que los objetos matemáticos son independientes del tiempo y la cultura. La diferencia es que, mientras los objetos platónicos no se mezclan con el mundo de los mortales, los objetos del realista gobiernan nuestro mundo. Según la ontología realista, esto explica el milagro de la aplicabilidad de las matemáticas a nuestro mundo fenomenal (Colyvan, 2001). Naturalmente, para lograr esto, el realismo hace un acto de fe que consiste en creer que el ascenso de la abstracción hacia los objetos es ciertamente posible. La fe que Platón ponía en el discurso social razonado (logos) y que Descartes ponía en la cogitación consigo mismo, el realismo la pone en el experimento científico.

La posición ontológica y epistemológica de la teoría de la objetivación se aparta de la ontología platonista y realista, y su concepción de los objetos matemáticos como objetos eternos, anteriores a la actividad de los individuos. Al alejarse de la ontología idealista, la teoría se aleja de la idea de que los objetos son productos de una mente que opera replegada sobre sí misma o según las leyes de la lógica (ontología racionalista). La teoría de la objetivación sugiere que los objetos matemáticos son generados históricamente en el curso de la actividad matemática de los individuos. De manera más precisa, los objetos matemáticos *son patrones fijos de actividad reflexiva (en el sentido explicado anteriormente) incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos*.

El objeto círculo, por ejemplo, es un patrón fijo de actividad cuyos orígenes resultan no de la contemplación intelectual de los objetos redondos que los primeros individuos encontraron en su entorno, sino de la actividad sensual que llevó a dichos individuos a notar o a darse cuenta de ella:

> Los hombres pudieron ver el Sol redondo solamente porque redondearon barro con sus manos. Con sus manos dieron forma a la piedra, pulieron sus bordes, le dieron aspecto plano. (Mikhailov, 1980, p. 199)

Esa experiencia sensual laboral queda fijada en el lenguaje, el cual encarna así los significados originales, de manera que

> el significado de la palabra “borde”, “plano”, “línea” no viene de una abstracción de los aspectos generales de las cosas en el proceso de contemplación (Mikhailov, ibid.)

sino de la actividad laboral que se pierde en los orígenes de la humanidad. Lejos de entregarse de lleno a nuestros sentidos, nuestra relación con la naturaleza y el mundo está filtrada por categorías conceptuales y significados culturales que hacen que

> El hombre moderno pueda contemplar la naturaleza solamente a través del prisma de todas las habilidades sociales de trabajo que han sido acumuladas por sus predecesores. (Mikhailov, ibid.)

Terminemos esta sección con una observación general sobre la evolución de los objetos matemáticos que será necesaria para nuestra discusión sobre el aprendizaje. En el curso del tiempo, la actividad laboral va dejando su sello en sus productos conceptuales (Leontiev, 1993, p. 100). Como todo objeto matemático, el concepto de círculo, en tanto que reflexión del mundo en la forma de la actividad de los individuos, ha sido expresado de otras formas a lo largo de la historia. Por ejemplo, a través de una palabra, un dibujo, una fórmula, una tabla numérica. Cada una de esas expresiones ofrece un significado diferente, que se amarra a los anteriores y viene a constituir como diría Husserl capas *noéticas* del objeto. Como es la actividad de los individuos la que forma la raíz genética del objeto conceptual, el objeto posee una dimensión expresiva variada que va más allá de un simple contenido conceptual "científico". Esta dimensión expresiva encierra igualmente aspectos racionales, estéticos y funcionales de su cultura.

3. Aprendizaje como objetivación cultural del saber

3.1 Dos fuentes de elaboración de significados

En las secciones anteriores hemos visto que, desde el punto de vista filogenético, la actividad humana es generadora de los objetos conceptuales, los cuales se transforman a raíz de cambios en las actividades mismas. Desde el punto de vista ontogenético, el problema central es explicar cómo se realiza la adquisición del saber depositado en la cultura: este es un problema fundamental de la didáctica de las matemáticas en particular y del aprendizaje en general.

Las teorías clásicas de la didáctica de las matemáticas plantean el problema en términos de una construcción o re-construcción del saber cultural por parte del alumno[10]. La idea de construcción del saber tiene su origen en la epistemología elaborada por Kant en el siglo XVIII. Para Kant, el individuo no es solamente un pensador ensimismado cuya actividad mental, si es bien realizada, lo llevará a las verdades matemáticas como sostenían los racionalistas (Descartes, Leibniz, etc.); tampoco es un individuo pasivo que recibe las informaciones sensoriales para formar ideas, como proponían los empiristas (Hume, Locke, etc.). Para Kant el pensador es un ser en acción: el individuo es el artesano de su propio pensamiento (esta idea kantiana es analizada en Radford, 2005). En realidad Kant expresa de manera coherente y explícita el cambio epistemomólogico que se venía formando paulatinamente desde la aparición de la manufactura y la emergencia del capitalismo en el Renacimiento y que Arendt (1958) resume de la manera siguiente: la era moderna es marcada por un desplazamiento en la concepción de lo que significa saber; el problema central del conocimiento yace en un desplazamiento que va del *qué* (el objeto del saber) al *cómo* (el proceso), de suerte que, a diferencia del hombre del medioevo, el hombre moderno puede entender solamente aquello que él mismo ha hecho.

10 Naturalmente, hay matices diferentes, según la concepción que la teoría se hace del sujeto que aprende (esto es, del alumno). Partiendo de una posición extrema, el constructivismo radical va más lejos que todas las formas de constructivismo. Brousseau (2004) resume las dificultades a las que se enfrenta dicha teoría afirmando que "En didactique, le constructivisme radical, est une absurdité", y adopta un constructivismo piagetiano más moderado que, inevitablemente, lleva la teoría de situaciones a una serie de paradojas.

Para la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste en construír o reconstruír un conocimiento. *Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura*. La adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados. Es lo que llamaremos más adelante un proceso de *objetivación*. Por el momento, nos interesa discutir dos fuentes importantes de elaboración de significados que subtienden la adquisición del saber.

El saber depositado en los artefactos

Una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de artefactos culturales de nuestro entorno (objetos, instrumentos, etc.) y en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas. Si bien es cierto que ciertos animales llegan a utilizar artefactos, para el animal el artefacto no llega a adquirir una significación durable. El palo de madera que el chimpancé utiliza para alcanzar una fruta pierde su significado luego que la acción ha sido ejecutada (Köhler, 1951). Es por eso que los animales no conservan artefactos. Además –y este es un elemento fundamental de la cognición humana– al contrario de los animales, el ser humano es *afectado* profundamente por el artefacto: al contacto con éste, el ser humano reestructura sus movimientos (Baudrillard, 1968) y forma capacidades motrices e intelectuales nuevas, como la anticipación, la memoria, la percepción (Vygotsky y Luria, 1994).

El mundo de artefactos aparece, pues, como una fuente importante en el proceso de aprendizaje, pero no es el único. Los objetos no pueden hacer clara la inteligencia histórica encarnada en ellos. Para esto se requiere de su uso en actividades y del *contacto con otras personas* que saben "leer" esa inteligencia y ayudarnos a adquirirla. El lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos. La inteligencia de la que es portador dicho lenguaje quedaría sin ser notada sin la actividad social realizada en la escuela. Es en esta dimensión social que constituye para la teoría de la objetivación la segunda fuente esencial del aprendizaje[11].

La interacción social

Aunque la importancia de la dimensión social ha sido subrayada por una infinidad de estudios recientes sobre la interacción en el salón de clases, hay diferencias sutiles en cuanto a su aporte cognitivo (Cobb y Yackel,1996; Sierpinska, 1996; Steinbring, Bartolini Bussi y Sierpinska, 1998;). A menudo, la interacción es vista como negociación de significados o como simple ambiente que ofrece los estímulos de adaptación que requiere el desarrollo cognitivo del alumno. El problema es que el individuo en general y el alumno en particular no encuentran en la sociedad y en el salón de clases solamente una especie de muro con el que se topan y se frotan para adaptarse; no se trata solamente de condiciones "externas" a las que el sujeto debe *acomodar* su actividad. El punto crucial es que las actividades, los medios materiales que las mediatizan y sus objetivos están impregnados de valores científicos, estéticos, éticos, etc. que vienen a recubrir las acciones que realizan los individuos y la reflexión que estas

[11] La escuela histórico-cultural de Vygotsky ha expresado este punto de manera contundente. Ver por ejemplo Leontiev, 1993, pp. 58-59; 1968, pp. 27-29; Vygotsky, 1981b.

acciones exigen. Tal como fue discutido en la primera parte de este artículo, las acciones que los individuos realizan están sumergidas en modos culturales de actividad. Es por eso que el salón de clases no puede verse como un espacio cerrado, replegado en sí mismo, en el cual se negocian las normas del saber, pues esas normas tienen toda una historia cultural y como tal pre-existen a la interacción que ocurre en el salón de clases. Tampoco puede verse como una especie de ambiente biológico en el que el individuo opera según sus mecanismos invariables de adaptación general.

En la perspectiva que estamos sugiriendo, la interacción desempeña un papel diferente. En lugar de desempañar una función meramente de adaptación, de catalizadora o facilitadora, en la perspectiva teórica que estamos esbozando la interacción es consustancial del aprendizaje.

Vemos, pues, que hay dos elementos que desempeñan un papel básico en la adquisición del saber que son el mundo material y la dimensión social. La asignación de significados que reposa sobre esas dimensiones tiene una importancia psicológica profunda en la medida en que es, a la vez, toma de conciencia de conceptos culturales y proceso de formación de las capacidades específicas del individuo. Es por eso que, dentro de nuestra perspectiva, aprender no es simplemente apropiarse de algo o asimilar algo, sino que es el proceso mismo en que se forman nuestras capacidades humanas.

3.2 La actividad de aprendizaje

Un elemento central en el concepto de actividad es el *objetivo* de la misma (Leontiev, 1993). El objetivo puede ser, por ejemplo, que los alumnos elaboren una fórmula algebraica en el contexto de una generalización aritmética, que aprendan un método algebraico de resolución de problemas, que aprendan a demostrar proposiciones geométricas, etc.. Aunque el objetivo es claro para el profesor, en general éste no lo es para los alumnos. Si el objetivo fuese claro par estos últimos, no habría nada por aprender.

Dentro del proyecto didáctico de la clase, para que dicho objetivo se pueda realizar, el profesor propone a los alumnos una serie de problemas matemáticos. Resolver esos problemas se convierte en *fines* que guían las acciones de los alumnos. Estos problemas -cargados desde el principio con un contenido cultural y conceptual- forman trayectorias potenciales para alcanzar el objetivo.

Debemos subrayar que, desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, hacer matemáticas no se reduce a resolver problemas. Sin quitarle méritos al problema en la formación del conocimiento (ver por ejemplo Bachelard, 1986), para nosotros la resolución de problemas no es el fin sino *un* medio para alcanzar ese tipo de *praxis cogitans* o reflexión cultural que llamamos pensamiento matemático. De manera, pues, que detrás del objetivo de la lección, yace un objetivo mayor y más importante, el objetivo general de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que es la elaboración por parte del alumno de una reflexión definida como relación *común* y *activa* con su realidad histórico-cultural.

En otras palabras, aprender matemáticas no es simplemente aprender a *hacer* matemáticas (resolver problemas) sino aprender a *ser* en matemáticas. La diferencia entre *hacer* y *ser* es inmensa y, como veremos más adelante, tiene consecuencias importantes no solamente en el diseño de las actividades sino en la organización misma de la clase y el papel que allí juegan alumnos y profesores.

3.3 La objetivación del saber

En forma sucinta, el objetivo mayor de la enseñanza de las matemáticas es que el alumno aprenda a reflexionar de acuerdo con ciertas formas culturales de pensamiento históricamente constituidas que la distinguen de otras formas de reflexión (por ejemplo de tipo literario o musical) en la medida en que en la reflexión matemática, la relación del individuo con el mundo enfatiza ideas en torno a la forma, el número, la medida, el tiempo, el espacio, etc. Es este énfasis el que distingue el pensamiento matemático de otras formas de pensamiento.

Para conseguir ese objetivo, debemos recurrir a la práctica, por la sencilla razón de que no disponemos de un lenguaje que pueda enunciar y capturar en el enunciado (en el sentido clásico del término, es decir, como conjunto articulado de sonidos vocales) el pensamiento matemático. No hay, en efecto, una formulación lingüística posible del pensamiento matemático de cuya lectura -por atenta que sea- pueda resultar la comprensión de éste. El pensamiento, ya lo hemos dicho (Radford, 2003b), está más allá del discurso: es una *praxis cogitans*, algo que se aprende haciendo.

La teoría de la objetivación no ve, sin embargo, dicho aprendizaje como simple imitación o participación conforme a una práctica ya establecida, sino como la fusión entre una subjetividad que busca percibir ese lingüísticamente inarticulable modo de reflexionar y este último que no puede sino *mostrarse* a través de la acción.

Sin duda, hay una relación estrecha entre el pensamiento matemático y sus objetos en el sentido en que estos objetos no pueden ser percibidos sino a través de un pensamiento, el cual, a su vez, en el momento de su constitución ontogenética, debe apuntar hacia uno o más de esos objetos. ¿Pero cómo es esto posible? Para constituirse, el pensamiento parece suponer la existencia del objeto. Por otro lado, el objeto no puede llegar a ser sin el pensamiento (entendido como *praxis cogitans*) que lo produce.

El misterio de esta relación se disuelve si regresamos a lo dicho en la primera parte de este artículo. El objeto matemático concebido como *patrón o patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social* no podrá ser percibido, sino es a través de la actividad reflexiva misma.

De allí que para llegar a conocer los objetos y productos del desarrollo cultural es “necesario realizar en torno a los mismos determinada actividad, es decir, una actividad que produzca los rasgos esenciales de aquélla, encarnada, ‘acumulada’ en dichos objetos.” (Leontiev, 1968, p. 21)

La enseñanza consiste en poner y mantener en movimiento actividades contextuales, situadas en el espacio y el tiempo, que se encaminan hacia un patrón fijo de actividad reflexiva incrustada en la cultura.

Ese movimiento, que podría expresarse como el movimiento del proceso al objeto (Sfard, 1991; Gray y Tall, 1994), posee tres características esenciales. Primero, el objeto no es un objeto monolítico u homogéneo. Es un objeto compuesto de *laderas de generalidad* (Radford, en prensa-1). Segundo, desde el punto de vista epistemológico, dichas laderas serán más o menos generales de acuerdo con las características de los significados culturales del patrón fijo de actividad en cuestión (por ejemplo, el movimiento kinestésico que forma el círculo; la fórmula simbólica que lo expresa como conjunto de puntos a igual distancia de su centro, etc.). Tercero, desde el punto de vista cognitivo, dichas laderas de generalidad son notadas de manera *progresiva* por el alumno. El "¡Aha!" que se convirtió tan popular en parte gracias a la teoría de la Gestalt es a lo sumo cierto en tanto que punto final de un largo proceso de toma de conciencia.

El aprendizaje consiste en aprender a notar o percibir esas laderas de generalidad. Como el aprendizaje es *re-flexión*, aprender supone un proceso dialéctico entre sujeto y objeto mediatizado por la cultura, un proceso en el que, a través de su acción (sensorial o intelectual) el sujeto nota o toma conciencia del objeto.

La objetivación es, precisamente, ese proceso social de toma de conciencia progresiva del *eidos* homérico, esto es, de algo frente a nosotros una figura, una forma algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido. Es ese notar que se desvela en el gesto que cuenta o que señala, notar que se descubre en la intención que se plasma en el signo o en el movimiento kinestésico que mediatiza el artefacto en el curso de la actividad práctica sensorial, algo susceptible de convertirse en acción reproducible, cuyo significado apunta hacia ese patrón eidético fijo de acciones incrustadas en la cultura que es el objeto mismo[12].

4. El salón de clases como comunidad de aprendizaje

4.1 Ser-con-otros

El salón de clases es el espacio social en donde el alumno *elabora* esa reflexión definida como relación *común* y *activa* con su realidad histórico-cultural[13]. Es aquí en donde ocurre el encuentro del sujeto y el objeto del saber. La objetivación que permite dicho encuentro no es un proceso individual, sino social. La sociabilidad del proceso, empero, no debe ser entendida como simple interacción de negocios, una especie de juego entre adversarios capitalistas en el que cada uno invierte bienes con la esperanza de terminar con más. La sociabilidad significa aquí el proceso de formación de la conciencia, que Leontiev caracterizaba como *co-sapiencia*, es decir, saber en común o saber-con-otros.

Naturalmente, estas ideas implican una reconceptualización del alumno y su papel en el acto de aprendizaje. En la medida en que las teorías contemporáneas de la didáctica de las matemáticas se amparan del concepto de individuo formulado por Kant y otros filósofos del Siglo de las Luces, la educación se justifica en tanto que ésta asegura la formación de un sujeto autónomo (entendida en el sentido de ser capaz de hacer algo por sí mismo, sin ayuda de los demás). La autonomía es, en efecto, un tema central de la educación moderna que ha servido de fundamento a las teorizaciones del socioconstructivismo (ver, por ejemplo, Yackel and Cobb, 1996) y de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986; Brousseau y Gibel, 2005, p. 22). El racionalismo que pesa sobre este concepto de autonomía viene de su alianza con otro concepto clave kantiano: el de la libertad. No puede haber autonomía sin libertad, y la libertad significa el uso conveniente de la Razón según sus propios principios, pues "no vemos los principios sino a través de la razón" (Kant, 1980, p. 119).

---

12 Ver Radford, 2002, 2003c, 2004.

13 El término *elaborar* debe ser entendido en su sentido etimológico medieval, como *–labMrtus* (de ex-labMrre), es decir de *labor o trabajo sensual conjunto*.

Como el Siglo de las Luces no se planteó la posibilidad de una multiplicidad de razones, sino que postuló la razón occidental como *la* razón, la convivencia en comunidad implica el respeto a un deber que, en el fondo, no es sino una manifestación de esa razón universal, cuyo epitome son las matemáticas. Es esa supuesta universalidad de la razón la que lleva a Kant a fusionar las dimensiones ética, política y epistemológica, y a afirmar que "hacer algo por deber es obedecer a la razón." (Kant, 1980, p. 129).

Para la teoría de la objetivación, el funcionamiento del salón de clases y el papel del profesor no se limitan a buscar el logro de la autonomía. Más importante es aprender a vivir en la comunidad que es el salón de clases (en un sentido amplio), aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, a *ser-con-otros* (Radford, en prensa-2).

Como "lo social es irreducible a los individuos, por muy numerosos que éstos sean" (Todorov, 1984, p. 19), la sociabilidad del salón de clases significa una unión a través de vínculos y relaciones que son prerrequisitos de esa reflexión que hemos mencionado anteriormente, definida como relación *común* y *activa* que elabora el alumno con su realidad histórico-cultural. Esa sociabilidad no solamente deja su huella en el contenido conceptual perseguido, sino que es consustancial de éste.

La naturaleza intrínsicamente social del saber y del pensamiento matemático nos ha llevado, pues, a concebir la sala de clase como una comunidad de aprendizaje, cuyo funcionamiento está orientado a la objetivación del saber. Sus miembros trabajan de forma que:

- la comunidad permite la realización personal de cada individuo;
- cada miembro de la comunidad tiene su lugar;
- cada miembro es respetado;
- cada miembro respeta los otros y los valores de su comunidad;
- la comunidad es flexible en las ideas y sus formas de expresión;
- la comunidad abre espacio a la subversión a fin de asegurar:

  – la modification,
  – el cambio
  – y su transformación

Ser miembro de la comunidad no es algo que va de sí. Para ser miembro, los alumnos son alentados a:

- compartir los objetivos de la comunidad;
- implicarse en las acciones del salón de clases;
- comunicar con los otros.

Queremos insistir en que los lineamientos anteriores no son simplemente códigos de conducta, sino, al contrario, son índices de formas de *ser* en matemáticas (y por consiguiente de *saber* matemáticas) en el sentido más estricto del término.

Para resumir las ideas anteriores, subrayemos el hecho de que, para la teoría de la objetivación, la autonomía no es suficiente para dar cuenta de la forma de ser en matemáticas. El alumno que resuelve con éxito problemas, pero que es incapaz de explicarse o de entender o interesarse en las soluciones de los otros o de ayudar a los otros a comprender la suya está apenas a medio camino de lo que entendemos por éxito en matemáticas. Es por eso que el profesor dispone de una serie de *acciones de inclusión*. Estas acciones son concebidas de manera que el alumno que resuelve correctamente problemas matemáticos sin poder atender a la dimensión interpersonal de la comunidad gane poco a poco su espacio en la misma[14]. La idea de autonomía como ser autosuficiente es remplazada por la idea de *ser-con-otros*. En vez de concebir la clase como espacio de negociación personal de significados o como medio que enfrenta al alumno, la clase colabora y coopera con el alumno para que éste se convierta en parte de la comunidad.

4.2 Tres fases de la actividad del salón de clases

El trabajo en pequeños grupos

Para implementar la comunidad de aprendizaje, el profesor favorece el trabajo en pequeños grupos, los cuales pueden, en el curso de la lección de matemáticas intercambiar ideas con otros grupos. De esa cuenta, la ingeniería didáctica (Artigue, 1988) no se limita al diseño de los problemas matemáticos sino incluye una gestión del salón de clases operacional con los principios comunitarios mencionados anteriormente.

En cada pequeño grupo, los alumnos se apoyan mutuamente para alcanzar la solución de los problemas que se les ha dado. Los alumnos y el profesor están conscientes de que hay diferencias individuales que llevan a formas diferentes de participación. Incluso participaciones que parecen "menos profundas" (como las participaciones periféricas, en el sentido de Lave y Wenger, 1991) son bienvenidas, a condición de que el alumno en cuestión *esté-con-su-grupo*, esto es, que el alumno por ejemplo esté atento a lo que el grupo está discutiendo, solicite explicaciones que le permitan seguir la discusión y las acciones, colabore con su grupo, etc.

El profesor debe proponer tareas y problemas que conlleven a la objetivación del saber. Ciertas condiciones deben ser cumplidas. Por ejemplo, para mantener una reflexión sostenida entre los miembros del grupo, con el profesor y luego con otros grupos, los problemas deben ser suficientemente complejos para favorecer la aparición de diversas formas de abordar el problema y engendrar así la discusión.

En nuestro modelo, el profesor circula entre los grupos y discute con los alumnos. Aunque en general el profesor deja a los alumnos discutir entre ellos sin intervenir innecesariamente, éste va intervenir en momentos en que, por ejemplo, cree que la discusión se ha estancado o que los alumnos no han ido suficientemente lejos como se esperaba.

Para ilustrar estos principios, veamos un extracto de una lección sobre la interpretación del movimiento en una clase de décimo grado (15-16 años). La lección incluía un artefacto que mide la distancia a un objeto a través de la emisión-recepción de ondas (Calculador Based Ranger o CBR; ver figura 4).

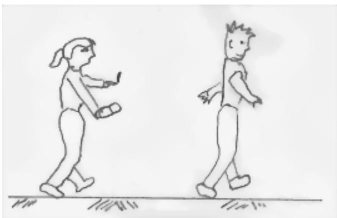
---

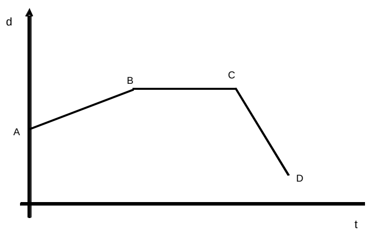
[14] Ver nuestro libro, *Communication et apprentissage* (Radford y Demers, 2004).

Figure 4. El Calculator Based Ranger® (a la izquierda) es un artefacto concebido para estudiar los objetos en movimiento: a través de la emisión de ondas, el CBR recoge datos de su distancia al objeto en cuestión. Al conectarse a una calculadora gráfica (por ejemplo, TI-83+®, mostrada a la derecha), es posible obtener gráficas espacio-tiempo, velocidad-tiempo, etc.

Los alumnos habían empezado a utilizar el CBR en noveno grado. El enunciado de uno de los problemas dado a los alumnos fue el siguiente:

> Dos alumnos, Pierre et Marthe, se colocan a una distancia de un metro y empiezan a caminar en línea recta. Marthe, que está detrás de Pierre, lleva una calculadora conectada a un CBR. El gráfico obtenido se encuentra reproducido abajo. Describan cómo Pierre y Marthe han podido hacer para obtener ese gráfico.





En el problema que seguía en el diseño de la actividad, los alumnos debían verificar su hipótesis, efectuando la marcha en uno de los corredores de la escuela.

Como de costumbre, los alumnos trabajaron en pequeños grupos de 3. En los problemas anteriores, los alumnos habían sido confrontados con situaciones de movimiento en las que uno de los dos, el CBR o el objeto, quedaban fijos. En este caso, los dos están en movimiento. Como esperábamos, las dificultades conceptuales fueron importantes. En general, los alumnos transformaban el enunciado del problema en uno que podían resolver: los alumnos suponían que Marthe no se mueve. Esto queda ilustrado a través de la discusión que tuvieron Samuel, Carla y Jenny de la cual reproducimos a continuación algunas partes:

1. Samuel: Ok, Pierre se mueve despacio de « A » a « B » … Se detuvo algunos segundos (ver figura 5, foto 1), luego corrió a D (figura 5, foto 2).

2. Carla: Ah, Sí! caminó, se detuvo, corrió.

3. Jenny: Mm-hmm.

4. Samuel: Espera, espera un segundo… [Pierre] regresó verdaderamente rápido.

5. Carla: Es cierto. Empezó despacio después *(inaudible)* luego se detuvo, luego corrió.

6. Samuel: Sí, hacia atrás.

7. Jenny: (dirigiéndose a Carla) Sí, hacia atrás, porque [el segmento] baja (haciendo un gesto hacia abajo con la mano; ver figura 5, foto 3).

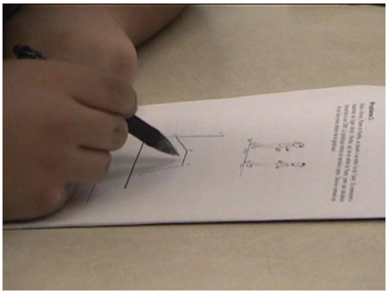


Foto 1:…Se detuvo algunos segundos …(línea 1).

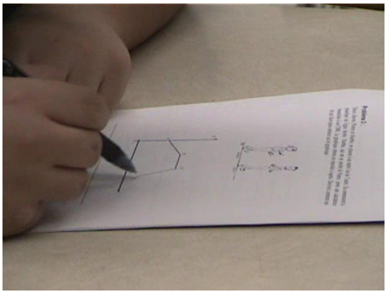


Foto 2: … luego corrió a D (línea 1).

Foto 3: porque [el segmento] baja.

Figura 5. Fotos 1 a 3.

Nuestro interés aquí no es entrar en un análisis de errores, sino de mostrar elementos del proceso social de objetivación del saber. Conviene notar, a ese respecto, que no consideramos la intervención de Carla en la línea 2 como simple réplica o imitación de la preposición enunciada por Samuel en la línea 1. Desde la perspectiva de la objetivación, Carla se *apropia* la interpretación del fenómeno que le es ofrecida por Samuel. La apropiación pasa por una verbalización que Carla reformula en términos más breves (por ejemplo, no hay alusión a las letras A, B. etc.). La preposición de Samuel y el movimiento gestual hechos con la pluma sobre el gráfico son para Carla la materia prima a partir de la cual ella alcanza a ver algo que antes no veía.

Si Samuel ofrece a Carla acceso a una primera interpretación del problema (por rudimentaria que ésta sea), a su vez, la reformulación de Carla permite a Samuel darse cuenta de que hay algo importante que ha quedado sin atenderse: que, para dar cuenta de la diferencia de inclinaciones de los segmentos, en la historia del problema Pierre ha debido regresar “verdaderamente rápido” (línea 4). Carla reformula de nuevo la idea y, en la línea 6, Samuel insiste en que Pierre no solamente ha debido correr más rápido, sino en cierta dirección (“hacia atrás”). En la línea 7, haciendo un gesto con la mano (ver Figura 5, foto 3), Jenny propone una razón.

Los alumnos continúan discutiendo por un buen momento. La interpretación obtenida no convence a Carla y a Jenny, pues ésta asume que Marthe no camina.

La discusión continúa entre ellos:

8. Jenny: No … heuu… ¡(los dos) tienen que caminar!

9. Samuel: Si ella hiciera eso [es decir, caminara] exactamente a la misma distancia [de Pierre] … como si ella hiciera *esto* (ver el gesto en la figura 6), sería una línea plana [es decir horizontal] (…) por lo tanto ¡ella debe quedarse quieta y él debe moverse!

10.Jenny: ¡Pero eso [el enunciado del problema] dice que los dos caminan! (…)

11.Samuel: (después de un momento de silencio) Talvez ella camina, pero él camina un poco más rápido que ella.

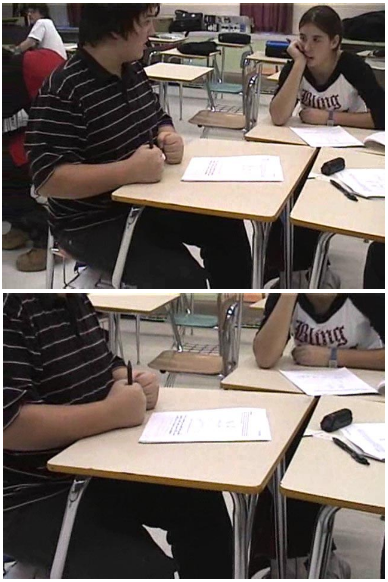


Figura 6. Para simular el caso en que Pierre y Marthe caminan,Samuel desplaza en forma continua las manos de derecha a izquierda, dejándolas a la misma distancia.

En este momento, la descripción del movimiento deja de ser la descripción respecto a un punto fijo y alcanza la descripción del movimiento relativo. A través de ese intercambio, los alumnos consiguen acercarse un poco más a la forma cultural de reflexión vehiculado por la actividad. Será necesaria la expresión corporal con el CBR y simbólica del movimiento (a través de la experiencia física en el corredor de la escuela y luego el cálculo de las ecuaciones de los segmentos) para que los alumnos alcancen una objetivación mayor.

Intercambio entre pequeños grupos

Las reflexiones producidas por los pequeños grupos son, a menudo, objeto de intercambio. Un grupo puede intercambiar sus soluciones con otro grupo con el fin de entender otros puntos de vista y mejorar los propios. La figura 7 muestra el encuentro de dos grupos de alumnos sobre el problema de Pierre y Marthe. Los grupos llegaron a un punto en que un acuerdo era imposible. Marc y su grupo planteaban la explicación en términos de cambios de velocidad. Por el contrario, Dona y su grupo afirmaban que la velocidad de Pierre con relación a Marthe es constante. Ante la imposibilidad de poder llegar a un consenso, los alumnos optaron por llamar a la profesora. En la figura 7, Marc (a la izquierda) explica su razonamiento a la profesora (de píe, detrás de los alumnos):

1.Marc: ¿Y si los dos comienzan a la misma velocidad, luego él empieza a correr más rápido? (Marc apoya su argumento con un gesto de manos)

2.Profesora: ¿Tú supones que el muchacho [Pierre] camina cada vez más rápido?

3.Dona: (oponiéndose a la idea) ¡La velocidad es constante! (…)¡No hay curvas! Eso quiere decir que él [Pierre] camina la misma distancia por segundo.

Figura 7. Arriba, la discusión entre los Grupos. Abajo, Marc explica la solución de su grupo a la profesora, que aparece en la foto de píe, entre Marc y Dona.

La profesora sugiere a los alumnos pensar en la situación de dos móviles que viajan a 80 k/h y 100 k/h. Marc se da cuenta de que el aumento de distancia no significa necesariamente un aumento de velocidad. La profesora se cerciora de que los otros alumnos del grupo de Marc hayan entendido la diferencia (dice, por ejemplo: "tú, Edgar ¿qué piensas ahora?") y aprovecha las circunstancias para hacer reflexionar a los alumnos sobre el efecto en las gráficas que tendría un movimiento de velocidad que aumenta, como Marc proponía en la línea 1.

En este caso, los alumnos notan las diferencias entre los argumentos e interpretaciones. Sin embargo, muchas veces los alumnos no se dan cuenta de que los argumentos presentados son diferentes o tienden a minimizar las diferencias. Una de las dificultades en la adquisición de formas de reflexión matemática es el de notar las diferencias entre los argumentos. Naturalmente, tanto en un caso como en el otro, el profesor desempeña un papel crucial. En los dos casos, el profesor entra en la zona de desarrollo próximo del grupo. Lo que es más importante es que el profesor no entra a esa zona de manera neutra, sino con un proyecto conceptual preciso.

Discusiones generales

La discusión general es otra manera de intercambiar ideas y discutirlas. Es otro momento que posee el profesor para lanzar la discusión en puntos que requieren mayor profundidad de acuerdo con los estándares curriculares. Por ejemplo, durante la discusión general del problema de Pierre y Marte, la profesora aprovecha para subrayar algo sobre lo cual no todos los grupos habían recapacitado, a saber que la posición del segmento BC no significa necesariamente que Pierre y Marthe están detenidos ni que la posición del segmento CD significa necesariamente que Pierre camina en la dirección de Marthe. En la figura 8, dos alumnos ejecutan la marcha frente a toda la clase, mientras Susan, la tercera alumna de ese grupo (no visible en la foto), explica a toda la clase:

1. Susan : Hem, la persona que estaba enfrente caminaba más rápido que la que estaba atrás, eso lograba una distancia mayor entre el CBR y el punto objetivo. Luego … hem… en seguida B y C en nuestro diagrama [Pierre y Marthe] caminaban a la misma velocidad, por tanto había la misma distancia entre ellos. Luego, … ¿tú?

2. Profesora :Sí, ¡continua!

3. Susan: luego … hem … al final, la persona que estaba atrás camina más rápido para acercarse a la persona que estaba adelante (ver figura 8).

Figura 8. El alumno que camina atrás se acerca al otro alumno

Síntesis

Algunas teorías de la didáctica de las matemáticas han excluido intencionalmente los aspectos psicológicos del aprendizaje y se han ocupado de las situaciones matemáticas que pueden favorecer la emergencia de razonamientos matemáticos precisos. Tal es el caso de la teoría de situaciones. Por el contrario, otras teorías se han detenido en los mecanismos de negociación de significados en el aula y la manera en que esa negociación explica la construcción de representaciones que se hace el alumno del mundo. Tal es el caso del socio-constructivismo. La deuda intelectual que tiene la teoría de la objetivación con esas teorías es inmensa, y nuestras referencias a ellas no deben ser vistas negativamente. Dichas teorías aparecen sustentadas por principios fundamentales y operacionales claros que les confieren una solidez impecable. Sin embargo, la teoría de la objetivación parte de otros principios. Por un lado, ésta parte de la idea de que la dimensión psicológica debe ser objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas. Por otro lado, sugiere que los significados que circulan en el aula no pueden ser confinados a la dimensión interactiva que ocurre en el aula misma, sino que tienen que ser conceptualizados en el contexto de su dimensión histórico-cultural.

De esa cuenta, la teoría de la objetivación propone una didáctica anclada en principios en los que el aprendizaje es visto en tanto que actividad social (*praxis cogitans*) arraigada en una tradición cultural que la antecede. Sus principios fundamentales se articulan alrededor de cinco conceptos relacionados entre sí.

El primero es un concepto de orden psicológico: el concepto de *pensamiento*, elaborado en términos no mentalistas. Hemos propuesto que el pensamiento es sobre todo una forma de *re-flexión* activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.), el lenguaje, los signos, etc. Este concepto de *re-flexión* difiere del concepto idealista y racionalista en el que la reflexión "no es otra cosa que una atención a aquello que ya está en nosotros" (Leibniz, 1966, p. 36), y que la psicología cognitiva contemporánea llama a menudo meta-cognición. Para la teoría de la objetivación, la *re-flexión* es un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios. Dicha concepción se inscribe en una

> forma peculiar de cognición en la que el acto del conocimiento altera lo que busca. Al tratar de entenderme yo mismo y mi condición, no puedo nunca quedarme idéntico a mí mismo, pues el yo que estaba entendiendo al igual que el yo entendido son ahora diferentes de lo que eran

> antes. Y si quisiera entender todo esto, todo este proceso sería de nuevo puesto en marcha (…) Como este saber también mueve a la gente a cambiar sus condiciones de manera práctica, éste se vuelve una especie de fuerza política y social, una parte de la situación material examinada y no mera reflexion [contemplativa] sobre algo. (Eagleton, 1997, p. 4)

El segundo concepto de la teoría es de orden socio-cultural. Es el concepto de aprendizaje. El aprendizaje es visto como la actividad a través de la cual los individuos entran en relación no solamente con el mundo de los objetos culturales (plano sujeto-objeto) sino con otros individuos (plano sujeto-sujeto o plano de la interacción) y adquieren, en el seguimiento común del objetivo y en el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana (Leontiev, 1993).

Este concepto socio-cultural se imbrica inmediatamente con otro –el tercer concepto de la teoría– de naturaleza epistemológica. Como toda actividad, el aprendizaje está enmarcado por *sistemas semióticos de significación cultural* que "naturalizan" las formas de cuestionamiento y de investigación del mundo. Aristóteles hubiese probablemente incitado a nuestros alumnos a plantear y a estudiar el problema de Pierre y Marthe en términos diferentes, dado que dentro del marco aristotélico de referencia, no son el tiempo y el espacio los que describen al movimiento sino, al contrario, el tiempo es un derivado del movimiento[15]. Nuestros alumnos pertenecen a una cultura en donde la medida del tiempo se ha vuelto omnipresente, midiendo no sólo el movimiento sino la labor humana, el crecimiento del dinero (tazas de interés), etc., una cultura en donde

> La temporalidad de la experiencia –esta noción del tiempo como el marco dentro del cual las formas de vida se encuentran inmersas y llevan su existencia– es la característica del mundo moderno. (Bender y Wellbery, 1991, p.1)

Los conceptos anteriores permiten reformular, en términos generales, el aprendizaje de las matemáticas como la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados.

Ahora bien, como el aprendizaje es siempre acerca de algo, los conceptos anteriores vienen a ser completados por un cuarto concepto de naturaleza ontológica –el de objetos matemáticos, que hemos definido como *patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la práctica social mediatizada por los artefactos.*

Para volver operacional la teoría en su vertiente ontogenética, fue necesario introducir un quinto concepto de naturaleza semiótico-cognitiva –el de objetivación o toma de conciencia subjetiva del objeto cultural. En este contexto, y a la luz de los conceptos fundamentales anteriores, el aprendizaje se define como proceso social

15 "We take cognizance of time, when we have defined the movement by defining the before and after; and only then we say that time has been (has elapsed) when we perceive the before and after in the movement…for, when we think [noesomen] that the extremities are other than the middle, and the soul pronounces the present/instants [nun] to be two, the one before, the other after, it is only then that we say that this is time" (Physics IV, 11, 219a 22-25; 26-29).

de *objetivación* de esos patrones externos de acción fijos en la cultura.

Desde el punto de vista metodológico, nuestro concepto no mentalista ni racionalista del pensamiento nos conduce a prestar atención a los medios semióticos de objetivación que utiliza el alumno en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales. Las fotos que hemos incluido no tienen como fin "embellecer el texto" sino, precisamente, mostrar algunos de esos medios semióticos de objetivación, como los gestos, el lenguaje, los símbolos. Gestos, lenguaje, símbolos, se convierten así en constituyentes mismos del acto cognitivo que posiciona el objeto conceptual no dentro de la cabeza sino en el plano social. Los cortos ejemplos del salón de clases mencionados al inicio y al final del artículo, dan una idea de la manera en que la teoría indaga esa objetivación del saber que se mueve a lo largo de los planos de la interacción y de la acción mediatizada (el territorio del artefacto)[16].

Finalmente, nuestra posición teórica respecto al aprendizaje conlleva a un replanteamiento del concepto del individuo que aprende. Como lo hemos mencionado, el concepto de individuo de la era moderna que aparece con la emergencia del capitalismo en los siglos XV y XVI, está fundamentado en el concepto de autonomía y de libertad. La teoría de la objetivación parte de otro punto y ofrece un concepto diferente: el individuo es individuo en tanto que es *ser-con-otros*.

Referencias

Arendt, H. (1958). *The Human Condition*: The University of Chicago Press.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bakhurst, D. (1988). Activity, Consciousness and Communication. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, *10*(2), 31-39.

Baudrillard, J. (1968). *Le système des objets*. Paris: Gallimard.

Bender, J. y Wellbery, D. E. (1991). *Chronotypes: The Construction of Time*. Palo Alto: Stanford University Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

[16] Ejemplos detallados pueden encontrarse en Radford, 2000, 2003c; Radford, Bardini y Sabena, 2005; Sabena, Radford y Bardini, 2005.

Brousseau, G. (2004). *Une modélisation de l'enseignement des mathématiques*. Conferencia plenaria presentada en el Convegno di didattica della matematica, 24-25 de Septiembre, Locarno, Suiza.

Brousseau, G. y P. Gibel (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58.

Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31*(34), 175-190.

Cole, M., y Griffin, P. (1980). Cultural amplifiers reconsidered. In D. R. Olson (Ed.), *The Social Foundations of Language and Thought, Essays in Honor of Jerome S. Bruner* (pp. 343-364). New York/London: W. W. Norton & Company.

Colyvan, M. (2001). The miracle of applied mathematics. *Synthese*, *127*, 265-277.

de Vega, M. (1986). *Introduccion a la psicologia cognitiva.* Mexico: Alianza Editorial Mexicana.

Eagleton, T. (1997). *Marx*. London, Phoenix.

Engeström, Y. (1987). *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki, Orienta-Konsultit Oy.

Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses.* Paris: Éditions Gallimard.

Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures*. New York: Basic Books.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (2), 115– 141.

Homer (ca. 800 A.-C.). *The Iliad.* The Internet Classics, translated by Samuel Butler. http:// classics.mit.edu/Homer/iliad.html.

Husserl, E. (1931). *Ideas. General Introduction to Pure Phenomenology.* London, New York: George Allen & Unwin.

Ilyenkov, E. (1977). The Concept of the Ideal. *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism* (pp. 71-99). Moscow: Progress Publishers.

Kant, E. (1980). *Réflexions sur l'éducation*. Paris: Vrin.

Köhler, W. (1951). *The Mentality of Apes*. New York: The Humanities Press / London: Routledge and Kegan Paul.

Lave, J. y E. Wenger (1991). *Situated learning; legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1966). *Nouveaux essais sur l'entendement humain.* Paris: Garnier Flammarion.

Leontiev, A. N. (1968). El hombre y la cultura. En *El hombre y la cultura: problemas téoricos sobre educación* (pp. 9-48). México: Editorial Grijalbo.

Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.

Martin, J. (2004). The Educational Inadequacy of Conceptions of Self in Educational Psychology. *Interchange: A quarterly review of Education*, *35*, 185-208.

Martin, J., Sugarman, J. y Thompson, J. (2003). *Psychology and the Question of Agency*. New York: SUNY.

Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénomenologie de la perception*. Paris: Gallimard.

Mikhailov, F. T. (1980) *The Riddle of the Self*. Moscow: Progress Publishers.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26-33.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.

Radford, L. (2003b). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123-150.

Radford, L. (2003c). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and other ambiguities], *La Matematica e la sua didattic*a, 2004, no. 1, 4-23. [Traducción al inglés en: http://laurentian.ca/educ/lradford/essences.pdf]

Radford, L. (2005). The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (pp. 137-152). New York: Springer.

Radford, L. (en prensa-1). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns – A semiotic Perspective. *Proceedings of the 28th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA), Mérida, Yucatán, México.*

Radford, L. (en prensa-2). Semiótica cultural y cognición. En: R. Cantoral y O. Covián (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. México.

Radford, L., Bardini, C., y Sabena, C. (2005). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4), 17 - 21 February 2005, Sant Feliu de Guíxols, Spain. [http://laurentian.ca/educ/lradford/cerme4.pdf]

Radford, L. y Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Ottawa: Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.

Robbins, F. E. (1921). The Tradition of Greek Arithmology. *Classical Philology*, *16*(2), 97-123.

Sabena, C., Radford, L. y Bardini, C. (2005). Synchronizing gestures, words and actions in pattern generalizations. In H. L. Chick, J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University of Melbourne, Australia, Vol. 4, pp. 129-136.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1996). Interactionnisme et théorie des situations : Format d'interaction et Contrat didactique. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaires 1996* (pp. 5-37). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Spengler, O. (1948). *Le déclin de l'Occident*. Paris: Gallimard.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. y Sierpinska, A. (Eds.) (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Todorov, T. (1984). *Mikhail Bakhtin: The Dialogical Principle*. Minneapolis, London: University of Minnesota Press.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London, Wasington, D.C: The Falmer Press.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the Philosophy of Language.* Cambridge Massachusetts, London, England: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1981a). The instrumental method in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, N. Y.: Sharpe.

Vygotsky, L. S. (1981b). The development of higher mental functions. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 144-188). Armonk, N. Y.: Sharpe.

Vygotsky, L. S. y A. Luria (1994). Tool and symbol in child development. En R. van der Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky Reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell.

Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding.* Dordrecht: D. Reidel.

Weber, M. (1992). The Protestant Ethic and the Spirit of Capitalism. London New York, Routledge.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Luis Radford
Université Laurentienne
Canada

E-mail: Lradford@laurentian.ca