Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
RELIME
eISSN 2007-6819
Vol. 28, e492

Artículo
https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

Uma relação imbricada entre níveis de Conhecimento Especializado e Interpretativo do professor em isometrias

An intertwined relationship between levels of Interpretative and Specialised Knowledge of the teacher in isometries

Caroline Silva
Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC, Brasil.

Resumo

A especialização do conhecimento do professor de matemática é entendida a partir do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* e do Conhecimento Interpretativo. Para melhor compreender esse conhecimento, objetiva-se responder: que Conhecimento Interpretativo revelam professores de matemática que participam de um contexto formativo e como os níveis desse conhecimento se relacionam com os níveis de Conhecimento Matemático Especializado revelado no âmbito da translação e rotação? Para tal, foram implementadas Tarefas Interpretativas em um contexto formativo, com 15 professores de matemática, visando aceder e desenvolver o seu Conhecimento Interpretativo e Especializado. Os resultados indicam uma relação imbricada entre os níveis desses conhecimentos, de tal forma que a interpretação que o professor realiza é impactada pelo conteúdo do seu Conhecimento Especializado.

Palabras chave:

– *Conhecimento Interpretativo*
– *Conhecimento Especializado*
– *Tarefas Interpretativas*
– *Translação*
– *Rotação*

Cómo citar:

Silva, C., Ribeiro, M. y Ribeiro, A. J. (2025). Uma relação imbricada entre níveis de Conhecimento Especializado e Interpretativo do professor em isometrias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 28,* e492. https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

Recepción: 30/10/2024 Aceptación: 13/08/2025 Publicación: 19/12/2025

Abstract

The specialization of mathematic teachers' knowledge is perceived from the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge and Interpretative Knowledge perspectives. To better understand the content of such knowledge we seek to answer the following question: what Interpretive Knowledge reveals mathematics teachers participating in a professional development context, and how the level of such knowledge relates to the levels of teachers' Mathematical Specialised Knowledge in the scope of translation and rotation? For doing so, Interpretative Tasks were implemented in a teacher education context with 15 mathematics teachers aimed at accessing and developing teachers Interpretative and Specialised knowledge. The results pinpoint an intertwined relationship between the levels of this knowledge, in which a way that the interpretation that the teacher makes is impacted by the content of his/her Specialised Knowledge.

Keywords

- *Interpretative Knowledge*
- *Specialised Knowledge*
- *Interpretative Tasks*
- *Translation*
- *Rotation*

Resumen

La especialización del conocimiento del profesor de matemática se entiende desde el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* y el Conocimiento Interpretativo. Para mejor comprender el contenido de dichos conocimientos, consideramos la siguiente pregunta: ¿qué Conocimiento Interpretativo revelan profesores de matemática que participan en un contexto formativo y cómo los niveles de dichos conocimientos se relacionan con los niveles del conocimiento matemático especializado en el ámbito de la traslación y rotación? Se implementaron Tareas Interpretativas en un contexto formativo con 15 profesores de matemática. Los resultados indican una relación entrelazada entre los niveles de este conocimiento, de tal manera que la interpretación que realiza el profesor es impactada por el contenido de su Conocimiento Especializado.

Palabras clave

- *Conocimiento Interpretativo*
- *Conocimiento Especializado*
- *Tareas Interpretativas*
- *Translación*
- *Rotación*

Résumé

La spécialisation de connaissance de l'enseignant de mathématique s'entend à partir des *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* et de Connaissance Interprétative. Pour mieux comprendre ces connaissances, l'objectif est de répondre : quel connaissance interprétative et révélées par les professeurs de mathématique qui participent à un contexte de formation et comment les niveaux de ces connaissances sont-ils liés aux niveaux de connaissance mathématique révélés dans le cadre de la translation et rotation ? À cette fin, des tâches interprétatives ont été mises en œuvre dans un contexte de formation, auprès de 15 professeurs de mathématiques, visant à accéder et à développer leurs connaissances interprétatives et spécialisées. Les résultats indiquent une relation entrelacée entre les niveaux de ces connaissances, de telle sorte que l'interprétation que réalise l'enseignant est influencée par le contenu de ses connaissance spécialisée.

Most Clés

- *Connaissance Interprétative*
- *Connaissances spécialisées*
- *Tâches d'interprétation*
- *Translation*
- *Rotation*

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

1. Introdução

Há algumas décadas o conhecimento profissional do professor é foco de diversos estudos (e.g., Shulman, 1987), inclusive, os que se centram no conhecimento do professor de matemática (e.g., Ball et al., 2008). É relevante investigar o conhecimento do professor, por ser, entre os fatores controláveis, o que mais impacta nas aprendizagens matemáticas dos alunos (Grossman, 2010). Contudo, não se refere a "qualquer" conhecimento, mas a um conhecimento que é especializado (Carrillo et al., 2018; Jakobsen et al., 2014), nas dimensões matemática e pedagógica (Carrillo et al., 2018).

O conhecimento especializado fundamenta as práticas profissionais do professor e dentre essas a prática interpretativa, que se sustenta no denominado Conhecimento Interpretativo (CI), que corresponde ao conhecimento matemático amplo e profundo que possibilita entender e atribuir significado aos raciocínios e formas de pensar matematicamente dos alunos, sejam adequados, inadequados ou não usuais (Di Martino et al., 2020; Jakobsen et al., 2014). Essas práticas não se relacionam com a performance do professor (Ribeiro et al., 2021b), mas um tipo de conhecimento relacionado a estratégias de resolução de problemas e erros (Asenova et al., 2023). Entretanto, a prática interpretativa associa-se a diferentes tipos (Mellone et al., 2017), que estão associados a níveis de CI e que influem em diferentes decisões pedagógicas.

Compreender as especificidades do conhecimento do professor de matemática, de modo mais detalhado, é uma necessidade, justamente para que a formação de professores que objetiva desenvolvê-lo passe a assumi-las intencionalmente, pois esse conhecimento especializado, como o CI, não se desenvolve por si, com a experiência de sala de aula ao longo do tempo (Ribeiro et al., 2013), o que levou à emergência de uma linha de pesquisa emergente internacionalmente.

Com esse fito, têm sido conceitualizadas as denominadas Tarefas Interpretativas (Mellone et al., 2020) – que se referem a uma categoria de Tarefas para a Formação (Ribeiro et al., 2021a) – e correspondem a recursos formativos (e instrumento de coleta das informações), que objetivam, justamente, aceder e, pela discussão, desenvolver o CI dos professores. Essas Tarefas centram-se no âmbito de algumas dimensões do conhecimento dos alunos e do professor em determinado tópico matemático que é problemático – pelas dificuldades que alunos (e professores) apresentam em seu escopo – e, por isso, são encarados como ótimos candidatos a serem discutidos.

Entre os diversos tópicos que os alunos necessitam conhecer, e que são considerados problemáticos, estão as transformações geométricas isométricas – translação, reflexão e rotação (e.g., Flores e Yanik, 2016; Thaqi et al., 2015). Considerando que muitas das dificuldades dos alunos refletem as próprias dificuldades dos professores (Gomes, 2012), necessitam ser discutidos em contextos formativos para desenvolver o conhecimento do professor, contribuindo para que ultrapasse essas dificuldades.

Assim, implementou-se um contexto formativo, assumindo uma perspectiva de desenvolvimento profissional, para professores de matemática no âmbito das isometrias, objetivando o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado dos participantes. Aqui, focamos em discutir o conhecimento revelado pelos professores durante dois encontros que focaram a translação e a rotação, para responder à seguinte questão[1]: que Conhecimento Interpretativo revelam professores de matemática que participam de um contexto formativo e como os níveis desse conhecimento se relacionam com os níveis de conhecimento matemático especializado revelado no âmbito da translação e rotação?

2. Algumas discussões teóricas

Dentre os diversos tópicos matemáticos em que os alunos (e professores) apresentam dificuldades que refletem problemáticas em seu conhecimento, optou-se pelas isometrias, centrando-se aqui, na translação e rotação, em que uma dificuldade é diferenciá-las (Thaqi et al., 2015). Ambas são isometrias e, portanto, transformam um elemento inicial congruente a um elemento final. Na translação, a transformação envolve um vetor de translação e suas componentes (direção, sentido e módulo) e na rotação, a transformação envolve um centro de rotação, medida de amplitude do ângulo de rotação e seu sentido.

As maiores dificuldades dos alunos, concernentes à translação, consistem em efetuá-la (especialmente com figuras poligonais e quando o vetor de translação é paralelo a um de seus lados), considerando o comprimento do vetor como o espaço entre a figura e a imagem (Godino & Ruíz, 2002) e estabelecer a medida de distância entre os pontos correspondentes da figura e da imagem (Sünker & Zembat, 2012), como equivalente ao módulo do vetor de translação (Flores & Yanik, 2016). Já as dificuldades dos professores, que se associam a um conhecimento geométrico superficial (Munhóz & Pazuch, 2023), consistem em determinar o módulo do vetor de translação (Guerreiro, 2019), assumindo erroneamente (como os alunos) o módulo como o espaço entre a figura e sua imagem (Gomes, 2012), o que se relaciona a necessidade de desenvolver um conhecimento dos atributos fundamentais do tópico.

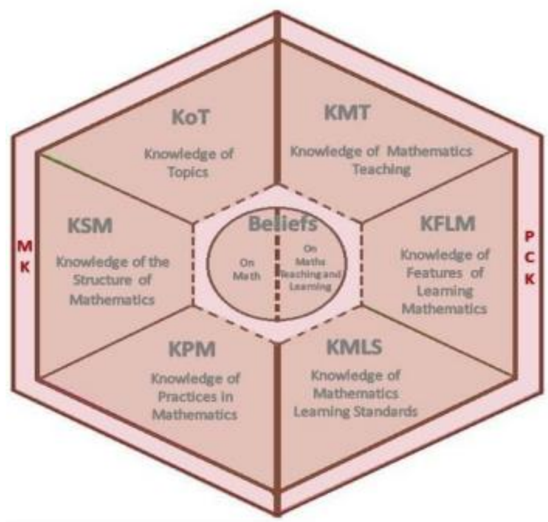
Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

Quanto à rotação, as maiores dificuldades dos alunos envolvem reconhecer a rotação (Jones, 2012) e determinar o centro de rotação (Turgut et al., 2014). Semelhantemente às dificuldades dos alunos, os professores revelam dificuldades em identificar centros ou ângulos de rotação (Harper, 2003), o que se associa, também, a necessidade de desenvolver um conhecimento dos atributos fundamentais do tópico e dos procedimentos para identificá-los.

Conhecer essas dificuldades ajuda a considerar que Conhecimento Matemático Especializado é necessário ao professor deter, que é diferente do conhecimento de outros profissionais, para que essas (e outras) dificuldades sejam ultrapassadas, por meio de uma discussão centrada nas especificidades de cada tópico. Esse conhecimento é entendido a partir das conceitualizações do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[2] – MTSK (Carrillo et al., 2018) e do Conhecimento Interpretativo – CI (Jakobsen et al., 2014). O MTSK (Figura 1) considera o conhecimento do professor especializado tanto no domínio do conhecimento matemático quanto do conhecimento pedagógico (Carrillo et al., 2018).

Figura 1

Domínios do MTSK



Nota. Tomado de Carrillo et al. (2018, p. 241)

Centramos em discutir os subdomínios *Knowledge of Topics* e *Knowledge of Practices in Mathematics*, considerando algumas categorias que são foco de atenção na análise, apresentando exemplos de conteúdo de conhecimento em translação e rotação.

O *Knowledge of Topics* refere-se ao conhecimento dos tópicos e conceitos matemáticos associados, dos procedimentos e fundamentos teóricos que os sustentam, das diversas formas de representar objetos matemáticos, de suas propriedades e diferentes possíveis formas de defini-lo. Contempla o conhecimento dos contextos que permitem entender o tópico, a partir de seus diferentes sentidos que emergem e possibilitam atribuir significado a ele, implicando nas aplicações (Carrillo et al., 2018). Logo, envolve o conhecimento matemático que é esperado que um aluno desenvolva, contudo em um nível mais elevado e com um grau maior de formalização. Inclui quatro categorias (procedimentos; definições, propriedades e fundamentos; registros de representação; fenomenologia e aplicações), e aqui, discutem-se procedimentos, propriedades, fundamentos, fenomenologia e aplicações.

Procedimentos (denominado de KoTp) corresponde ao conhecimento do conjunto sequencial de passos/etapas realizadas para se obter um resultado, usualmente associam-se a algum algoritmo. Inclui conhecer os diferentes modos de fazer matemático para resolver um problema, considerando como (fazer ou utilizar), quando e por que se faz dessa forma e a razoabilidade do resultado (Carrillo et al., 2018). No contexto da translação em 2D, por exemplo, envolve conhecer que os diferentes passos para efetuar essa transformação geometricamente com uma figura são: escolher um ponto P pertencente a figura, posicionar a extremidade do vetor (paralelo ao vetor de translação $\vec{v}$) nesse ponto, de modo que na ponta do vetor estará localizado o ponto P', ou seja, a cada ponto da figura adiciona-se um vetor, levando o ponto P para o ponto P'; repetir o passo anterior quantas vezes for necessário, a depender da figura a transladar, escolhendo o mínimo de pontos; unir os pontos obtidos para completar a figura transformada – imagem. Relativo à rotação, por exemplo, integra conhecer que, para identificar o centro de rotação em uma figura já transformada, é necessário traçar a mediatriz entre um ponto da figura original e seu correspondente na imagem, repetindo esse procedimento (pelo menos) duas vezes, para obter o ponto de intersecção das mediatrizes traçadas, que corresponde ao centro de rotação.

Propriedades (denominado de KoTpp) envolve o conhecimento dos atributos matemáticos que pertencem a todos os elementos de uma mesma classe de equivalência do tópico e que são invariantes (Liñán et al., 2016). Um exemplo de propriedade das isometrias, em geral, relaciona-se a conhecer que a imagem transformada é congruente à figura, pois nas isometrias preservam-se distâncias (Lima, 1992). Também, refere-se a conhecer que na translação não há pontos fixos (exceto na translação identidade – realizada a partir de um vetor nulo – figura e imagem coincidem) e que na rotação sempre há um único ponto fixo, o centro de rotação (exceto na rotação identidade – realizada a partir de um ângulo nulo ou 360° e seus múltiplos – figura e imagem coincidem).

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

Fundamentos (denominado de KoTf) inclui o conhecimento das propriedades essenciais ao tópico, sem as quais ele não existe. No escopo da translação, por exemplo, refere-se a conhecer que o vetor de translação é um de seus fundamentos (incluindo suas três propriedades – direção, sentido e módulo). Em rotação, por exemplo, envolve conhecer que o ângulo de rotação (incluindo especificar sua amplitude e sentido) e o centro de rotação (ponto ou reta) são fundamentos da rotação. Também, contempla conhecer que figura e imagem são fundamentos de qualquer transformação geométrica.

Fenomenologia e aplicações (denominado de KoTfa) refere-se ao conhecimento dos fenômenos associados a cada tópico que dão sentido a ele, e que emergem a depender do contexto (interno ou externo à matemática) ou de situações que permitam, de acordo com seus sentidos, sua aplicação (Gómez & Cañadas, 2016). Integra conhecer, por exemplo, que a translação é uma operação geométrica com a figura, aplicando-se um vetor de translação, em que se adiciona esse vetor a cada ponto da figura, obtendo-se uma imagem congruente. Contempla conhecer, por exemplo, que a rotação é uma operação geométrica com a figura, a partir de um centro fixo (ponto ou reta) e de uma medida de amplitude do ângulo de rotação (incluindo seu sentido), que é aplicado a cada ponto da figura, obtendo-se uma imagem congruente.

O *Knowledge of Practices in Mathematics* corresponde ao conhecimento das práticas de produzir matemática e da lógica que as fundamenta (Flores-Medrano, 2016), considerando uma matemática mais "avançada" e seu funcionamento enquanto ciência, desconsiderando a prática de ensino. Envolve o conhecimento dos modos de proceder (argumentar, generalizar e explorar) em matemática (Flores-Medrano, 2016) no que tange a conhecer ou criar e produzir em matemática. Inclui o conhecimento das diferentes maneiras de demonstrar, justificar, fazer deduções e induções, dos diferentes critérios para que uma generalização seja válida, do papel dos símbolos e da linguagem formal para comunicação do conhecimento matemático, das diferentes estratégias de resolução de problemas ou de modelagem matemática, das condições necessárias e suficientes para gerar e utilizar as definições (Carrillo et al., 2018), do uso e funcionamento dos exemplos e contraexemplos (Flores-Medrano, 2016). Contém as categorias: prática de demonstrar; prática de definir; prática de resolver problemas; papel da linguagem matemática. Aqui, discute-se o papel da linguagem matemática.

O papel da linguagem matemática (denominado de KPMlm) contempla o conhecimento do uso de símbolos associados à linguagem natural para comunicar ideias matemáticas, e que permitem o desenvolvimento das práticas matemáticas (Delgado-Rebolledo et al., 2022), incluindo o conhecimento da necessidade de se empregar sempre uma linguagem

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

matemática adequada. Contempla conhecer, por exemplo, que para se referir ao deslocamento efetuado na translação necessita-se explicitar o vetor de translação e suas componentes e, para o deslocamento na rotação explicitar o centro de rotação, a medida de amplitude do ângulo de rotação e seu sentido. Outro exemplo, envolve conhecer que, giro é como denomina-se o ângulo cuja amplitude é de 360º – ou volta inteira (Tavares & Geraldo, 2018) e, que, portanto, a rotação sendo uma transformação isométrica em que a amplitude do ângulo é apenas um dos elementos fundamentais não pode ter a mesma nomenclatura.

Esse conjunto de conhecimento, a depender do quê, como e quanto o professor o detém, em termos de níveis de Conhecimento Matemático Especializado, impacta no tipo de prática interpretativa que implementa. Embora o CI e o MK possuem a mesma natureza (conhecimentos especializados) não coincidem, pois o CI refere-se a um conhecimento relacionado a estratégias de resolução de problemas e erros (Asenova et al., 2023) e situado em uma prática específica, a interpretativa.

O CI corresponde a um conhecimento matemático profundo e amplo que permite ao professor escutar o Pensar matemático dos alunos, apoiando-os no desenvolvimento de seu conhecimento matemático (Di Martino et al., 2020; Mellone et al., 2023), a partir de seus próprios raciocínios exteriorizados em suas produções, não importando quão incorretos ou não usuais possam ser (Jakobsen et al., 2014), diferentes e até surpreendentes (Albano et al., 2024). O CI completa o conhecer erros ou estratégias usuais de solução, com o conhecimento das possíveis origens desses erros (típicos ou atípico) e o conhecimento do possível uso de erros (Asenova et al., 2023; Di Martino et al., 2020), que passam a ser assumidos como verdadeiras fontes de aprendizagem (Borasi, 1987). Para tal, o CI "como parte do conhecimento matemático" (Asenova et al., 2023) fundamenta o professor interpretar e atribuir significado matemático a produções de alunos que contenham esses erros (Jakobsen et al., 2014). Para além de identificar as dificuldades dos alunos – conhecimento pertencente ao subdomínio *Knowledge of Features os Learning Mathematics* (KFLM) do MTSK –, o conhecimento que permite atribuir significado aos motivos matemáticos que as sustentam é Conhecimento Matemático Especializado, sendo este um dos motivos que leva a que o CI se associe ao MK.

Conhecimento e competências, embora relacionados, não coincidem, logo, Conhecimento Interpretativo e *noticing*, apesar de associados, também não coincidem. Uma vez que as ações do professor (o que diz, faz e como faz) sustentam-se no conhecimento que detém ou assume deter (Ribeiro, 2024), então, o conhecimento sustenta as competências profissionais do professor que se associam ao *noticing* (e.g., van Es & Sherin, 2002). Esse

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

constructo envolve às interações entre o professor e as produções dos alunos, contemplando um conjunto de ações que consistem e entender, interpretar e decidir com base na produção (e.g., Ivars et al., 2019). Assim, para que tais ações possam ocorrer, possibilitando que impliquem os alunos entender, torna-se necessário um conhecimento matemático especializado que, situado neste contexto e tipo de práticas envolvidas, corresponde ao CI.

No momento, o CI compreende três níveis que estão associados às categorias de práticas interpretativas realizadas pelos professores (Mellone et al., 2017): (i) Interpretação avaliativa, corresponde ao conhecimento que sustenta o processo por meio do qual o professor determina a congruência entre as produções dos alunos e o seu esquema matemático de respostas corretas, considerando apenas seu modo como parâmetro para obter a resposta correta e determinando como incorretas as produções diferentes; (ii) Interpretação para o design educacional, tem por base o conhecimento que possibilita ao professor projetar etapas educacionais a partir das produções dos alunos, ou seja, ao interpretá-las, repensa seu planejamento das próximas discussões a serem propostas, delineando um novo percurso para alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas; (iii) Interpretação como pesquisa, corresponde ao conhecimento que alicerça o professor a ter disposição e (re)analisar sua própria formalização matemática, revendo seu modo de proceder para resolver um problema, garantindo que seja coerente com as produções dos alunos (mesmo quando estas parecem estar em conflito com a matemática tradicional ensinada na escola). Assim, o professor pode pesquisar outras maneiras de resolver um problema, advindas de resultados de pesquisa ou discutindo a produção com os pares, o que possibilita que ele amplie seu espaço solução, passando a conhecer novas formas de proceder.

A diversidade de formas de solucionar um problema ou representar um ente matemático corresponde aos elementos do espaço solução do professor – possíveis respostas, diversas maneiras de abordagem, diferentes registros de representação – mesmo que esse problema apresente uma única solução (Jakobsen et al., 2014). Entretanto, na maioria das vezes, os professores conhecem basicamente uma única forma de proceder para resolver um problema, indicando um espaço solução limitado (Jakobsen et al., 2014), logo, quando o professor se depara com uma produção fora do seu espaço solução, apresenta dificuldades em interpretá-la, podendo considerá-la como incorreta, apenas por ser diferente da sua. Nesse caso, para que melhores decisões pedagógicas de intervenção sejam tomadas pelo professor (Jakobsen et al., 2014; Ribeiro & Silva, 2024), é essencial a ampliação das fronteiras do espaço solução do professor pelo desenvolvimento de seu CI, já que, quanto mais elevado o nível de CI, se associa, também, a um elevado nível de Conhecimento Matemático Especializado.

Contudo, como o CI necessita de contextos formativos para ser desenvolvido (Ribeiro et al., 2013), conceitualizam-se as Tarefas Interpretativas – TI (Mellone et al., 2020), cujo objetivo é aceder e desenvolver o CI dos professores considerando um tópico matemático. Toda TI é estruturada em Parte Preliminar, Parte I e Parte II: a Parte Preliminar contém questões motivadoras no âmbito do tópico cerne da discussão, para aceder o conhecimento de alguma componente do Conhecimento Especializado; Já a Parte I é constituída por uma tarefa para os alunos (a ser resolvida pelo professor por si mesmo) e mais um conjunto de questões que focam em algumas componentes do Conhecimento Especializado; no que se refere à Parte II, considera-se algumas produções dos alunos (escritas ou em vídeos) para alguma(s) questão(ões) da tarefa para o aluno presente na Parte I e inclui questões que visam situar o professor em sua prática interpretativa e aceder ao Conhecimento Interpretativo.

3. Contexto e método

Este artigo faz parte de um projeto de pesquisa mais amplo sobre o conhecimento e as práticas matemáticas especializadas de professores da Educação Infantil ao Formador de professores, em que um dos focos é o conhecimento e práticas no âmbito do Pensamento Geométrico.

Aqui, focamos em um contexto formativo (40 horas – nove encontros) que objetivou desenvolver o Conhecimento Interpretativo dos professores participantes no âmbito das isometrias e simetria. Para tal, implementou-se, em cinco encontros, Tarefas Interpretativas (TI); dois encontros foram destinados à elaboração de uma tarefa para os alunos e discussão dessa implementação em sala de aula, que foi realizada pelos próprios participantes; o primeiro e último encontro foram de autoavaliações. Os participantes foram 15 professores de matemática, sendo que 14 possuíam entre um e 26 anos de experiência lecionando nos Anos Finais e Ensino Médio e um não possuía experiência.

Consideramos, aqui, os encontros dois e quatro (com 14 e 11 professores presentes, respectivamente) em que foram implementadas TI no âmbito da translação e da rotação, respectivamente. A coleta de informações incluiu gravações de áudio e vídeo das discussões dos professores em pequenos grupos (de dois, três ou quatro) e durante a discussão plenária, e as produções dos professores para as TI.

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

No encontro dois, focamos na questão da Parte Preliminar, em que se objetiva discutir a fenomenologia da translação e na Parte I, cuja tarefa para os alunos tem o objetivo de desenvolver a compreensão do que é a translação e do conjunto de procedimentos para efetuá-la com figuras poligonais e não poligonais, e algumas propriedades da translação. A Parte II inclui produções dos alunos, direcionando a atenção para o pensamento matemático e dificuldades associadas, e o conhecimento do professor para elaborar maneiras de ultrapassar tais dificuldades. Diante a restrições de espaço, apresentamos parte da TI de translação, com as questões que direcionamos nossa atenção (Figura 2).

Figura 2

Parte da TI no âmbito da translação

Conhecimento do professor em translação

Parte Preliminar

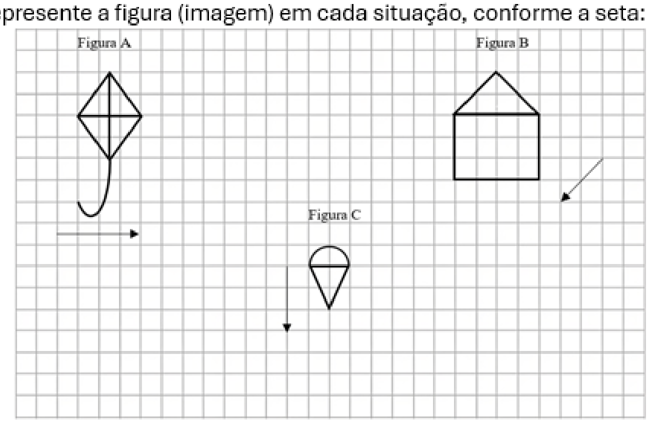
1. Imagine que você está na rua e alguém lhe pergunta: em um contexto matemático, o que é translação? O que responderia? (Não esquecer que estamos na rua e que, portanto, não pretendemos ensinar a essa pessoa).

Parte I

Tarefa: Mudando de lugar...

(Deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

1. Represente a figura (imagem) em cada situação, conforme a seta:



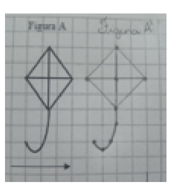
[...]

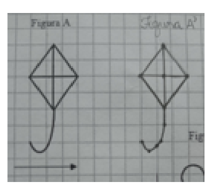
1. Considere a tarefa anterior:
   i) Resolva a tarefa por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino).

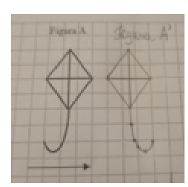
[...]

Parte II

1. A professora Josi implementou na sua sala do 7.º ano C a tarefa anterior. Obteve algumas respostas distintas e como estava a participar de uma formação da responsabilidade do CIEspMat decidiu levar essas produções para a formação para discutir.


Produção da Paula


Produção da Laura


Produção da Maria

a) Para cada uma das produções, indique se as considera matematicamente corretas (adequadas) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado.

[...]

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

Cada uma dessas produções foi incluída porque permite discutir as dificuldades específicas dos alunos em translação. Aqui, por restrições de espaço, focamos na produção de Laura, pois permitiu que um grande espaço de conhecimento fosse revelado. Essa produção traz à tona as dificuldades dos alunos em estabelecer a distância entre cada ponto da figura e o ponto correspondente na imagem como equivalente ao módulo do vetor de translação.

Em relação ao encontro quatro, centramos em uma das questões da Parte Preliminar, em que se discute a fenomenologia da rotação e na Parte I, cuja tarefa para os alunos tem o objetivo de desenvolver a compreensão para identificar os elementos constituintes da rotação e os procedimentos para efetuá-la, a partir de imagens já rotacionadas, inclusive determinar o centro de rotação. Na Parte II inclui-se produções de alunos para que foquem no pensamento matemático presente, interpretando as produções e considerando o conhecimento do professor para superar as dificuldades expressas. Por motivos de restrições de espaço, apresentamos parte da TI de rotação, com as questões que centramos a discussão (Figura 3).

Figura 3

Parte da TI no âmbito da rotação

Entendendo a rotação

Parte Preliminar

1. Imagine que você está na rua e alguém lhe pergunta: em um contexto matemático, o que é rotação? O que responderia? (Não esquecer que estamos na rua e que, portanto, não pretendemos ensinar essa pessoa). [...]

Parte I

Tarefa: Rotacionando cartas

(Deve explicar sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

1. Observe as duas situações abaixo. Em cada situação temos uma carta de "dama de copas":

situação 1

situação 2

[...]

(d) Em cada situação, consegue identificar algum ponto que se mantém fixo, quando se efetua o movimento? Se sim, indique que ponto é esse e justifique.

1. Considere a tarefa anterior:

(i) Resolva a tarefa por si mesmo (sem pensar em um contexto de ensino). [...]

Parte II

1. Após implementar essa tarefa com seus alunos do 7.º ano D, o professor Mário obteve algumas respostas e resolveu também levá-las para discutir na formação do CIEspMat. Veja as produções das alunas Simone e Camila referente às questões c) e d) da tarefa para o aluno: [...]

d) Todos os pontos são fixos.

Produção de Simone para a questão (d).

d) Na situação 1 não tem pontos fixos e na situação 2 o ponto fixo é o do canto debaixo esquerdo da carta

Produção de Camila para a questão (d).

(a) Para cada uma das produções, indique se as considera matematicamente corretas (adequadas) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado. [...]

Nota. A tarefa para o aluno "Rotacionado cartas" foi adaptada de Paques e Oliveira (2012).

Essas quatro produções foram incluídas por possibilitarem discutir as dificuldades específicas dos alunos relativas à rotação. Aqui, por delimitação de espaço, centramos na

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

produção de Simone, que propiciou aceder o conhecimento dos professores em um amplo espaço de discussão. Essa produção permite discutir um dos fundamentos da rotação – centro de rotação – como o único ponto fixo, sendo incluída pois revela a dificuldade comum dos alunos em identificar (visualizar o movimento já efetuado) – entender a rotação como um movimento – e identificar o centro de rotação de uma figura.

Em relação à metodologia de implementação dessas TI, a Parte Preliminar foi respondida individualmente e as Partes I e II (distribuídas separadamente) em grupos, totalizando quatro grupos, em que cada grupo foi identificado com um código (G1 a G4). Posteriormente, ocorreu uma discussão coletiva em plenária – tendo como ponto de partida as produções dos participantes.

Para identificar o conhecimento especializado dos professores, as categorias dos subdomínios MTSK são usadas, considerando o acrônimo em que cada subdomínio foi denominado, acrescido de uma letra para diferenciar se conteúdo de conhecimento se refere a translação (letra T) ou rotação (letra R), por exemplo, KoTpTn e KoTfTn para as evidências de conhecimento sobre procedimentos e fundamentos de translação (n aumenta sequencialmente para cada um separadamente). Devido à limitação de espaço, para a análise das produções das Partes Preliminares de cada TI, focou-se nas produções que melhor representam o conhecimento revelado pelos professores.

Quanto ao CI, identificamos (colocadas em negrito) palavras-chave associadas a cada nível de CI (incorreto; parcialmente correto; correto) considerando as três categorias apresentadas por Mellone et al. (2017) e da análise emergiu uma nova categoria para a prática interpretativa (interpretação equivocada, correspondente a interpretar como correta uma produção de aluno que é matematicamente inadequada). Para identificação, utilizamos um conjunto de símbolos após o acrônimo (*; **; #; []) onde * relaciona-se a um conhecimento matemático inadequado, ** quando é incompleto, # quando é matematicamente adequado, entretanto sem correspondência com o que foi solicitado na tarefa e [] ausência de evidências de conhecimento necessárias para interpretar a produção do aluno.

Todas as produções escritas foram digitalizadas e transcritas *ipsis litteris (São literais, não se efetuou a correção gramatical ou linguística)* para que se consiga ler em qualquer contexto, já as produções orais foram transcritas *ipsis verbis* (acrescentou-se entre colchetes as expressões gestuais, aspas quando liam e parênteses para explicações necessárias, por exemplo, trechos inaudíveis), realizando a correção da oralidade, para se obter informações textualizadas, na íntegra, e complementadas pelas produções gestuais.

Cada produção foi identificada com um código para o número do encontro (E2 ou E4), especificando a parte da TI (Parte Preliminar – P, Parte I – I e Parte II – II) e a indicação da questão, incluindo se ela se remetia ao Conhecimento Especializado (CE) ou Conhecimento Interpretativo (CI); terminando, o grupo (G1 a G4) e quando necessário o nome fictício do participante desse grupo. Por exemplo, uma evidência do Encontro 2, Parte Preliminar, questão 1, Conhecimento Especializado, grupo 1, professora Aline, corresponde a E2P1CE_G1_Aline.

4. Análise e discussão

Ao responderam à questão da Parte Preliminar da TI de translação (o que é translação?), oito dos 14 professores utilizaram termos que associam a translação a “mudar” e “mudança” (de figura ou objeto) de um lugar para outro e cinco professores utilizaram termos relacionados a “mover” e “movimentação” para se referir à translação. Nenhum professor especificou o que define essa mudança/movimentação da figura (o vetor de translação e suas componentes – direção, sentido e módulo), revelando um conhecimento intuitivo da translação, o qual não permite diferenciá-la das demais transformações (Thaqi et al., 2015). Um professor utilizou termos “rodamos” e “giro” que, ao invés de se relacionarem com a translação, associam-se à rotação.

Considera-se, como exemplo, as produções de três professores (dos 14 professores participantes) que são representativas do conhecimento revelado relativamente à questão da Parte Preliminar da TI de translação (Tabela 1).

Tabela 1

Produções dos professores associadas ao conhecimento do que é translação

Produção	Transcrição
É a mudança de localização sem se virar.	E2P1CE_G1_Aline: É a mudança de localização sem se virar.
mover uma Figura, objeto ou algo do tipo.	E2P1CE_G2_Jorge: Mover uma figura, objeto ou algo do tipo.
Translação é quando pegamos um objeto e rodamos ele, como se fosse um “giro”.	E2P1CE_G4_Carlos: Translação é quando pegamos um objeto e rodamos ele, como se fosse um “giro”.

A partir da evidência referente à produção de Aline, considera-se o entendimento da translação enquanto um fenômeno associado à mudança de “algo” de um lugar, sem mencionar o que define essa mudança (vetor de translação), como muitos alunos a

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

descrevem (Flores & Yanik, 2016). Isso se relaciona a conhecer que a translação é a mudança de uma figura de um lugar para outro a partir de um vetor de translação, considerando suas componentes – direção, sentido e módulo (KoTfaT1**). Percebe-se que Aline explicita que a translação é uma mudança de "algo" sem virá-lo (*mudança de localização sem se virar* (Aline)), o que se coaduna a conhecer que a translação sempre é efetuada no mesmo plano, diferente da reflexão, que sempre é efetuada, necessariamente, saindo do plano (KoTppT1).

A produção de Jorge evidencia o uso do termo mover para se referir ao que é a translação, porém, também, sem especificar o que define esse movimento. Essa imprecisão relaciona-se a conhecer a translação como movimento de objetos (Flores & Yanik, 2016), isto é, intuitivamente e associado a um foco no *saber fazer* e não em conhecer que a translação é entendida como uma operação geométrica, em que se efetua um movimento rígido com a figura, a partir de um vetor translação para obter uma imagem congruente com a figura [(KoTfaT2)].

Embora ter sido questionado "o que é a translação?", o professor Carlos revelou um conhecimento associado aos procedimentos da rotação (*pegamos um objeto e rodamos ele, como se fosse um "giro"* (Carlos)), ou seja, conhecer que na rotação todos os pontos são rotacionados, seguindo um conjunto de procedimentos específicos – algoritmos generalizáveis – (KoTpR1#). Essa evidência atrela-se à dificuldade comum dos alunos em diferenciar uma isometria da outra (Flores & Yanik, 2016), associada à dificuldade em determinar os atributos específicos de cada uma das transformações (Thaqi et al., 2015).

Ao centrarmos na Parte I da TI de translação, dos quatro grupos de professores, apenas dois (G1 e G2) realizaram a translação corretamente. G3 realizou corretamente a translação da componente poligonal da Figura A, mas não forneceu a translação da componente curva. G4 realizou a translação incorretamente, utilizando seis unidades de medida de comprimento de distância para o módulo do vetor de translação ao invés de quatro (Tabela 2).

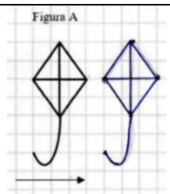
Tabela 2

Produções dos professores para a questão da tarefa para o aluno de translação

Grupo | **Produções**

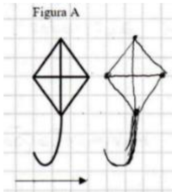
G1

Linha	G1	Transcrição
117	Aline	Esse ponto aqui tem que deslocar quatro.
118	Joice	Isso.
119		[Aline conta conforme os quadrados da malha].
120	Aline	Um, dois, três, quatro.



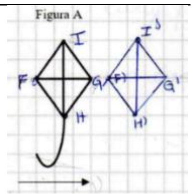
G2

Linha	G2	Transcrição
166	Marcia	Então, esse vai vir aqui?
167	Jorge	O vértice dele ali.
168	Marcia	Aqui? Um, dois, três, quatro. Aqui mais ou menos?
169	Jorge	Isso.
[...]		
176	Jorge	Isso. Já deu para fechar o desenho em cima já.



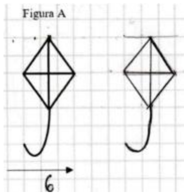
G3

Linha	G3	Transcrição
50	Igor	A gente pode dar nome para o ponto, dar nome para
51		cada ponto e colocar uma “linha”.
52	Telma	Tem que fazer os pontos.
53	Igor	E fazer A’, B’.



G4

Linha	G4	Transcrição
42	Luana	É acho que só a distância que tem que ser a mesma,
43		se a gente vai transferir a pipa para cá, quantos? Dois
44		quadradinhos? E responde e põe ele certinho aqui.
45		[Luana aponta para a figura A e o local onde a sua
46		imagem iria ser localizada na folha da tarefa].



G1 revela [117 – 120] conhecer que os procedimentos de translação consistem em escolher pontos cruciais da figura e movê-los, contando os lados dos quadrados da malha de acordo com a unidade de medida de distância indicada pelo módulo do vetor de translação, obtendo os pontos correspondentes da imagem (KoTpT2**). Esse é um caso particular de procedimentos (Carrillo et al., 2018) para translação que envolve conhecer a necessidade de considerar as três propriedades do vetor (direção, sentido e módulo) e adicionar o vetor aos pontos fundamentais da figura para obter seus pontos correspondentes da imagem [(KoTpT3)].

G2 emprega procedimentos semelhantes aos do G1, mas escolhe explicitamente os vértices da figura a serem transladados [167], para que, posteriormente, possam ser unidos, e a imagem seja obtida [176]. Isso envolve conhecer que em polígonos basta transladar os

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

vértices, considerando o vetor de translação e suas propriedades, e uni-los por segmentos de reta (KoTpT4). Semelhantemente aos dois primeiros grupos, G3 [50 – 53] revela conhecer que para transladar uma figura basta realizar a transformação de alguns de seus pontos, nomeando os pontos [vértices] da figura por letras maiúsculas latinas e seus correspondentes na imagem usando essa mesma letra adicionada de um apóstrofo (KoTpT5).

No G4 revelam conhecer que é necessário manter a distância entre todos os pontos da figura e os pontos correspondentes na imagem [42], mas usam incorretamente seis unidades de medida de distância para o módulo do vetor de translação em vez de quatro (KoTfT1*), não estabelecendo uma relação entre essa distância e o módulo do vetor de translação fornecido, sendo esse um erro comum de alunos (Sünker & Zembat, 2012) e professores (Guerreiro, 2019). A translação é um tópico para alunos do 7.º ano (12–13 anos) no contexto brasileiro, contudo G4 cometeu o mesmo erro comum dos alunos, desconsiderar o módulo do vetor de translação (Flores & Yanik, 2016), revelando um conhecimento inadequado sobre as três propriedades fundamentais (e.g., Carrillo et al., 2018) do vetor de translação.

Ao interpretarem a produção de Laura (Parte II), G1 e G2 consideraram a produção incorreta, enquanto G3 e G4, correta.

G1: Laura → incorreta, apesar de manter o tamanho do desenho não fez corretamente o deslocamento de acordo com o vetor.

G2: Laura → Matemáticamente ela se equivocou pois ela usou o vetor como a distancia entre a figura e imagem e não como translação dos pontos correspondentes.

G3: Produção de Laura: Analisando a imagem percebemos que a estudante utilizou o limite da direita para iniciar toda transformação, (exceto) por isso realizou a atividade corretamente.

G4: Produção de Laura: Consideramos correta a produção de Laura, pois a estudante realizou a imagem com sentido, direção e distância.

G1 e G2 realizaram uma interpretação avaliativa (Mellone et al., 2017), que corresponde ao nível 1 de CI. O G1 identificou algum indício de entendimento do aluno (*apesar de manter o tamanho do desenho*), associado ao conhecimento de que na translação as dimensões da figura são conservadas na imagem – congruência entre ambas (Lima, 1992), e G2 apenas descreveu o erro na produção (*usou o vetor como distancia (...) pontos*), não assumindo-o como uma fonte aprendizagem (Borasi, 1987).

A interpretação de G3 e G4 caracteriza-se como uma interpretação errônea (CI nível 0), pois assumem uma produção matematicamente inadequada como correta – revelam dificuldades semelhantes às dos alunos (Gomes, 2012). Ainda que G3 identificasse um dos erros do aluno (*a estudante utilizou (...) transformação*), revelando conhecer que é um erro dos alunos associar o vetor de translação ao segmento de reta que une um ponto da figura a um ponto mais próximo da imagem (Flores & Yanik, 2016), o grupo interpretou a produção como correta. G4 desconsiderou as três propriedades do vetor de translação fornecido, e que precisam ser consideradas, pois assumiu como correta a produção da aluna (*a estudante (...) distância*); entretanto, Laura não utilizou o módulo do vetor fornecido, sendo esta não utilização, dentre todas as propriedades do vetor de translação, uma dificuldade de compreensão comum aos alunos (Sünker & Zembat, 2012).

Na Tabela 3, associamos os descritores de conteúdo do conhecimento revelado no âmbito da translação às práticas interpretativas.

Tabela 3

Síntese da prática interpretativa associada ao conhecimento revelado e conhecimento adequado em translação

Evidência	Conhecimento revelado	Conhecimento adequado	Prática Interpretativa e nível de CI
G1: **incorreta**, apesar de manter o tamanho do desenho não fez corretamente o deslocamento de acordo com o vetor.	Conhecer que durante a translação as dimensões da figura são preservadas na imagem e que as propriedades do vetor de translação devem ser consideradas para realizar essa transformação.		Interpretação avaliativa: Interpretar como incorreta a produção de um aluno que apesar de manter as dimensões da figura na imagem, não a translada conforme o vetor fornecido, indicando o erro na produção. **(CI nível 1)**
G2: Matemáticamente ela se **equivocou** pois ela usou o vetor como a distancia entre a figura e imagem e não como translação dos pontos correspondentes.	Conhecer que na translação é o módulo do vetor de translação que determina a distância entre cada ponto da figura e seu correspondente na imagem.		Interpretação avaliativa: Interpretar como incorreta a produção de um aluno que considera o módulo do vetor de translação como a distância entre a figura e a imagem e não como a medida de distância entre os pontos original e transformado, explicitando o erro na produção. **(CI nível 1)**

G3: a estudante utilizou o limite da direita para iniciar toda transformação, (exceto) por isso realizou a atividade **corretamente**.	Conhecer que os alunos cometem o erro de identificar o vetor de translação como o segmento que une um ponto da figura com um ponto mais próximo da imagem.	Conhecer que realizar a translação desconsiderando o módulo do vetor de translação como correspondente à distância entre cada ponto da figura e seu ponto correspondente da imagem é matematicamente inadequado.	Interpretação equivocada: Interpretar como correta uma produção do aluno que é matematicamente inadequada, cujo erro consiste em usar o limite direito de uma figura para aplicar o vetor e iniciar a translação. **(CI nível 0)**
G4: **correta** a produção de Laura, pois a estudante realizou a imagem com sentido, direção e distância.	Conhecer que ao transladar uma figura é necessário considerar o mesmo sentido, direção e distância para transladar todos os seus pontos e obter a imagem.	Conhecer que ao transladar uma figura é necessário considerar a mesma direção, sentido e distância para transladar todos os seus pontos e obter a imagem, sendo essas propriedades determinadas pelas propriedades do vetor de translação e que todas elas necessitam ser consideradas.	Interpretação equivocada: Interpretar como correta uma produção do aluno que é matematicamente inadequada e que obtém uma imagem por translação, desconsiderando o módulo do vetor de translação fornecido. **(CI nível 0)**

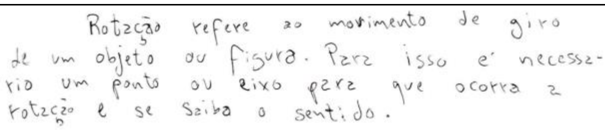
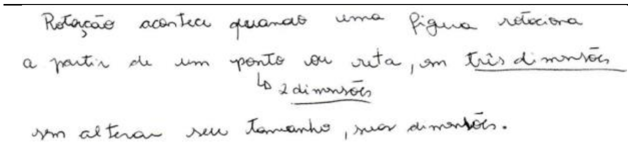
Ao focar a análise na TI de rotação, para a questão da Parte Preliminar em que se centra (o que é rotação?), oito dos 11 professores assumiram a rotação como um “giro” a partir de algum elemento, e três explicitaram que a rotação envolve rotacionar uma figura/objeto considerando alguns elementos, o que pode ser entendido como uma redundância (rotação é rotacionar). Embora revelarem entender a rotação como um movimento, nenhum professor explicitou todos os elementos necessários da rotação enquanto um fenômeno, isto é, conhecer que a rotação é entendida como um movimento rígido em que se efetua uma operação geométrica com a figura que é rotacionada a partir de um centro fixo (ponto ou reta) e de um ângulo de rotação (incluindo sua medida de amplitude e sentido) que é aplicado a cada ponto da figura, obtendo-se uma imagem congruente [(KoTfaR3)].

Considera-se, como exemplo, as produções de dois professores (dos 11 professores participantes) que são representativas do conhecimento revelado relativamente à questão 1. da Parte Preliminar da TI de rotação (Tabela 4).

Tabela 4

Produções dos professores associadas ao conhecimento do que é rotação

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

Produção	Transcrição
	E4P1CE_G2_Jorge: Rotação refere ao movimento de giro de um objeto ou figura. Para isso é necessário um ponto ou eixo para que ocorra a rotação e se saiba o sentido.
	E4P1CE_G4_Pietra: Rotação acontece quando uma figura rotaciona a partir de um ponto (2 dimensões) ou reta, em três dimensões sem alterar seu tamanho, suas dimensões.

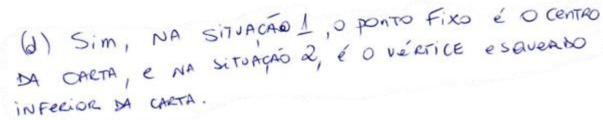
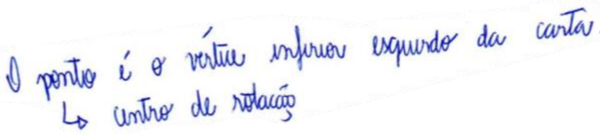
Considerando a produção de Jorge, evidencia-se que ele especificou que a rotação como um movimento de giro necessita de alguns elementos para ser efetuada (*ponto ou eixo (...) sentido*), envolvendo um conhecimento incompleto que desconsidera o ângulo de rotação, como muitos alunos (Turgut et al., 2014), e que está associado à necessidade de conhecer que dois dos fundamentos da rotação consistem no centro e ângulo de rotação – incluindo especificar sua amplitude e sentido (KoTfR2**). Uma problemática evidenciada refere-se ao uso da expressão "giro", pois, em termos de linguagem matemática adequada, giro é como denomina-se um ângulo específico, e relaciona-se a conhecer que giro é como denomina-se o ângulo cuja amplitude é de 360º (Tavares & Geraldo, 2018) e, que, portanto, a rotação sendo uma transformação isométrica em que a amplitude do ângulo é apenas um dos elementos fundamentais não pode ter a mesma nomenclatura (KPMlmR1*).

Ao analisarmos a produção de Pietra, evidencia-se a explicitação de que a rotação pode envolver um ponto ou reta (*um ponto (2 dimensões) ou reta, em três dimensões*), sendo que no $\mathbb{R}^2$ a rotação necessita de um ponto para ser realizada, e quando consideramos o $\mathbb{R}^3$ a rotação pode ser realizada tanto considerando um ponto como uma reta, o que coaduna a conhecer que a rotação é efetuada a partir de um centro fixo – ponto que corresponde ao vértice do ângulo de rotação – e que no $\mathbb{R}^3$ esse ponto pertence a um eixo (KoTfR3**). Pietra mencionou que a figura rotacionada não é alterada (*sem alterar seu tamanho, suas dimensões.*) e, utilizar o termo "tamanho", em termos de linguagem matemática adequada, consiste numa inadequação, incluindo conhecer que tamanho é um termo amplo, que não especifica quais elementos da figura são considerados [(KPMlmR2)], contudo, ao completar sua resposta com o termo "dimensões", concebe-se um refinamento em termos de linguagem adequada e envolve conhecer que na rotação, por ser uma isometria – preserva distâncias – as dimensões da figura não são alteradas para obter-se a imagem, isto é, figura e imagem são congruentes (KoTpR6).

Focando na Parte I da TI de rotação, no que se refere à questão 1. (d) da tarefa para o aluno as produções dos grupos estão apresentadas na Tabela 5, em que G1 apresentou uma resposta completa, focando nas duas situações da tarefa; G2 e G4 responderam de modo incompleto, focando somente na situação 2 e G3 expressou já ter respondido o que foi questionado nas questões anteriores – G3 não responde o que foi questionado com esta questão, mas indiretamente em outras questões da tarefa, que não são foco de análise aqui.

Tabela 5

Produções dos professores a questão 1. (d) da tarefa rotacionando cartas

Produções	Transcrições
	G1: Sim, na situação 1, o ponto fixo é o centro da carta, e na situação 2, é o vértice esquerdo inferior da carta.
	G2: O ponto fixo é o ponto de rotação que nós chamamos de A (vértice inferior esquerdo).
	G4: O ponto → centro de rotação é o vértice inferior esquerdo da carta.

G1 revelou conhecer que há pontos fixos em ambas as situações (que contém figuras e imagens rotacionadas), explicitando corretamente que pontos são esses, o que se associa a conhecer que na rotação de uma figura no plano um ponto permanece fixo (KoTpR7**) contudo, não revelou conhecer que sempre há um único ponto fixo na rotação efetuada no plano (exceto na rotação identidade) e que esse ponto fixo corresponde ao centro de rotação – vértice do ângulo de rotação – [(KoTfR4)].

G2 e G4 revelam conhecer que há um ponto fixo na situação 2, e explicitaram a que ponto se referiam. Especificamente, G4 revelou conhecer que o ponto fixo na situação 2 é o centro de rotação (*centro de rotação é o vértice (...)*), o que se associa a conhecer que na rotação efetuada no plano o único ponto fixo corresponde ao centro de rotação (KoTpR8). Evidencia-se a dificuldade dos professores em identificar o centro de rotação (Harper, 2003).

Ao focarem na produção de Simone e interpretá-la (Parte II), todos os quatro grupos consideraram que sua produção é matematicamente inadequada.

> G1: Não está correta, pois ela não percebeu que existe apenas um ponto fixo.
> G2: Matematicamente incorreto, pois apenas um ponto é fixo ou na situação 1 todos os pontos são fixos.
> G3: Não está correta pois não separou em situação 1 e situação 2, tendo em vista que na situação 2 há pontos que não são fixos.
> G4: Simone: Inadequada, pois apenas um ponto se manteve fixo na situação 2.

A interpretação realizada pelos quatro grupos é avaliativa (Mellone et al., 2017), correspondendo ao CI nível 1, pois descreveram o erro presente na produção – considerar que todos os pontos são fixos em ambas as situações –, contudo, centraram-se em diferentes motivos que sustentam esse erro, não os assumindo como uma oportunidade potencial para desenvolver o conhecimento dos alunos (Jakobsen et al., 2014).

G1 interpretou a produção de Simone como não correta, evidenciando como erro a insciência da aluna que em cada situação existe um único ponto fixo (*(...) não percebeu que existe apenas um ponto fixo*) associado a conhecer que na rotação sempre existe um ponto fixo.

G2 apontou que o erro consistiu em desconsiderar que, em ambas as situações, há apenas um único ponto fixo (*(...) apenas um ponto é fixo (...)*); porém, completaram sua resposta, assumindo a possibilidade de que na situação 1 todos os pontos sejam fixos (*(...) ou na situação 1 todos os pontos são fixos*), o que é matematicamente possível ao se considerar que não houve uma transformação. Entretanto, como na questão da tarefa que se foca, explicita-se que houve um movimento "identificar algum ponto que se mantém fixo quando se efetua o movimento?" e que na situação 1 a amplitude do ângulo de rotação corresponde a 180° e sentido independe, a produção da aluna ao referir que todos os pontos são fixos se relaciona com a dificuldade comum dos alunos em reconhecer a rotação (Jones, 2012), pois não foi solicitado que se efetuasse, mas se reconhecesse o movimento já efetuado.

Há uma problemática na interpretação efetuada por G3 e G4 ao considerarem que apenas na situação 2 há ponto fixo. Embora G3 considerasse que a aluna não separou sua resposta para cada situação, pontuou que somente na situação 2 há pontos não fixos (*(...) na situação 2 há pontos que não são fixos.*), sendo matematicamente inadequado, pois há um único ponto fixo – centro de rotação; esse grupo desconsiderou que na situação 1 há um único ponto fixo. Semelhantemente, G4 expressou que só na situação 2 há um ponto fixo

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

(*(...) apenas um ponto se manteve fixo na situação 2.*). Isso se relaciona à dificuldade comum dos alunos em identificar o centro de rotação (Turgut et al., 2014).

Na Tabela 6, associamos os descritores de conteúdo do conhecimento revelado no âmbito da rotação às práticas interpretativas.

Tabela 6

Síntese da prática interpretativa associada ao conhecimento revelado e conhecimento adequado em rotação

Evidências	Conhecimento revelado	Conhecimento adequado	Prática interpretativa e nível de CI
G1: **Não está correta**, pois ela não percebeu que existe apenas um ponto fixo.	Conhecer que na rotação existe apenas um único ponto fixo.		Interpretação avaliativa: Interpretar como não correta a produção de um aluno que não identifica o centro de rotação como o único ponto fixo na rotação, indicando o erro na produção. **(CI nível 1)**
G2: Matematicamente **incorreto**, pois apenas um ponto é fixo ou na situação 1 todos os pontos são fixos.	Conhecer que na rotação um ponto é fixo ou todos os pontos são.	Conhecer que na rotação efetuada no plano sempre existe um único ponto fixo, exceto na rotação identidade em que todos os pontos são transformados, porém figura e imagem coincidem.	Interpretação avaliativa: Interpretar como incorreta a produção de um aluno que não identifica o centro de rotação como o único ponto fixo na rotação, indicando o erro na produção. **(CI nível 1)**
G3: **Não está correta** pois não separou em situação 1 e situação e, tendo em vista que na situação 2 há pontos que não são fixos.	Conhecer que na rotação há pontos que não são fixos.	Conhecer que na rotação há um único ponto que não é fixo e que corresponde ao centro de rotação.	Interpretação avaliativa: Interpretar como não correta a produção de um aluno que não identifica o centro de rotação como o único ponto fixo na rotação, indicando o erro na produção. **(CI nível 1)**
G4: Simone: **Inadequada**, pois apenas um ponto se	Conhecer que na rotação um ponto se mantém fixo.		Interpretação avaliativa: Interpretar como inadequada a produção de um aluno

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

manteve fixo na situação 2.		que não identifica o centro de rotação como o único ponto fixo na rotação, indicando o erro na produção. **(CI nível 1)**

5. Comentários finais

Ponderando a análise das produções dos professores referente às Partes Preliminares de ambas Tarefas Interpretativas (translação e rotação), evidencia-se um refinamento em termos de conhecimento do que é o tópico – associado a entendê-lo como um fenômeno (Gómez & Cañadas, 2016), uma vez que algumas produções dos professores passam a especificar algum(ns) elemento(s) da rotação (centro de rotação e sentido), mesmo antes da discussão em plenária, diferente da translação que nenhum professor especificou a necessidade do vetor de translação nessa isometria. Isso é esperado, considerando que do Encontro dois para o quatro, aconteceram discussões com a intencionalidade de, a partir das produções dos professores, desenvolver seu Conhecimento Interpretativo (Ribeiro & Silva, 2024).

Em relação à discussão centrada na questão da tarefa para o aluno, no âmbito da translação um dos grupos apresentou dificuldade e erro associado a efetuá-la, similarmente ao que os alunos cometem (Godino & Ruíz, 2002); no âmbito da rotação, dois grupos apresentaram uma resposta incompleta, que pode estar relacionada a uma dificuldade parecida com a dos alunos e de outros professores (e.g., Harper, 2003; Turgut et al., 2014), sustentada em não conhecer que na rotação sempre é necessário um centro fixo, para que tal transformação seja efetuada.

A partir da análise que se efetuou, uma nova categoria de interpretação emergiu, denominada interpretação equivocada e associada a um nível 0 de CI (isso não significa ausência de conhecimento), pois não se refere à interpretação avaliativa "comum", que ao menos aponta o erro do aluno (nível 1). A interpretação equivocada reflete um Conhecimento Matemático Especializado (MK) de baixo nível para interpretar uma produção matematicamente incorreta do aluno, o que se torna insuficiente para uma prática matemática adequada.

Considerando que o tópico discutido mudou a cada encontro, evidencia-se que as dificuldades em efetuar uma interpretação para além de avaliativa – CI nível 1 (Mellone et al., 2017) podem ser persistentes, por ser necessário um nível de MK mais elevado em cada

Vol. 28, e492 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e492

tópico. Portanto, tem-se que o conteúdo do MK dos professores, por causa das especificidades de cada tópico matemático (Carrillo et al., 2018), impacta o tipo de prática e o nível de CI associado, como outras pesquisas já ressaltaram focando em outros tópicos (e.g., Mellone et al., 2017, 2023).

Desenvolver o CI dos professores é fundamental para promover práticas interpretativas além das avaliativas, exigindo, portanto, desenvolver Conhecimento Matemático Especializado dos professores, assumindo as especificidades de cada tópico matemático. Uma questão em aberto para discussão posterior refere-se a focar a atenção no desenvolvimento do CI e nos fatores que sustentam tal desenvolvimento – não apenas pela resolução de Tarefas Interpretativas, mas também devido ao contexto de elaboração e implementação de tarefas matemáticas para os seus próprios alunos. Além disso, é necessário direcionar a pesquisa para quais decisões pedagógicas são tomadas pelos professores após interpretarem as produções dos alunos, ou seja, que tipo de feedback os professores propõem, em consonância com o conhecimento que revelam.

Declaração de contribuição e autoria

Caroline Silva: conceitualização, metodologia, análise formal, redação – rascunho original, redação – revisão e edição.

Miguel Ribeiro: conceitualização, metodologia, análise formal, administração do projeto, supervisão, redação – revisão e edição.

Alessandro Jacques Ribeiro: supervisão, redação – revisão e edição.

Financiamento

Este trabalho faz parte dos projetos de pesquisa financiados pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (404959/2021-0 e 317937/2023-5).

Referencias

Albano, G., Carotenuto, G., Coppola, C., & Spadea, M. (2024). Mathematics interpretative tasks and formative assessment: a digital device for teachers training. Em G. Casalino, R. Di Fuccio, G. Fulantelli, P. Raviolo, P. C. Rivoltella, D. Taibi, y G. A. Toto (Orgs.), *Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online* (pp. 274–292). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-67351-1_19

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. R. P. (2023). From Interpretative Knowledge to Semiotic Interpretative Knowledge in prospective teachers’ feedback to students’ solutions. Em M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, y M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. II,* pp. 51–58). https://hdl.handle.net/10863/38154

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 2–8. http://www.jstor.org/stable/40247900

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D., & Carvajal, C. A. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. Em N. Climent Rodríguez, M. A. Montes Navarro y J. Carrillo Yáñez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (p. 57–69). Dykinson.

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2020). Interpretative Knowledge. Em S. Lerman (Org.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 424–428). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1

Flores, A., & Yanik, H. B. (2016). Geometric translations: an interactive approach based on students' concept images. *North American GeoGebra Journal*, *5*(1), 1-19. https://mathed.miamioh.edu/index.php/ggbj/article/view/67

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). Em J. Carrillo Yáñez, L. C. Contreras González, y M. Á. Montes Navarro (Eds.), *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (p. 30–34). SGSE. http://hdl.handle.net/10272/12509

Godino, J. D., & Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: Conhecimentos e dificuldades de futuros professores. Em H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, y C. Nunes (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (p. 233–243). Associação de Professores de Matemática. https://www.apm.pt/siem_atas

Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, *19*(3), 311–334. https://doi.org/10.12802/relime.13.1933

Grossman, P. (2010). *Learning to practice*: *The Design of Clinical Experience in Teacher Preparation* [Policy Brief]. Partnership for Teacher Quality.

Guerreiro, A. (2019). Conceções e práticas na formação inicial de professores sobre transformações geométricas. *Revista Interacções*, *15*(50), 23-45. https://doi.org/10.25755/int.18787

Harper, S. R. (2003). Enhancing elementary pre-service teachers' knowledge of geometric transformations through the use of dynamic geometry computer software. Em C, Crawford, N. Davis, J. Price, R. Weber, y D. A. Willis (Eds.), *Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* (pp. 2909–2916). Association for the Advancement of Computing in Education. https://www.learntechlib.org/p/18593/

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Principles in the design of tasks to support preservice teachers' noticing enhancement. Em M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 408–415). PME.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*, 135–150. https://doi.org/10.7146/nomad.v19i3-4.148652

Jones, K. (2012). Geometrical and spatial reasoning: Challenges for research in mathematics education. Em H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, y C. Nunes (Eds.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (SIEM XXIII) (pp. 3-10). Associação de Professores de Matemática. https://eprints.soton.ac.uk/446098/

Lima, E. L. (1992). *Coordenadas no plano: Geometria analítica, vetores e transformações geométricas* (2º ed). GRAFTEX Comunicação Visual.

Liñán, M. del M., Contreras, L. C., & Barrera, V. J. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). Em J. Carrillo Yáñez, L. C. Contreras González, y M. Á. Montes Navarro (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (p. 12–20). SGSE. http://hdl.handle.net/10272/12509

Mellone, M., Jakobsen, A., Ribeiro, M., & Parlati, A. (2023). Ethical dimension in the use of interpretative tasks in mathematics teacher education: Fraction division. Em P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. TWG20, Número 23, p. 3835–3842). Alfréd Rényi Institute of Mathematics. https://hal.science/hal-04407634

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P., & Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, *22*(2), 154–167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A., & Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. Em T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2948–2955). DCU Institute of Education and ERME. https://hal.science/hal-01949034

Munhóz, N. N. D., & Pazuch, V. (2023). Conhecimento profissional do professor ao ensinar transformações geométricas: Uma análise de situações de aula. *Educação Matemática Pesquisa*, *25*(1), 122-144. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p122-144

Paques, O. T. W., & Oliveira, S. R. (2012). *Guia do professor vídeo Oferenda musical de Bach. Série Matemática na Escola. Universidade Estadual de Campinas*. https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1143

Ribeiro, M. (2024). Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração. *Debates em Educação*, *16*(38). https://doi.org/10.28998/2175-6600.2024v16n38pe16020

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Characterizing Prospective Teachers' Knowledge in/for Interpreting Students' Solutions. Em A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel: PME. https://www.iris.unina.it/handle/11588/586250

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021a). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(35), 1–32. https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13263

Ribeiro, M., Gibim, G., & Alves, C. (2021b). A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: discussão de Tarefas para a Formação e o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(34). https://doi.org/10.46312/pem.v14i34.12686

Ribeiro, M., & Silva, C. (2024). Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, e024073–e024073. https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sünker, S., & Zembat, İ. Ö. (2012). Teaching of translations through use of vectors in Wingeom-tr environment. *Elementary Education Online*, *11*(1), 173-194. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/90607

Tavares, J. N., & Geraldo, Â. (2018). Ângulo (medidas). *Revista de Ciência Elementar*, *6*(4), 1-5. https://doi.org/10.24927/rce2018.075

Thaqi, X., Gimenez, J., & Aljimi, E. (2015). The meaning of isometries as function of a set of points and the process of understanding of geometric transformation. Em K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 591–597). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME. https://hal.science/hal-01287028

Turgut, M., Yenilmez, K., & Anapa, P. (2014). Symmetry and rotation skills of prospective elementary mathematics teachers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*, 383–402. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a19

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571–596. https://www.learntechlib.org/primary/p/9171/

Notas

---

1. Apresentou-se uma versão prévia deste artigo no 14th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14).
2. Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês, reconhecida internacionalmente, e considerando que a tradução implica numa dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.