Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo*

Cecilia R. Crespo Crespo **
Rosa María Farfán***

RESUMEN

Este trabajo reporta una investigación sobre el papel que desempeñan las argumentaciones en el aula de matemáticas y específicamente, las características de aquéllas que se realizan por reducción al absurdo, a fin de comprenderlas como un recurso de validación de resultados en matemáticas que se logra a través de una construcción sociocultural. Se ha centrado el carácter cultural en el aspecto profesional, por lo que la atención se dirigió hacia estudiantes de distintas carreras y formaciones, para determinar las distintas concepciones de alumnos y los mecanismos de su funcionamiento.
Esta investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica, la cual ofrece una visión incluyente de las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento.
Los resultados que se obtuvieron muestran evidencias de la construcción de las argumentaciones como resultado de prácticas sociales, ya que fue posible, por una parte, identificar en las respuestas obtenidas características que reflejan la formación profesional, y por otra comprender que las argumentaciones por reducción al absurdo no son utilizadas en problemas que exceden el ámbito académico ni siquiera por los estudiantes que son capaces de justificarlas y utilizarlas en contextos propios de las matemáticas.

• **PALABRAS CLAVE**: Socioepistemología, demostración por reducción al absurdo.

ABSTRACT

This work presents a research about the role that held argumentations in mathematics classroom and the characteristics of the argumentation by reduction to the absurd, trying

Fecha de recepción: Febrero de 2005 /Fecha de aceptación Octubre de 2005:

*Esta investigación forma parte de los resultados del proyecto *Construcción social del conocimiento matemático avanzado. Estudios sobre la reproducibilidad y la obsolescencia de situaciones didácticas: De la investigación al aula*, financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Clave U41740-S.

**Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Buenos Aires, Argentina.

***Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN, México.

to understand these ones as a resource of validation of results in mathematics that is achieved through and cultural construction. The cultural character has been centered in the professional aspect, therefore our attention was fixed in different career students, trying to determine the different conceptions of the pupils and the operation mechanisms. This research is located in the socioepistemological perspective that offers a vision that includes cultural and social variables that participate in the knowledge construction. The results shows evidence of the social construction of argumentations as social practices, since it was possible to identify some characteristic at the answers that reflect the professional training, and additionally to understand that argumentations for reduction to the absurd are not applied to problems solve that exceed the academic area not even by the students that had been capable of justifying them and to use them in mathematic contexts.

• **KEY WORDS:** Socioepistemology, proof by contradiction.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação sobre o papel que desempenham as argumentações nas aulas de matemática e as características das argumentações por redução ao absurdo, tratando de compreendê-las como um recurso de validação de resultados na matemática que se alcançam por meio de uma construção sociocultural. Foi enfocado o caráter cultural no aspecto profissional, pois a atenção se concentrou nos estudantes de distintas carreiras e formações, tratando de determinar as distintas concepções de alunos e os mecanismos de seu funcionamento. Esta investigação se situa na perspectiva sócio-epistemológica, a qual oferece uma visão que inclui as variáveis do tipo social e cultural que participam na construção do conhecimento. Os resultados mostram evidências da construção das argumentações como resultado de práticas sociais, já que foi possível, por um lado, identificar nas respostas obtidas características que refletem a formação profissional, e por outro compreender que as argumentações por redução ao absurdo não são utilizadas em problemas que transcendem o âmbito acadêmico nem se quer pelos estudantes que são capazes de justificá-las e utilizá-las em contextos próprios da matemática.

• **PALAVRAS CHAVE:** Sócioepistemologia, demostração por redução ao absurdo

RÉSUMÉ

Ce travail reporte une recherche sur le rôle qui accomplissent les argumentations dans la salle de classe de mathématiques et les caractéristiques des argumentations par réduction à l’ absurde ; on essaye de les comprendre comme un moyen de validation des résultats en mathématiques qui réussit à travers une construction socioculturelle. On a centré le caractère culturel dans l’ aspect professionnel, raison pour laquelle l’ attention est mise sur les étudiants de différentes carrières et formations, en essayant de déterminer les distinctes conceptions des élèves et les mécanismes de son fonctionnement. Cette recherche se place dans la perspective sociœpistemologique, laquelle offre une vision dont les variables du type social et culturel qui participent dans la construction de la connaissance sont incluses. Les résultats obtenus montrent évidences de la construction des argumentations comme résultat des pratiques sociales, d' après qu' il fut possible, par un coté, d' identifier dans les réponses obtenues qui reflètent caractéristiques de la formation professionnelle, et par l' autre coté, de comprendre que les argumentations par réduction de l' absurde ne sont pas utilisées dans des problèmes qui excèdent le milieu professionnelle ni par les étudiants que son capables de les justifier et les utiliser dans des contextes propres aux mathématiques.

MOST CLÉS: Socioepistemologie, démonstration par réduction à l' absurde.

Intuición y razonamiento en matemáticas

Es indudable la existencia de cierta relación entre la lógica y las matemáticas; sin embargo, no ha sido siempre considerada de la misma manera. A lo largo de la historia, diversos pensadores han defendido posturas diferentes sobre dicha relación: las matemáticas como un capítulo de la lógica, la lógica como un capítulo de las matemáticas e incluso ambas como una misma disciplina. Si bien se trata de posiciones que en cierto modo pueden considerarse encontradas, las tres coinciden en afirmar la afinidad indudable entre matemáticas y lógica. Cualquiera que sea la perspectiva adoptada, al hacer referencia a las matemáticas es inevitable pensar en el razonamiento lógico para adquirir sus conceptos y para desarrollar y aplicarlos. En lo que sigue apuntaremos algunos argumentos que diversos autores esgrimen en tal dirección.

Las matemáticas han sido consideradas en los últimos siglos como la ciencia deductiva por excelencia (Boyer, 1996), ya que en ella se pueden obtener unos resultados a partir de otros mediante la aplicación de leyes lógicas. Como cualquier otra ciencia, describe y enuncia proposiciones verdaderas acerca de los objetos de los que trata, cuya validez se sustenta básicamente en el carácter deductivo de la lógica.

A través de la historia han surgido innumerables polémicas entre matemáticos acerca de la aceptación o no de ciertas características del quehacer matemático, del papel de las demostraciones y de las definiciones, del nivel de rigor necesario y de los distintos enfoques que pueden darse al conocimiento matemático.

El conocimiento matemático se origina y sustenta básicamente en dos modos de comprensión y expresión: uno se realiza de forma directa, que corresponde a la intuición, y el otro de forma reflexiva, es decir, lógica (NCTM, 2000). Estos modos de conocimiento, aunque de naturaleza distinta, son complementarios e indispensables en la matemática: el primero es creativo y subjetivo, mientras que el segundo, analítico y objetivo. Ambos se combinan en el proceso mediante el cual se describen los objetos matemáticos, sus relaciones y la manera en que es posible operar o interactuar con ellos.

Ahora bien, en la enseñanza de las matemáticas no se debe descartar *a priori* ninguna forma de razonamiento inductivo o deductivo. Empero, no se puede ni se debe pretender que los alumnos, sobre todo en los primeros niveles de la enseñanza, se muevan dentro de un marco axiomático riguroso y formal. Tal forma de razonar requiere de una madurez que recién comienza a alcanzarse en los últimos años de la adolescencia, y su pleno manejo requiere de un desarrollo más profundo del pensamiento (NCTM, 2000). Sin embargo, ya desde edades tempranas es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y, cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, sin exigencia de formalización. En ciertos niveles y momentos del aprendizaje la forma de razonar puede tener tanto interés como los propios contenidos conceptuales porque el razonamiento es, en sí mismo, un gran contenido a aprender. Dicho proceso no es sencillo y no puede aislarse de los contenidos conceptuales de las matemáticas; se halla presente ante el abordaje de cualquier contenido matemático, sea geométrico, aritmético, algebraico o de la rama de las matemáticas en la que queramos trabajar.

La intuición, entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea, surge desde la niñez y constituye el punto de partida en la investigación y en el aprendizaje. Ante el planteo de un problema matemático debe despertarse el interés, basado en la aceptación de la incertidumbre inicial como parte del proceso de aprendizaje. Debido a que la intuición por momentos no sigue estrictamente los pasos del razonamiento lógico, este método puede conducirnos por caminos falsos; por ello es necesario extremar el cuidado y ejercer el control del razonamiento, mas tiene que aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje. Además, debemos recordar que en los niveles básicos y medio no se están formando matemáticos esencialmente; según los objetivos de los programas educativos, se está enseñando a usar las matemáticas y educando en la comprensión y manejo del método de esta ciencia. Se intenta que los estudiantes se apropien de un pensamiento lógico; sin embargo, se reconoce que hace falta educar a la intuición y al razonamiento.

El concepto de demostración matemática ha evolucionado notablemente a través de la historia (Arsac, 1987). La idea de qué es una demostración y cuándo se la considera válida es relativa al escenario sociocultural en el cual nos ubiquemos y varía considerablemente de una cultura a otra. La historia del desarrollo y evolución de las matemáticas es, en cierto modo, la de la relación entre los dos aspectos del conocimiento: la intuición y la lógica. En algunos escenarios se pone de manifiesto claramente el predominio de uno sobre el otro; en otros ocurre a la inversa.

La mayoría de las ciencias, en particular las que atañen a los campos de las matemáticas, parten de la inducción, unida a la intuición, como método para enunciar sus proposiciones. El razonamiento inductivo se basa en la elaboración de conjeturas e hipótesis que, a partir de un conjunto de observaciones, conducen a la generalización de propiedades. Tal método en las matemáticas puede ser el punto de partida para la búsqueda de regularidades en un grupo de datos que pueden ser de naturaleza diversa (números, gráficas, formas geométricas, etc.) hacia la formulación de generalizaciones sobre la base de lo observado. Probar una propiedad requiere de la deducción que la independiza de la experiencia y la torna universal.

El razonamiento proporciona un modo potente para desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Por medio del análisis es posible percibir patrones, estructuras o regularidades tanto en situaciones de la realidad como en objetos simbólicos. La observación de esos patrones da la posibilidad de preguntarse si son accidentales o si hay razones para que aparezcan. Surgen así conjeturas que deben ser puestas a prueba y que originan demostraciones.

Con relación a la lógica, en el aula es fundamental también motivar a los alumnos en la capacidad para detectar inconsistencias en los razonamientos propios y ajenos, ya que esta mirada crítica les permitirá poder avanzar hacia distintos niveles de pensamiento. Sin embargo, el proceso deductivo a nivel de enseñanza plantea limitaciones y posibilidades, debido a que en él intervienen tanto cierto dominio de los conocimientos como una cierta habilidad en el manejo de principios lógicos que requieren de madurez de pensamiento; de ahí que en los primeros niveles de la enseñanza no tiene sentido plantear deducciones en el sentido riguroso de la palabra (Balacheff, 2000). Recién hacia los diez y seis años se va formando en el ser humano la capacidad de abstracción necesaria para comenzar a interiorizar el pensamiento formal (Santaló, 1981); para llegar a esto es imprescindible desde un principio desarrollar habilidades deductivas, teniendo en cuenta las limitaciones de cada caso (Santaló, 1966).

Demostraciones en el aula

El concepto de demostración suele ser considerado actualmente como una de las nociones medulares en las matemáticas, y es casi unánime que debe ser transmitida a los alumnos a partir de los trece años. Diversas investigaciones en el área de la enseñanza de la matemática señalan su importancia (Balacheff, 1982; Godino & Recio, 2001; Ibañes, 2001; Knuth, 2002), ya que en el quehacer matemático resulta indispensable la capacidad de razonar para lograr la comprensión.

También los diseñadores de currículo señalan las dificultades que involucra la adquisición de esta capacidad:

> *El razonamiento y la demostración no pueden enseñarse, por ejemplo, en una simple unidad sobre lógica, o haciendo demostraciones en geometría (…). El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad. Razonar matemáticamente es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos.*
>
> (NCTM, 2000, 59)

En Argentina, se sugiere su construcción en forma gradual y en espiral durante la Educación General Básica (EGB), que se supone continuará posteriormente:

> *A lo largo de toda la EGB, el contraste de conceptos y relaciones, la búsqueda de regularidades en un conjunto de datos (hechos, formas, números, expresiones algebraicas, gráficos, etc.) y la formulación de generalizaciones sobre la base de lo observado a la experiencia o a la intuición, apuntarán a la formación del razonamiento inductivo (…). La capacidad de razonar lógicamente crece con la edad y las experiencias de dentro y fuera de la escuela. En los distintos grados se han de ir ampliando los contextos de aplicación de la*

misma (numéricos, geométricos, de proporcionalidad, gráficos, etc.) y el rigor con que se la utilice.

(Ministerio de Cultura y Educación, 1995, 91)

Sin embargo, a menudo en la tarea docente debemos enfrentarnos a situaciones en las que los alumnos no comprenden la necesidad de la demostración de propiedades en matemática. En ciertas oportunidades se contentan con una simple verificación; en otras "creen" la propiedad porque les resulta evidente o porque el docente o un libro lo ha dicho así. Aún cuando los alumnos puedan llegar a comprender que en ciertos momentos es necesario demostrar una propiedad, la dificultad de asumir la exigencia de las demostraciones en las ciencias formales se complica más aún cuando ellos las realizan; por ello, las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas de manera satisfactoria por los alumnos en la escuela. A continuación mostraremos algunas referencias sobre cómo debiese orientarse el proceso en el aula, según los niveles escolares. Cabe señalar que esta es una gran problemática no resuelta donde diversos actores, desde diferentes perspectivas, consagran sus esfuerzos.

La demostración en clase de matemáticas presenta una gran diversidad de formas y aparece en los distintos niveles educativos a través de variados tipos de argumentaciones. Su valor en el aula varía de unos niveles a otros, pero su objetivo más amplio es ayudar a comprender la necesidad de validar de modo objetivo el conocimiento científico; en el caso particular de las matemáticas, a través del razonamiento. El pensamiento deductivo se va construyendo lentamente a lo largo de las distintas etapas de la enseñanza escolar, lo cual no significa que se logre realmente su construcción de manera sólida, ya que es común encontrar alumnos universitarios que todavía no han logrado dominar este contenido procedimental (Ibáñez, 2001).

Como los matemáticos están habituados a demostrar, consideran muchas veces que se trata de un procedimiento natural en el estudio de la matemática; sin embargo, se perciben serios obstáculos al adquirirlo. Lo que para el matemático es natural y fácil para la mayor parte de los estudiantes es algo difícil, artificial e incluso sin sentido, ya que muchas veces no manifiestan la necesidad de la demostración para aceptar una propiedad. Esto pone en evidencia concepciones distintas con respecto a la matemática (Godino y Recio, 2001).

A nuestro juicio, la problemática de la demostración en el aula de matemáticas debe enmarcarse en otra problemática más amplia: el desarrollo y evaluación de las distintas prácticas argumentativas que se realizan en tal ámbito (Crespo, 2005).

Cabe precisar que la escuela en general y las matemáticas en particular contribuyen al desarrollo de las ideas lógicas; sin embargo, como hemos mencionado, esto no siempre se logra. Es cierto que se puede observar que –en el mejor de los casos– los docentes aplican en ciertas ocasiones los procedimientos lógicos de forma no sistemática, sin un objetivo determinado y sin tener en cuenta las particularidades esenciales que los caracterizan.

Los procedimientos lógicos más elementales son los que se relacionan con las propiedades de los conceptos. En primer lugar se aíslan propiedades, donde intervienen las operaciones racionales del pensamiento: análisis, síntesis, comparación, abstracción, concreción, generalización y particularización

(Ministerio de Cultura y Educación, 1995). Otro procedimiento lógico elemental relacionado (NCTM, 2000) consiste en asociar propiedades a un objeto. A medida que aumenta la complejidad de los objetos y el grado de abstracción de las propiedades, se hace necesario recurrir a otros procedimientos, como reconocer propiedades, distinguir propiedades esenciales, necesarias, suficientes y necesarias y suficientes, identificar conceptos, definir, clasificar, ejemplificar y deducir propiedades.

En los primeros años de la escuela predomina una matemática de características informales, por lo cual los conceptos aparecen totalmente conectados con objetos y situaciones de la vida cotidiana y de la realidad física. Las argumentaciones poseen en esta etapa un carácter informal e intuitivo; las actividades matemáticas orientadas a fortalecerlas se refieren a justificar soluciones y conjeturas. Los materiales concretos ayudan a comprender procedimientos y algoritmos; de esta manera, los niños se apoyan muchas veces en objetos concretos para explicar y justificar sus ideas y resultados.

Desde que los niños comienzan a tener sus primeras aproximaciones a los objetos matemáticos es conveniente que comprendan que siempre hay que razonar las afirmaciones que se hacen. Muchas veces, cuando no encuentren otro tipo de razón, pueden apelar a otras alternativas para apoyar sus afirmaciones, haciendo uso de un criterio de autoridad para validar proposiciones. Posteriormente, tendrían que asumir que en el razonamiento matemático aparecen reglas específicas, basadas en ciertas herramientas propias que construyan para lograr un razonamiento sistemático (NCTM, 2000).

Ya en la escuela media, se espera (Santaló, 1966) que aparezcan argumentaciones de carácter empírico-inductivo y demostraciones deductivas informales, aunque a veces elementales. A pesar de que muchos alumnos continúan teniendo a veces un pensamiento concreto que depende del contexto físico o específico para poder percibir regularidades y relaciones, y deben apoyar sus razonamientos en el uso de materiales concretos, otros ya son capaces de un razonamiento más formal en el que se alcanza un mayor grado y de abstracción. Deben fomentarse actividades orientadas a la formulación de hipótesis y al razonamiento inductivo, así como poner gran énfasis en la importancia de la verificación deductiva.

El razonamiento se va desarrollando en las clases en que se anima a los alumnos a exponer sus ideas para que sean debatidas; estos intercambios de ideas deberán ser receptivos, permitiendo a los estudiantes explicar y justificar lo que piensan, y aprender cómo detectar falacias y ser críticos ante los pensamientos propios y ajenos. En la clase de matemáticas, los alumnos deberían formular con frecuencia conjeturas sobre las relaciones de los objetos con que están trabajando, investigar dichas conjeturas y elaborar argumentaciones sobre la base de su labor. La formulación de conjeturas y su justificación constituyen parte de la actividad matemática del aula. Debe comprenderse que aún las ideas erróneas pueden ser, con frecuencia, fuentes de importantes discusiones y descubrimientos matemáticos (NCTM, 2000).

Ya en el nivel superior, los objetivos propuestos dependerán de las carreras y orientaciones de los alumnos; en algunas carreras, las demostraciones se tornarán en procedimientos habituales. Sin embargo, aún en aquéllas donde las matemáticas tengan un carácter más operatorio, no debe olvidarse nunca que es primordial el manejo de las argumentaciones para justificar afirmaciones y procesos. Los objetivos planteados para el nivel medio deben seguir vigentes, cualquiera que sea la carrera en la que se encuentre el estudiante, ya que este nivel la madurez del pensamiento lógico permitirá que dichos propósitos se alcancen más plenamente.

El valor de la enseñanza de la demostración matemática y de las argumentaciones en el aula varía de unos niveles educativos a otros, pero su valor general es ayudar a comprender la necesidad de validar las diferentes proposiciones matemáticas que se aprenden y (dentro de un objetivo más amplio) poder discernir la necesidad de validar objetivamente el conocimiento científico. El razonamiento y las argumentaciones no deben ser actividades reservadas para momentos determinados o para algunos contenidos específicos de la matemática, sino que deberían constituir una parte natural y continua de las discusiones en clase, no importa cuál sea el tema de estudio (NCTM, 2000).

La intuición y el rigor, que habitualmente son tomados como términos antagónicos, se encuentran íntimamente relacionados con el desarrollo de los conceptos matemáticos, y muchas veces son complementarios. La intuición, producto de las imágenes conceptuales del individuo, se aproxima más a las ideas que maneja la lógica cuanta más información tiene éste; ahora bien, el desarrollo de esta intuición lógica debe comprenderse como uno de los mayores objetivos de la educación matemática avanzada (Ministerio de Cultura y Educación, 1995).

Las argumentaciones matemáticas según el enfoque socioepistemológico

La palabra demostración se ha utilizado, y se utiliza aún en la actualidad, dentro de distintos contextos en los que adquiere varios sentidos; se la relaciona también con algunos términos que para algunos autores son sinónimos y para otros poseen diferencias fundamentales entre sí. Por ello, es necesario diferenciar sistemática y claramente los significados de algunos términos relacionados con las demostraciones matemáticas y de los distintos grados de importancia que tiene la argumentación en la matemática y en el aula. No hay definiciones que sean aceptadas unánimemente, por ejemplo, al hacer referencia a argumentaciones, demostraciones, pruebas y razonamientos. A veces estos términos tienen matices que los diferencian unos de otros, según los autores que se consulten y el enfoque de sus investigaciones (Vega, 1993; Balacheff, 1982; Duval, 1999). Por ejemplo, en Duval (2000) se hace hincapié en el papel de la escritura en la actividad matemática y la manera en la que el lenguaje influye en la expresión de las demostraciones.

En cuanto a la postura de la matemática educativa –en la cual se enmarca nuestro estudio–, al afrontar la problemática de las demostraciones en el aula sustenta la consideración de que se trata de un elemento más que caracteriza el fenómeno educativo llevado a cabo en el aula de matemáticas.

> *La matemática educativa no es la enseñanza de la matemática, ni la matemática escolar una simplificación de la matemática* [Su objeto de estudio son] *los procesos de transmisión y*

adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar.

No nos reducimos a la búsqueda de una «buena manera de enseñar» una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber.

(Cantoral, 1995, 2-3)

La línea de investigación que desarrollamos en la disciplina de matemática educativa considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, o sea, atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004).

Tal aproximación se ha llamado formalmente *acercamiento socioepistemológico*. Puede decirse que la problemática de estudio de la matemática educativa es *"el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, constituido socialmente fuera de la institución escolar, se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza*" (Farfán, 2003b, 5). Este proceso por el cual de incorporan los saberes matemáticos en el sistema educativo plantea una serie de problemas de carácter tanto teórico como práctico, que necesitan acercamientos teóricos y metodológicos adecuados.

El enfoque socioepistemológico a través del análisis integral desde las cuatro ópticas ya citadas (Cantoral y Farfán, 2003 y2004) permite comprender al conocimiento matemático como una construcción sociocultural. Con el reconocimiento de la naturaleza y construcción social del conocimiento matemático se prioriza la actividad humana, a diferencia de los enfoques teóricos que giran alrededor del objeto matemático.

La aproximación socioepistemología admite la existencia del discurso matemático escolar como noción, a fin de explicar los fenómenos pertinentes en el sistema escolar. Por ejemplo, en Cantoral y Farfán (2004) se afirma que

La sensibilidad a la contradicción por parte de los estudiantes no proviene, en forma exclusiva, de la agudeza con la que juzguen los procedimientos y razonamientos matemáticos, sino que intervienen adicionalmente elementos propios del discurso del medio escolar y del discurso matemático escolar.

En el mismo artículo se reporta que los alumnos basan sus decisiones en situaciones que pertenecen al orden cultural, aunque no siempre sean compartidas entre los participantes del proceso escolar, y únicamente se muestra a los participantes en la medida en que se pertenezca a esa cultura, ignorando sus características y sólo reconociendo el "conocimiento" que debe ser atendido. Para llevar a cabo el proceso enseñanza-aprendizaje, los autores mencionan que en el ámbito escolar se plantean dos tipos de preguntas:

Las destinadas a controlar la interacción, a hacer explícito el conocimiento que se supone tienen los interlocutores; éstas sólo puede plantearlas quien enseña a causa de su posición que ocupa en la institución y del rol que desempeña en la conformación del discurso matemático *escolar. Por tanto, la metáfora: si un alumno nos preguntara ¿a qué es igual el logaritmo de un número negativo?, carece de interpretación plausible para los participantes.*

(…) El discurso matemático escolar acepta otras preguntas de orden teórico, a fin de develar una coherencia interna en el discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis inusuales: Si aceptamos esto, entonces (…) habrá que aceptar esto otro (….) Una forma de abstracción reflexiva, en el sentido de Piaget, suele usarse con frecuencia en algunos momentos de la actividad escolar en el campo particular de las matemáticas escolares. Sin embargo, el riesgo de cometer errores tiende a incrementar la resistencia de los estudiantes ante esas formas interrogativas.

El estudiante reflexiona en el aula pero, debido a la forma de preguntas a la que es sometido y a la que debe responder, de acuerdo con lo que se le indica en la escuela, sus respuestas serán propias del discurso que conoce. En este caso, nos preguntamos: ¿por qué los estudiantes responden de cierta manera? ¿Por qué este tipo de discurso matemático escolar? ¿Por qué los maestros enseñan lo que enseñan? Los actores en el sistema escolar llevan a cabo sus papeles ajustándose a ciertas normas y saberes institucionalizados que ahora forman parte de su cultura e ideología; ello condiciona sus maneras de responder. Desde nuestra reflexión, afirmamos que lo que induce a tal conducta es el carácter normativo de la práctica social, el cual hace que los actores del sistema escolar se comporten de manera específica respecto a los conocimientos.

En este caso, nuestro objeto de estudio son las argumentaciones matemáticas, particularmente las que utilizan la reducción al absurdo. Nos interesa, por tanto, hacer un análisis integral de ellas con el fin de comprender que no son utilizadas en problemas que exceden el ámbito académico, ni siquiera por los estudiantes que son capaces de justificarlas y utilizarlas en contextos propios de la matemática. Tal visión se orienta a la comprensión de que las demostraciones, como parte del conocimiento matemático, son una construcción sociocultural, donde cobra una importancia fundamental el escenario en el que se desenvuelven.

En esta etapa hemos centrado el carácter cultural en el aspecto profesional (Crespo, 2005), por lo cual la atención se ha fijado en las respuestas de estudiantes de distintas carreras y formaciones, tratando de determinar sus diferentes concepciones y los mecanismos de su funcionamiento. Nuestra investigación se ubica en la perspectiva socioepistemológica, la cual ofrece una visión incluyente las variables del tipo social y cultural que participan en la construcción del conocimiento.

Las demostraciones por reducción al absurdo

Las demostraciones por reducción al absurdo han sido durante siglos aceptadas y utilizadas dentro de las matemáticas tanto por investigadores como por docentes. En el aula también son presentadas en numerosas oportunidades, pero sin una reflexión explícita acerca de su significación y consecuencias. Su significación no es sencilla e involucra ideas que no son para nada triviales; incluso no todos los matemáticos han aceptado su empleo como medio para validar proposiciones de esta ciencia.

Descripción y explicación lógica

Las argumentaciones por reducción al absurdo, también llamadas simplemente por el absurdo, se basan en la aplicación del siguiente esquema:

> *A partir de un conjunto Γ de premisas, que constituyen las hipótesis, se pretende probar la validez de cierta conclusión T, que en el caso de un teorema se suele denominar tesis.*
>
> *Se agrega como una nueva premisa la negación de la tesis y de esta manera se tiene un nuevo conjunto de premisas Γ'. A partir de Γ' se aplican reglas de inferencia y se llega a una contradicción.*
>
> *De esto se infiere que el nuevo conjunto de premisas es contradictorio o no consistente, por lo que se admite la verdad de la tesis.*

Dicho esquema de razonamiento, que se identifica con una forma de razonamiento hipotético, conduce a una contradicción. Al haber incorporado al conjunto de hipótesis la negación de la tesis del teorema, presenta distintas variaciones, conocidas como *método de exhaución*, *método del descenso infinito* o *método de demostración por contraposición*.

Es posible dar una explicación general al método de reducción al absurdo y su fundamento. Partamos de considerar que la forma del enunciado del teorema considerado es el correspondiente a una implicación:

"Si A, entonces B"

Lo cual significa que, bajo las condiciones que afirma A, se debe demostrar que se cumplen las condiciones enunciadas por B.

La ley lógica del contrarrecíproco afirma que el enunciado "*Si A, entonces B"* es equivalente al enunciado:

"Si no B, entonces no A"

Este último se conoce como contrarrecíproco o contrapositivo del primero.

Desde el punto de vista lógico, la equivalencia entre una implicación y su contrarrecíproca se basa en la tabla de verdad de este conectivo lógico. Para que la implicación

> "*Si A, entonces B*" sea verdadera, debe suceder que siempre que A sea verdadera, B también lo sea. Si se diera que B fuera falsa, tendría que ser también A falsa. En otras palabras, si B es falsa, entonces A debe ser falsa. De esta forma se llega a que *"Si no B, entonces no A"*.

Otra explicación posible se basa en considerar una cadena de equivalencias lógicas, en la cual se parte de "*Si A, entonces B*", y se llega a *"Si no B, entonces no A".* Para ello, escribiremos simbólicamente las proposiciones e iremos considerando las equivalencias sucesivas:

$A \Rightarrow B$	
$(\sim A) \vee B$	Ley de la condicional disyunción
$(\sim A) \vee (\sim(\sim B))$	Ley de doble negación
$(\sim(\sim B)) \vee (\sim A)$	Conmutatividad de la disyunción
$(\sim B) \Rightarrow (\sim A)$	Ley de la condicional disyunción

Este tipo de reducción al absurdo parte de la negación de la tesis y llega directamente a la negación de la hipótesis, lo cual obliga a afirmar que la tesis debe ser verdadera si la hipótesis lo es.

Las demostraciones por contradicción o por reducción al absurdo propiamente dichas presentan un formato en el que, al agregarse la negación de la tesis a las hipótesis, se hace uso simultáneamente de ambas para llegar al hecho de que la conjunción de la hipótesis y la negación de la tesis no es posible.

Si se quiere demostrar que

“Si A, entonces B”

Se parte para llegar a un absurdo de

“A, y no B”

Al llegar a un absurdo, o sea, a un enunciado falso, se infiere que la conjunción anterior es falsa, pero como la hipótesis A ha sido considerada verdadera en el enunciado del teorema, resulta necesario que sea “no B” falsa y, por tanto, B debe ser verdadera.

Con frecuencia, la realización de una demostración por reducción al absurdo se prefiere sobre la demostración directa, aun siendo posible la derivación directa. En algunos casos, sin embargo, no es posible realizar demostraciones directas y es necesario recurrir a argumentaciones por el absurdo para determinar la verdad de un enunciado.

Su aparición histórica

A partir de las ideas de Parménides se fundó en Elea una escuela en la que sobresalió Zenón, quien en el siglo V a.C. utilizó el método de reducción al absurdo en la explicación de sus famosas paradojas.

Eudoxo de Cnido, quien pasó algunos años junto a los discípulos de Platón, fundamentó la organización deductiva sobre un sistema explícito de axiomas (Eggers, 1995); asimismo, introdujo el método de exahución. Este método de demostración supone una doble reducción al absurdo. Por ejemplo, para probar que el área de cierto recinto es A se demuestra, utilizando polígonos inscritos, que no puede ser menor que A; de la misma forma se demuestra, recuuriendo a polígonos circunscritos, que no puede ser mayor que A.

La demostración atribuida a los pitagóricos para la inconmensurabilidad de 2 con 1 procedía, según Aristóteles, por *reductio ad absurdum*. Se trata de la conocida demostración que hacemos en la actualidad para la irracionalidad de 2, y que fuera incluida en algunas de las antiguas versiones de los *Elementos* de Euclides, como Proposición 117 del Libro X; además, es posible hallar varias demostraciones que emplean el recurso de reducción al absurdo.

Fermat empleó el método de *descenso infinito*, una variante del método de demostración por reducción al absurdo (Kline, 1972) donde la contradicción consiste en definir una sucesión infinita estrictamente decreciente de números enteros positivos. Dicho de otra manera: si siempre que se encuentre un número natural que verifica cierta propiedad hay otro menor que él, que también la verifica, entonces podrá afirmarse que ningún número natural verifica dicha propiedad, ya que el conjunto de números naturales tiene un primer elemento en su ordenamiento según la relación “*es sucesor de*” y no es denso. La aplicación que hizo Fermat de tal método tuvo como fin demostrar algunos teoremas de la teoría de números.

Cabe hacer notar que algunas culturas, como la china y la hindú, no utilizaron en su matemática demostraciones por reducción al absurdo, y que en ambos casos desconocían e incluso negaban el principio del tercero excluido (Ifrah, 1997), base innegable de esta forma de argumentación. Para los griegos y, en consecuencia, para Occidente, sin lugar a dudas la influencia de Zenón y Parménides fue decisiva para la aceptación de este principio lógico.

El absurdo como concepción filosófica

Ante la crisis de las paradojas o antinomias producida a fines del siglo XIX, Luitzen Brouwer y la escuela intuicionista afirmaron que ello se debió al uso ilimitado que se hacía del principio del tercero excluido; por esta causa, propusieron la limitación o directamente su supresión. Para Brouwer, dicho principio sólo era aplicable a "*conjuntos finitos y bien determinados*" (Toranzos, 1943).

Efectivamente, frente a una paradoja es el principio del tercero excluido el que lleva a afirmar la negación de la misma, para caer nuevamente en otra afirmación paradójica. Un ejemplo en el que se ve claramente esto es la conocida Paradoja de Russell acerca de la existencia de conjuntos que se contienen a sí mismos como elementos. Para los intuicionistas, es posible que el principio del tercero excluido aplicado en razonamientos matemáticos donde se realiza una argumentación por reducción al absurdo, ocurra algo similar. El intuicionisno plantea esta duda y trata de darle solución sin postular nada al respecto (Toranzos, 1943).

Desde el punto de vista lógico, el neointuicionismo se destaca por el sentido que da a los términos afirmativo y negativo. Para la lógica subyacente al formalismo

- Lo *verdadero* es lo no contradictorio
- Lo *falso* es lo que no es verdadero

En esta postura, verdad y falsedad son las únicas dos posibilidades, opuestas y contradictorias.

Para la lógica neointuicionista basada en la visión de Brouwer:

- *Afirmación de una proposición*: Significa que puede demostrarse por construcción, es decir, a través de un procedimiento de cálculo finito

- *Negación de una proposición*: Significa que dicha proposición implica una contradicción.

- Existe además una tercera posibilidad; se trata de aquellas proposiciones de las que no se ha demostrado ni su afirmación ni su negación.

La negación y la afirmación brouwerianas son posibilidades contrarias que se excluyen, pero no necesariamente son opuestas contradictorias. Sobre la base de estas definiciones no se puede inferir la negación de una proposición a partir de saber que la afirmación de una proposición conduce a un absurdo. Los intuicionistas (Haack, 1978) se vieron en la necesidad de sentar las bases de una lógica que no utilice el principio del tercero excluido; esta labor estuvo a cargo de Glivenko, quien partió de las ideas de Brouwer y Heyting.

En el siguiente cuadro se sintetizan algunas ideas de la lógica intuicionista, en comparación con las de la lógica clásica (Toranzos, 1943). Utilizaremos el símbolo $\sim$ para representar la negación clásica y $\neg$ para la negación intuicionista, $\Rightarrow$ representará la implicación clásica y $\supset$ la implicación intuicionista. (Cuadro No. 1).

Lógica clásica	Lógica intuicionista
~A indica la falsedad de A	¬ A indica la absurdidad de A
~(~A) indica la falsedad de la falsedad de A	¬ (¬ A) indica la absurdidad de la absurdidad de A
A implica ~(~A) ~(~A) implica A; por tanto, A es equivalente a ~(~A), o sea, la falsedad de la falsedad de A coincide con A	A implica ¬ (¬ A), pero no se puede afirmar que ¬ (¬ A) implica A; por tanto, no se puede afirmar que A sea equivalente a ¬ (¬ A)

Cuadro No. 1.

Si se aplican estas ideas a las demostraciones por reducción al absurdo, se obtienen las descripciones que contiene el Cuadro No. 2.

Lógica clásica	Lógica intuicionista
Principio de transposición:lo que implica lo falso es falso $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$	*Principio de transposición*:lo que implica lo absurdo es absurdo
Si se aplica este principio a la negación $(\sim A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow (\sim (\sim B) \Rightarrow \sim (\sim A))$ Y como $\sim (\sim A) \equiv A$ $\sim (\sim B) \equiv B$ Se tiene $(\sim B \Rightarrow \sim A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	Si se aplica este principio a la negación $(\neg A \supset \neg B) \supset (\neg(\neg B) \supset \neg(\neg A))$ Y como $\neg(\neg A) \supset A$ $\neg(\neg B) \supset B$ Pero como A no implica ¬ (¬A) B no implica ¬ (¬B) Se tiene $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset \neg(\neg B))$ De esto se deduce que las demostraciones por el absurdo no son necesariamente válidas.

Cuadro No. 2.

Una consecuencia importante de la lógica intuicionista para la lógica clásica es que permite afirmar la independencia del principio del tercero excluido con respecto a los demás principios de la lógica clásica. Tal afirmación genera una ruptura desde lo epistemológico.

La visión intuicionista de la matemática (Haack, 1978) presenta a esta ciencia como aquélla que no va más allá de los objetos que ha construido en ella; la existencia de los objetos matemáticos y sus propiedades sólo es demostrable a través de su re-construcción. Ahora bien, en el estudio de las construcciones matemáticas mentales, existir es sinónimo de ser construido; de esta manera, para los intuicionistas la lógica no puede decir nada sobre la existencia de un objeto matemático si no es capaz de construirlo.

El absurdo como concepción filosófica en las culturas antiguas

La posición de los intuicionistas de la no aceptación del tercero excluido no fue una novedad del siglo XX. Si buscamos antecedentes en culturas que no incluyeron las argumentaciones por el absurdo, como la china y la hindú, resultan notables algunas aserciones filosóficas:
En la China antigua, las ideas filosóficas se basaron en la coexistencia y equilibrio entre el ying y el yang (Ifrah, 1997). Todo ser es combinación de lo femenino y lo masculino, de la energía pasiva y de acción; nada es totalmente ying o totalmente yang. Esto ofreció un sustento simbólico desde el que fue posible construir diferentes modos de oposiciones numéricas y dio también la posibilidad para el surgimiento de objetos matemáticos como el cero, aunque no tuvo todas las características del cero hindú.

La simetría y equilibrio que preside el paradigma chino es radicalmente distinto de la filosofía de la Grecia clásica. Para los griegos no es posible pasar del *ser* al *no ser*, no es posible cambiar el género o la naturaleza de un objeto; no existe ningún elemento identificable que esté en el límite del *ser* y el *no ser*. De allí que en Grecia no apareció el cero.

En cuanto a la formación del cero entre los mayas, se caracterizó por la inexistencia de dicotomías que favorecieron la constitución de la *noción de cero* (Farfán, 2003b). El dios de la lluvia no es *a priori* bueno o malo, sino que lo es simultáneamente; de ahí que la noción de transición entre lo uno y lo otro sea tan importante como los estados mismos. Investigaciones recientes (Covián, 2005) hechas bajo el enfoque socioepistemológico explican la construcción social del conocimiento matemático que se halla en torno a la construcción de vivienda maya, la cual responde a ciertos contextos y cultura inherente; asimismo, señala la función normativa de la práctica social.

La India, cuna del cero con todas sus funciones, también se caracterizó por tener ideas filosóficas totalmente distintas a las griegas, en particular con relación al principio del tercero excluido. Historiadores de la cultura hindú comentan:

> *En todas las cuestiones los filósofos budistas llegan a responder desde luego por la afirmación, después por la negación, después de una manera que no es la negación ni la afirmación. A una pregunta como ésta, por ejemplo: «¿Buda existe después de muerto?» responde: «Buda existe después de muerto, Buda no existe después de muerto, Buda no es más existente que no existiendo después de la muerte».*
>
> (Le Bon, 1901, 358)

La idea de que pudiera darse en Buda la posibilidad de *ser* y *no ser* simultáneamente no podría haber sido aceptada por los griegos.

En los griegos surge también el razonamiento acerca del *ser* y el *no ser*. Parménides compone un poema épico-didáctico destinado a persuadir, donde no pone en juego motivaciones que no surjan por sí solas y utiliza el esquema que Aristóteles menciona como "*reducción a lo imposible*", o reducción al absurdo:

> *Que el ser es implica que no ha nacido, pero si hubiese nacido significa que previamente no existía el ser y, en ese caso, tendría que haber nacido de la nada, pero, aparte de que sólo puede hablarse de lo que es y no de la nada, ¿qué necesidad le haría pasar de no ser a ser?*
>
> (Citado por Eggers, 1995, 33)

Esta argumentación utiliza, además, uno de los principios aristotélicos, que es el principio de necesidad. En la racionalidad clásica,*"que el ser es y no puede ser que no sea"*, enunciado por Parménides, surge de las bases pre-racionales (Lizcano, 1993). Para Aristóteles, el principio de no contradicción es básico e inviolable, mientras que para las filosofías china e india no lo es. Aristóteles afirma:

> *El principio más firme de todos será aquel con respecto al cual es imposible padecer error. Tendrá que ser el mejor conocido, necesario y no hipotético. Ahora bien, un principio que es necesario aceptar para comprender cualquier ente, no es hipotético. Y lo que es necesario para conocer cualquier ente es necesario que se tenga conocido de antemano.*
>
> (Aristóteles, citado por Lizcano, 1993, 158)

Esta diferenciación del principio no contradicción por encima de los otros principios lógicos se pone en evidencia con la aceptación a priori de que las ciencias deben ser consistentes. Tal principio es la base de toda la filosofía y la lógica griegas, así como el punto de partida de toda la ciencia de tradición griega.

Las bases lógicas que sustentan las argumentaciones por reducción al absurdo fueron descritas básicamente por Aristóteles en sus orígenes. Este tipo de argumentación descansa sobre dos principios enunciados por Aristóteles: el del *tercero excluido* y el de *no contradicción*. Por una parte, el tercero excluido afirma que vale A o no A, una cosa o su negación; por otra, el de no contradicción dice que no pueden valer A y no A, no pueden ser ciertas simultáneamente una cosa y su negación. De allí que ante una implicación: $H \Rightarrow T$,sea lícito para los griegos suponer que pueda ser $\sim T$, pero al llegar a que $\sim T$ no es compatible con H, o sea que debería ser $\sim H$, como $H \wedge \sim H$ no pueden ser ciertas; entonces no puede ser $\sim T$, y si no es $\sim T$ deberá ser cierta T.

Claramente se observa en el párrafo anterior que, si no se acepta el principio del tercero excluido o el de no contradicción, las argumentaciones por reducción al absurdo carecen de sustento lógico. Las matemáticas occidentales que se edificaron sobre las bases sentadas por Aristóteles aceptaron y utilizaron este tipo de argumentación durante siglos sin cuestionarlo, pero estamos en presencia, sin lugar a dudas, de una construcción cultural fuertemente cimentada en las ideas aristotélicas. Es decir, el saber es una construcción cultural y el método de demostración responde a una concepción filosófica.

El absurdo en el aula

> *La demostración por reducción al absurdo es un método de razonamiento deductivo de especial trascendencia en el quehacer matemático y presenta una problemática epistemológica, cognitiva y también didáctica de sumo interés para la investigación en educación matemática.*
>
> (Sáenz Castro, 2002, 48)

La utilización de argumentaciones por el absurdo en el aula de matemática, según investigaciones realizadas (Sáenz Castro, 2002), genera en los alumnos una serie de obstáculos cognitivos, epistemológicos y psicológicos en el aprendizaje de este tipo de demostración; sin embargo, Sáenz Castro no reporta los resultados que ha obtenido en sus experimentaciones.

Desde el punto de vista epistemológico, hemos visto que no todas las ideas filosóficas desarrolladas por el hombre aceptan este tipo de argumentación; desde el cognitivo, que en el método por reducción al absurdo hay que falsear la tesis como punto de partida y comprender a profundidad el significado de un enunciado condicional, mientras que desde el psicológico podría decirse que el método de argumentación por reducción al absurdo produce en los alumnos cierto desconcierto, ya que parte de negar lo que se quiere demostrar.

Con el objetivo de observar y analizar cuáles son las actitudes de los alumnos de diversa formación ante las argumentaciones por el absurdo presentadas en distintos contextos, se diseñó una serie de actividades de diferente tipo que describiremos a continuación. La experimentación se realizó en dos fases. La primera tuvo como fin determinar cuál es el papel que desempeñan las figuras de análisis en las demostraciones por reducción al absurdo; la segunda se concentró en analizar si era posible reconocer a las argumentaciones por reducción al absurdo como una construcción sociocultural.

Primera fase de experimentación: Las figuras de análisis en las argumentaciones por reducción al absurdo

Objetivos, diseño de la secuencia, destinatarios

Esta fase de exploración se diseñó a fin de poner en juego una de nuestras hipótesis relacionadas con las argumentaciones por reducción al absurdo: *las figuras de análisis dificultan la comprensión de los razonamientos cuando se utilizan argumentaciones por el absurdo*. Dicha afirmación se basó en que, en estos casos, se hace difícil el aprovechamiento coherente de las figuras de análisis, pues al comenzar suponiendo que la tesis no se verifica, no es posible realizar una figura que verifique todas las condiciones impuestas por la hipótesis.

Para confrontar esta hipótesis y analizar las opiniones que este tipo de figuras motiva en futuros profesores de matemáticas, se hizo la siguiente secuencia, que retoma el texto de la demostración de la Proposición 2 del Libro III de los *Elementos* de Euclides. La afirmación presentada a los estudiantes fue la siguiente:

> La demostración de la Proposición 2 del Libro III de los *Elementos* de Euclides (1991) afirma:
>
> …"Sea $AB\Gamma$ *el círculo y sobre su circunferencia tómese al azar dos puntos* A, B.
>
> *Digo que la recta trazada desde* A *hasta* B *caerá dentro del círculo. Pues supongamos que no, entonces si es posible, caiga fuera como* AEB *y tómese el centro del círculo* $AB\Gamma$*, y sea* Δ *, y trácese* ΔA *y* ΔB*, y prolónguese* ΔZE*. Así pues, como* ΔA *es igual a* ΔB*, entonces también el ángulo* ΔAE *es igual al ángulo* ΔBE *; y como un lado* AEB *del triángulo* ΔAE *ha sido prolongado, entonces el ángulo* ΔEB *es mayor que el ángulo* ΔAE *.*
>
> *Pero el ángulo* ΔAE *es igual al ángulo* ΔBE *. Por tanto, el ángulo* ΔEB *es mayor que el ángulo* ΔBE *. Ahora bien,*

el ángulo mayor lo subtiende el lado mayor, entonces ΔB es mayor que ΔE. Pero ΔA es igual que ΔZ . Por tanto, ΔZ es mayor que ΔE , el menor que el mayor, lo cual es imposible.

Entonces la recta trazada de A a B no caerá fuera del círculo. De la misma manera, demostraríamos que tampoco caerá sobre la misma circunferencia; por lo tanto caerá dentro.

Por consiguiente, si se toman dos puntos al azar en la circunferencia de un círculo, la recta que une los puntos caerá dentro del círculo.

Que es lo que había que hacer"...

a. Explique la estrategia de argumentación utilizada en este teorema por Euclides

b. Realice la construcción correspondiente y explique el papel y las dificultades de las figuras de análisis en este tipo de demostraciones

c. Enuncie en términos matemáticos actuales el correspondiente teorema

d. Justifique cada paso, enunciando las propiedades previas de las que hace uso Euclides, si las hubiera

Los destinatarios de esta secuencia fueron los alumnos de la materia Fundamentos de la Matemática, correspondiente a la carrera de Profesor de Matemática y Astronomía del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires, Argentina. Los alumnos se encuentran terminando sus estudios del último año de la carrera mencionada, y en la asignatura Fundamentos de la Matemática han abordado temáticas como lógica proposicional y de predicados y sistemas formales durante el primer cuatrimestre, al igual que el análisis de algunos núcleos temáticos medulares en los fundamentos de la matemática, como la axiomática de Euclides y de Hilbert para la geometría, la fundamentación del análisis, las geometrías no euclidianas, las posiciones frente a la crisis de los fundamentos en el siglo XX, entre otras.

Como la experimentación se realizó sobre final del curso, podemos afirmar que los alumnos involucrados poseen cierto manejo de la lectura, interpretación y análisis de teoremas, así como de las ideas lógicas que subyacen en ellos. Además, están acostumbrados a realizar análisis metamatemáticos de propiedades y conceptos matemáticos.

Esta secuencia no pudo ser experimentada en otras poblaciones de alumnos, ya que requiere de ciertos procedimientos y habilidades cuya formación se apunta en la asignatura mencionada, pero no generalmente en otras.

Los alumnos que intervinieron fueron doce. Una vez hecha la resolución de la secuencia por escrito, se prosiguió con una entrevista oral a algunos de ellos para profundizar en las ideas vertidas en el trabajo.

Resultados obtenidos en la primera fase de experimentación realizada

Los alumnos que accedieron a responder las preguntas presentadas, excepto uno, identificaron que se trataba de una demostración por reducción al absurdo. Formularon la explicación de este método de argumentación, afirmando en algunos casos:

Utiliza demostración por reducción al absurdo. Niega la tesis que es que AB es interior a la circunferencia y llega a una contradicción, entonces es la negación de la negación de la tesis.

Euclides utiliza para esta demostración una prueba indirecta o demostración por reducción al absurdo. Las demostraciones indirectas constituyen un tipo habitual del razonamiento matemático. Para establecer la verdad de una proposición A se hace la hipótesis de que la proposición A' contraria a lo de A es cierta. Entonces mediante una cadena de razonamientos se llega a una contradicción con A, lo que prueba lo absurdo de A'. En consecuencia, apoyándose en el principio lógico fundamental del tercero excluido, la falsedad de A' establece la verdad de A.

Cuando los alumnos intentaron realizar la figura de análisis correspondiente a la demostración presentada por Euclides, dudaron y expresaron primeramente en forma oral las dificultades que acarrea esta figura de análisis. Luego, diez de los doce participantes presentaron figuras de análisis que denotaban la inconsistencia de la suposición hecha por Euclides.

La figura de análisis que presenta Euclides (1991 p.294) es la que muestra la Figura 1.

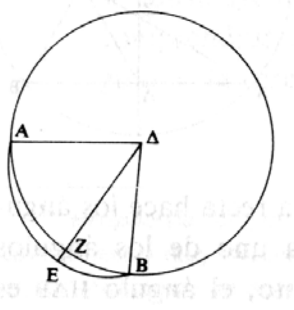

Figura 1.

Debe notarse que la recta AEB es "*curva*", pues para poder realizar el razonamiento por reducción al absurdo se supone que tal segmento es exterior a la circunferencia y, por tanto, no es posible realizar el trazado correspondiente, ya que esta suposición no es consistente con el resto de las hipótesis.

Presentamos a continuación algunas figuras de análisis realizadas por los alumnos encuestados en esta etapa, que nos parece pueden brindar una idea sobre las distintas dificultades surgidas y las maneras en las que cada uno las solucionó.

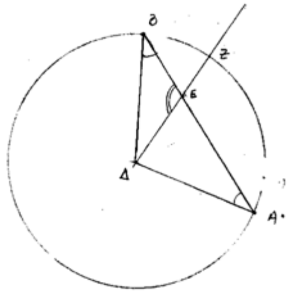

Figura 2.

En el caso de la Figura 2, se observa que si bien en el razonamiento se está suponiendo que el punto E es exterior al círculo, en la figura que presenta esta alumna E es interior. Al explicar, afirma que el punto "*se ve en el interior del círculo, pero está afuera*".

Una figura de análisis distinta fue presentada por otro alumno que intervino en la experiencia (Figura 3).

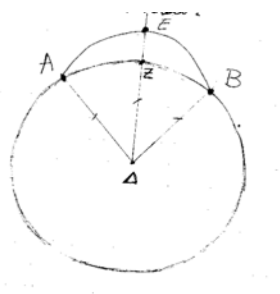

Figura 3.

Se trata de una construcción muy similar a la presentada por Euclides, donde se evidencia la necesidad de "curvar la recta" para poder responder a la suposición de la negación de la tesis.

Una situación parecida quedó evidenciada en la siguiente figura de análisis (Figura 4):

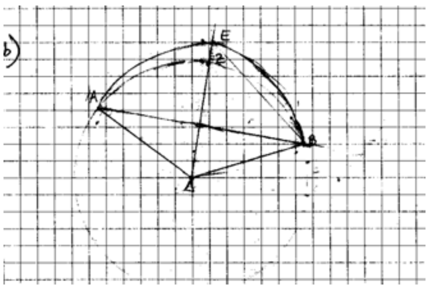

Figura 4.

Aquí podemos observar que, si bien existe gran similitud con la figura de Euclides, una suave línea una B con E, ya que de esta manera se pone en evidencia que "*la recta no es curva*".

La Figura 5 muestra otra representación análoga.

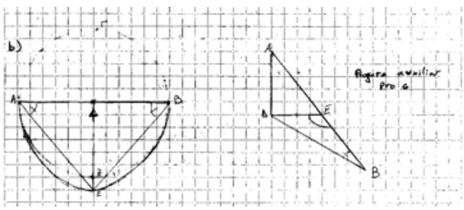

Figura 5.

En este caso, aparece el punto E en el exterior del círculo, pero además de utilizar una línea curva para representar la recta, se unen los puntos A y E, y B y E con segmentos. Para poder seguir los razonamientos de Euclides es necesario que se realice una figura auxiliar en la que A, E y B estén alineados.

La Figura 6 presenta otra figura de análisis muy particular:

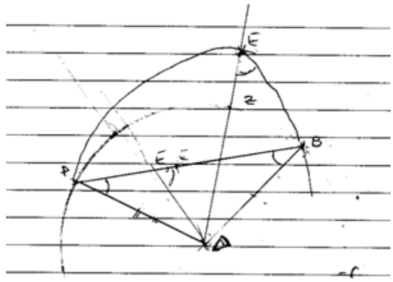

Figura 6.

En ella, el punto E figura en dos lugares del plano simultáneamente: uno en el interior del círculo y el otro en el exterior. La alumna que la dibujó afirmó que consideraba una u otra posición según el momento de la demostración. Al preguntársele sobre si esto no era un problema, dijo que "*es la única manera de ver intuitivamente lo que sucede*" y de poder "*mantener al punto E fuera de la circunferencia*", pues "*como estamos razonando sobre una afirmación falsa, no es posible pensar coherentemente".*

Una situación similar se dio en la presentación de la figura de análisis de la Figura 7. En ella, la alumna que la hizo ubicó en dos lugares simultáneos a los puntos A y B.

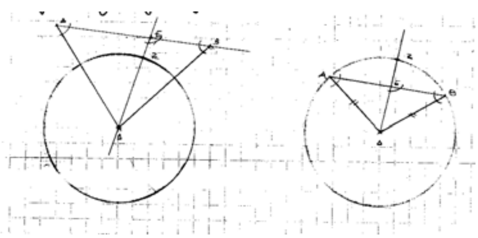

Figura 7.

La autora de esta figura de análisis dijo que le resultó esto más natural que "*curvar una recta*", pues lo consideraba "*muy poco* *euclidiano*". Sin embargo, para poder seguir el razonamiento lo hacía simultáneamente sobre ambas figuras, afirmando que "*la incompatibilidad de ambas afirmaciones, hipótesis y negación de la tesis, se ponía de manifiesto en la necesidad de ambas figuras*".

La Figura 8 presenta características comunes a varias de las que hemos presentado. El segmento AZB presenta tres casos, ya que es curvo y queda representado por dos segmentos AZ y ZB, simultáneamente, mientras que en la figura auxiliar aparece el punto Z interior para visualizar la alineación de los tres puntos:

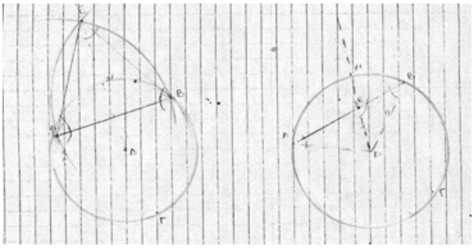

Figura 8.

Otro caso donde aparecieron dos ubicaciones simultáneas para el punto B fue el que ilustra la Figura 9, en el que el punto B era considerado alineado con E y A para poder seguir ciertos razonamientos de Euclides.

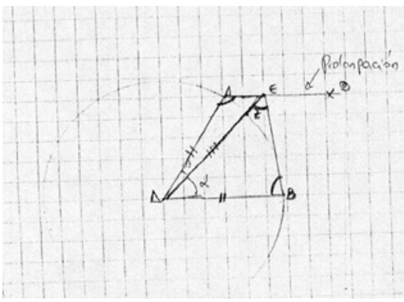

Figura 9.

En las figuras de análisis propuestas por los estudiantes que intervinieron en la experimentación se observa claramente que, para poder representar la situación propuesta por Euclides mediante un gráfico, es necesario que algunos elementos pierdan sus características euclidianas: *rectas curvas, puntos que se ven en el interior, pero que están en el exterior de la circunferencia, puntos que se encuentran simultáneamente en dos lugares, puntos de la circunferencia que están ubicados fuera de ella,* etc.

La suposición de que no se verifica la tesis propuesta, se refleja en una inconsistencia en la figura de análisis, de la misma manera que en el razonamiento surge una contradicción que dará origen a la afirmación sobre el absurdo de la suposición realizada.

Al explicar las dificultades en el uso de figuras de análisis en este tipo de demostraciones, algunas respuestas obtenidas fueron:

> *"La figura de análisis no ayuda".*
>
> *"Una dificultad es establecer dónde ubicar el punto E. Al caer fuera, surgen las contradicciones".*
>
> *"Las figuras de análisis no siempre pueden mostrarnos la verdad ya que, como su nombre lo dice, son para analizar sobre los datos y lo que quiero llegar".*

Como puede inferirse de las respuestas anteriores, los alumnos son conscientes de las dificultades que surgen al usar figuras de análisis en demostraciones por reducción al absurdo, y de cómo estas figuras son engañosas a la intuición al realizar una demostración.

En la siguiente explicación puede observarse cómo comprenden que lo único que se está negando es que el segmento sea interior, pero el resto de sus propiedades se mantienen y pueden ser aplicadas en cualquier momento de la demostración:

> *Para suponer que la recta AEB cae fuera de la circunferencia, debo deformar la recta porque si no siempre está dentro de la circunferencia. Esto implica que la recta AEB en el gráfico no se vea como recta, pero en teoría tiene todas las propiedades de la recta.*

Las dos preguntas restantes del cuestionario apuntaban básicamente a que los alumnos identificaran los pasos del proceso deductivo que realiza Euclides dentro del sistema axiomático propuesto y a la identificación de cuál es la propiedad demostrada: "*Si se toman dos puntos al azar de una circunferencia de un círculo, la recta que une los dos puntos caerá dentro del círculo*" (Euclides, 1991). No hubo problemas graves en las respuestas dadas. El enunciado fue expresado en esa forma u otra equivalente y los pasos efectuados por Euclides en la demostración fueron justificados de manera correcta por la mayoría de los alumnos mediante los postulados, nociones comunes, definiciones y propiedades correspondientes.

Con posterioridad se hicieron algunas entrevistas a algunos de los alumnos participantes en esta etapa de experimentación. El diálogo se orientó primero a la explicación de las características de la figura de análisis realizada y posteriormente en la explicación lógica de las argumentaciones por el absurdo.

En estas entrevistas se puso en evidencia que la totalidad de los encuestados era capaz de identificar el tipo de argumentación, como lo habían hecho por escrito, y de explicar las bases lógicas que sustentan su uso en matemática. Más de la mitad del grupo se refirió correctamente al principio del tercero excluido y al de no contradicción; asimismo, fueron capaces de identificar la aparición de una proposición contrarrecíproca de la dada en el enunciado a lo largo de la demostración.

Segunda fase de experimentación: La utilización de argumentaciones directas y por reducción al absurdo

Objetivos, diseño de la secuencia, destinatarios

La segunda fase de la experimentación se orientó, en primer lugar, a determinar si los sujetos que fueron capaces de identificar y explicar la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en un escenario académico, con el análisis de la obra de Euclides, identificaban y utilizaban correctamente este tipo de argumentaciones ante preguntas y situaciones no académicas. Para ello, se sometió al mismo grupo a otra encuesta.

En esta misma fase de experimentación se compararon los resultados obtenidos en el mismo grupo de alumnos de la primera fase con los de un segundo grupo, proveniente del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico de la ciudad de Buenos Aires, Argentina. Los alumnos involucrados cursan el segundo año de la carrera de Profesorado en Informática, tienen algunas nociones de lógica en su formación, aunque en menor medida que el primer grupo, y su orientación es distinta porque estudian una carrera informática.

El tercer grupo de alumnos que intervino en esta fase de experimentación se encuentra terminando sus estudios de nivel medio, ya que cursa el tercer año de nivel polimodal en un bachillerato con orientación en Ciencias Sociales y Humanidades. En este año tienen una asignatura denominada Introducción al Conocimiento Científico, donde estudian ciertos conceptos básicos de lógica y sus aplicaciones a las ciencias y a la resolución de situaciones problemáticas, que corresponden a juegos de ingenio y estrategias lógicas de resolución.

Sobre el cuestionario diseñado para esta fase de experimentación, se basó en la propuesta de estudio experimental conocida como "tarea de las cuatro tarjetas", que combina vocales y consonantes con números pares o impares, según cierta consigna.

El texto presentado a los sujetos de la experimentación fue el siguiente:

> Una sociedad secreta está formada por miembros y tiene un reglamento que rige las condiciones muy particulares y estrictas para el ingreso a la misma. Una de las cláusulas de este reglamento dice:
>
> > *"Si el nombre de un miembro termina en vocal, su apellido comienza con consonante"*
>
> En una reunión concurren cuatro personas que son miembros de la sociedad y que se presentan de la siguiente manera:
>
> > Persona 1: "*Mi nombre es Nuria*"
> > Persona 2: "*Mi nombre es Raquel*"
> > Persona 3: "*Mi apellido es Pérez*"
> > Persona 4: "*Mi apellido es Álvarez*"
>
> a) ¿Qué datos necesitaría obligatoriamente preguntar a estas personas, miembros de la sociedad, para saber si la cláusula anteriormente citada del reglamento de ingreso se está cumpliendo?
>
> b) Explique cuáles son las ideas lógicas en las que se basa para dar la respuesta anterior

Los alumnos del Profesorado de Matemática que intervinieron fueron 12 (los llamaremos en adelante Grupo A); los del Profesorado de Informática, 17 (nos referiremos a ellos como Grupo B), y los que están terminando su escuela media, 17 (constituyen el Grupo C).

Una vez realizada la resolución de la secuencia por escrito se prosiguió como en la primera fase de la experimentación, haciendo entrevistas orales a los participantes, que se orientaron a profundizar o aclarar algunas ideas que surgieron en las respuestas a este cuestionario.

Resultados obtenidos en la segunda fase de experimentación realizada

Describiremos primeramente por separado los resultados obtenidos en cada grupo que intervino en esta fase de experimentación.

La respuesta esperada para la primera cuestión se refiere a que debe preguntársele a la Persona 1 cuál es su apellido, y a la Persona 4 cuál es su nombre. En el primer caso, se espera el uso de una forma directa de razonar: partir de la verdad del antecedente de la implicación (*el nombre de este miembro de la sociedad termina con vocal*) y si el consecuente es verdadero (*el apellido de este miembro de la sociedad comienza con consonante*), se tendrá la verdad de la implicación, o sea, la cláusula del reglamento de ingreso de la sociedad. En caso de que la información obtenida indique que el consecuente es falso, la cláusula del reglamento de ingreso de la sociedad no se estará cumpliendo. Para el caso de la Persona 4, se trata de una forma indirecta de razonar; se conoce el valor de verdad del consecuente de la implicación es falso, ya que el apellido no comienza con consonante. Por tanto, deberá ser el antecedente falso para que la implicación se mantenga verdadera. En los casos de las Personas 2 y 3 no es necesario hacer pregunta alguna, pues se trata de casos donde la implicación es verdadera, ya que en un caso el nombre termina con consonante, de ahí que no importe con qué comienza su apellido, y en el otro el apellido empieza con consonante, por lo cual no importa la condición de terminación de su nombre.

Las respuestas dadas por los alumnos de cada uno de los grupos fueron las siguientes:

En el Grupo A:

- Cinco alumnos propusieron preguntar los datos faltantes a las Personas 1 y 4
- Tres propusieron preguntar a las Personas 1 y 3 los datos faltantes
- Tres respondieron que debían preguntar a los cuatro miembros presentes de la sociedad
- Uno se abstuvo de responder

En el Grupo B:

- Dos alumnos propusieron preguntar los datos faltantes a las Personas 1 y 4
- Dos propusieron preguntar a las Personas 1 y 3 los datos faltantes
- Ocho respondieron que debían preguntar a los cuatro miembros presentes de la sociedad
- Cuatro propusieron preguntar sólo el nombre de la Persona 1
- Uno se abstuvo de hacer preguntas porque arguyó que "*se trata de una sociedad secreta*"

En el Grupo C:

- Uno de los alumnos propuso preguntar los datos faltantes a las Personas 1 y 4
- Uno propuso preguntar a las Personas 1 y 3 los datos faltantes
- Quince respondieron que debían preguntar a los cuatro miembros presentes de la sociedad

Al traducir las respuestas a un cuadro comparativo, encontramos la siguiente situación (Cuadro No. 3):

	Personas 1 y 4		Personas 1 ,3 y 4		Personas 1 y 3		Personas 1,2,3 y 4		Personas 1		No responde	
Grupo		%		%		%		%		%		%
A	5	41,7	0	0	3	25	3	25	0	0	1	8,3
B	2	11,7	0	0	2	11,7	8	47	4	23,6	1	6
C	0	0	1	6	1	6	15	88	0	0	0	0

Cuadro No.3.

Indudablemente, algo que llama la atención a primera vista es que menos de la mitad del Grupo A haya dado la respuesta correcta a esta pregunta, cuando en la primera fase de la experimentación habían identificada y explicado correctamente la manera indirecta de razonar. Sin embargo, en el Grupo 2 la cantidad de respuestas correctas es proporcionalmente casi a la cuarta parte de las dadas por el Grupo A, mientras que en el C no hubo ninguna respuesta correcta.

Otro dato relevante es la gran cantidad de alumnos del Grupo B que respondió que era necesario preguntar los datos faltantes a las cuatro personas, y de quienes propusieron sólo preguntar el apellido de la Persona 1. En el caso del Grupo C, la mayoría decidió que era necesario preguntar todos los datos faltantes.

Sólo uno de los alumnos del Grupo A explicó desde la lógica el fundamento de la respuesta dada:

"Las ideas lógicas son la implicación:
p= el nombre de un miembro termina en vocal
q= su apellido comienza con consonante

$$p \Rightarrow q$$

que es equivalente a:

$$\sim q \Rightarrow \sim p\text{"}$$

Durante la entrevista con este alumno, dijo que esta última proposición es "*la contrarrecíproca de la primera*" y que "*la manera de razonar para llegar en cada caso es una de manera directa: parto del antecedente (que actúa como hipótesis) y si la tesis es verdadera, la cláusula de ingreso es verdadera*", mientras que al preguntar el nombre de la Persona 4 "*estamos razonando por el absurdo: parto de que la tesis es falsa y si llego a que la hipótesis es falsa, la cláusula es verdadera, pero si no es falsa".*

Otra de las alumnas del Grupo A justificó de la siguiente manera:

"Necesito saber el apellido de la Persona 1 para verificar si su apellido empieza con consonante.

A la Persona 2 no necesito preguntarle nada porque, como su nombre no termina con vocal, no tengo ninguna condición sobre su apellido.

A la Persona 3 no necesito preguntar nada, ya que si su nombre termina con vocal se cumple la regla de la sociedad, y si no termina con vocal no hay regla sobre su apellido.

A la Persona 4 le preguntaría el nombre, ya que si terminara en vocal estaría incumpliendo la regla. En caso de terminar en consonante, no importa el apellido".

Una de las alumnas del Grupo A cuya respuesta fue que se debían preguntar los datos de las Personas 1 y 3 afirmó:

“Persona 1: El apellido. Para que se cumpla el reglamento, la respuesta debe ser un apellido que comienza con consonante.
Persona 2: No le preguntaría nada porque su nombre no termina con vocal. No cumple el reglamento.

Persona 3: ¿Cuál es su nombre? La respuesta debe ser un nombre que termine con vocal para que se cumpla el reglamento.

Persona 4: No le preguntaría nada porque su apellido comienza con vocal. No cumple el reglamento”.

Puede observarse claramente en este caso que lo que está pidiendo es el cumplimiento simultáneo del antecedente y el consecuente de la implicación, que atañe a la cláusula de ingreso. Desde el punto de vista de la lógica, estaría considerando que una implicación es equivalente a su recíproca.

En el Grupo B, uno de los alumnos que propuso preguntar los datos a las Personas 1 y 3, justificó de la siguiente manera:

“Utilicé el sentido común. Si el nombre termina con una vocal su apellido debe empezar con una consonante, de forma inversa no lo tomo en cuenta, por eso no hice preguntar a las Personas 2 y 4”.

Al ser entrevistado, las respuestas que dio fueron similares a las presentadas por la alumna anterior del Grupo A.

Con relación a quienes propusieron preguntar sólo el apellido de la Persona 1, una de las justificaciones dadas por un alumno del Grupo B fue:

“Al no tener otras condiciones más que la citada, solamente la Persona 1 termina en vocal, y el resto o bien termina en consonante o da el apellido y por eso se infiere que cumplen con la cláusula citada”.

La explicación obtenida a partir de la entrevista se refiere a la manera de preguntar y tomar decisiones en un programa de computación, en el que “*se evalúa el antecedente y, de acuerdo a la verdad o falsedad de éste, se dispara o no el consecuente en un if...then*...” Al abrir tal comentario al grupo, todos apoyaron esta argumentación y fortalecieron las explicaciones construidas en el reconocimiento y uso de esta estructura de decisión computacional.

Uno de los alumnos del Grupo B que propuso obtener todos los datos faltantes justificó por escrito:

“Preguntaría esto para saber si las personas pueden o no pertenecer a la sociedad. Porque si algunas de las personas no cumplen con dicho requisito, no pueden pertenecer a la sociedad y si lo hacen la cláusula no se cumple”.

De manera oral, explicó que en realidad lo que propone es atender al valor de verdad de cada caso y, si alguno es falso, la cláusula de ingreso no se cumple. Para él, la única manera de verificar si se cumple o no consistiría en comprobar los datos de todos los miembros de la sociedad.

Las explicaciones del Grupo C se limitaron a indicar a quiénes les pedirán los nombres y a quiénes los apellidos, justificando que esos eran los datos faltantes. No incorporaron en las respuestas fundamentaciones lógicas, con excepción del alumno que dio la respuesta en la que sugería pedir los datos de las Personas 1, 3 y 4:

"A la segunda persona no es necesario hacerle ninguna pregunta debido a que su nombre termina con consonante y el reglamento sólo expresa que aquellos nombres terminados con vocal deben tener apellido que no empiece con vocal. A la tercera persona es necesario preguntarle el nombre para saber si termina en vocal y a la cuarta también para averiguar lo mismo y saber si falta al reglamento".

En la indagación oral, este alumno relacionó su razonamiento con la tabla de verdad de la implicación, afirmando que la Persona 2 es la que correspondería a las líneas de la tabla de verdad con antecedente falso y, por tanto, la implicación es verdadera. No identificó que en el caso de la Persona 3 el consecuente es verdadero, por lo cual también se trata de implicación verdadera, sin depender del valor de verdad del antecedente.

Con respecto al alumno que propuso averiguar los datos de las Personas 1 y 3, afirmó:

"Sólo debe preguntarle a esas dos personas porque son las únicas que tienen condiciones relacionadas con esa cláusula".

En las entrevistas a los alumnos del Grupo C no se ampliaron significativamente las respuestas dadas por escrito, la mayoría se limitó a explicar la necesidad de examinar todos los casos presentados.

Discusión

Como resultado de las dos fases de experimentación, podemos enunciar las siguientes conclusiones:

La totalidad de los alumnos que cursan el último año de Profesorado de Matemática reconocen la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en un contexto matemático, siendo capaces de explicar correctamente su fundamento lógico. Al encontrarse con este tipo de demostraciones en un contexto matemático, pueden incluso indicar cuáles son sus características y dificultades; sin embargo, sólo menos de la mitad argumentaron por reducción al absurdo en situaciones fuera del contexto matemático. Ello demuestra que reservan este tipo de argumentaciones al escenario académico y las conciben como una forma natural de razonamiento lógico.

Pocos alumnos con formación informática efectúan argumentaciones indirectas para resolver situaciones problemáticas, ya que prefieren las argumentaciones directas. No utilizan la forma de razonar indirecta e incluso la cuestionan, a pesar de haber estudiado las ideas lógicas que la sustentan. La forma de razonar de los estudiantes de informática en condicionales está unida, según ellos, a la estructura "if…then…", necesitando evaluar el antecedente antes del consecuente. Esto muestra cómo una práctica profesional condiciona la manera de razonar.

Ninguno de los alumnos del último año de la escuela media que intervinieron en la experimentación, pudo argumentar correctamente por el contrarrecíproco. Para la mayoría de ellos, la única manera de demostrar que una implicación es verdadera consiste en probar todos los casos, lo cual indica que no tienen aún incorporada la idea de demostraciones generales que no impliquen razonar caso por caso. Si bien alguien podría plantear la posible influencia de la falta de conocimientos formales de este grupo, ya que sus integrantes han estudiado las maneras en las que se validan los resultados de las distintas ciencias, consideramos que se trata de un grupo cuyas respuestas pueden ser tenidas en cuenta en la investigación.

A través de los resultados obtenidos puede observarse la influencia de las prácticas profesionales en las argumentaciones y reconocer a la argumentación por reducción al absurdo como una construcción cultural. Ello lo hemos realizado bajo la mirada de la socioepistemología, que permite el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión sociocultural y los procesos cognitivos asociados a los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004).

Nuestros estudios nos permiten interpretar la construcción social del conocimiento matemático avanzado y su difusión institucional, reconociendo que la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 1998). De todo ello se deriva nuestra hipótesis principal: las prácticas sociales son las productoras del conocimiento matemático.

Bibliografía

Aleksandrov, A. D. (1994). Visión general de la matemática. En Guénard, F. y Lelièvre, G.. (Ed.). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématiques 8* (3), 267-312.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques 3* (3), 261-304.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. En R. Farfán (Ed.), *Publicación de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (volumen 1, pp. 1-10). La Habana, Ministerio de Educación: Cuba.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003) Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53* (3), 255-270.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003) Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (1), 27- 40.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24* (2-3), 137-168.

Covián O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya.* Tesis de maestría. México: Cinvestav.

Crespo, C. (2003). *Las demostraciones como contenido matemático*. Trabajo presentado en la VII Escuela de Invierno y el VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Chilpancingo, Guerrero, México.

Crespo, C. (2004). *Argumentar matemáticamente: su importancia en el aula.* Trabajo presentado en el II Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática, Guadalajara, Jalisco, México.

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de maestría. México: Cicata-IPN,

Crespo, C., y Ponteville, C. (2002). Pensar en matemática para enseñar matemática. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15* (2), 1163-1168. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Crespo, C., y Ponteville, C. (2004a). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz, (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (1), 39-44. México: Clame.

Crespo, C. y Ponteville, C. (2004b). *Demostraciones matemáticas: funciones y lenguaje utilizado.* Trabajo presentado en la IV CAREM*,* Buenos Aires, Argentina.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva*? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2000). Écriture, raisonnement el découverte de la démostration en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques 20* (2), 135-170.

Eggers, C. (1995).
El nacimiento de la matemática griega. Buenos Aires, Argentina: EUDEBA.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid, España: Gredos.

Farfán, R. M. (2003a). Matemática educativa: un camino de filiaciones y rupturas. En R. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16* (1), 5-10.

Farfán, R.M. (2003b) Uma pesquisa em educação matemática. Da propagação do calor à noção de convergência. *Revista Educação Matemática Pesquisa 5* (2), 39-58.

Gheverghese Joseph, G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid, España: Pirámide.

Godino, J. D., y Recio, Á. M. (1997). Significado de la demostración en educación matemática*.* En: E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME* (volumen 2, pp. 313-321)*.* Lahti, Finland.

Godino, J. D., y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática*. Enseñanza de las Ciencias 19* (3), 405-414.

Haack, S. (1978).'*Filosofía de las lógicas*. Madrid, España: Cátedra.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof: arguments from physics. En M. de Villiers (Coord.), *Proofs and prooving: Why, when and how?* (pp.1-14), The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA).

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid, España.

Ifrah, G. (1997). *Historia de las cifras*. Madrid, España: Espasa Calpe.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días (Vols. I, II y III).* Madrid, España: Alianza Universidad.

Knuth, E. (2002). Teacher's conceptions of proof in the context of secondary school mathematics*. Journal of Mathematics Teacher Education 5* (1), 61-88.

Le Bon, G. (1901). *Las civilizaciones de la India (tomos 1 y 2)*. Barcelona, España: Montaner y Simón Editores.

Legrand, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe á une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 9* (3), 365-406.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Barcelona, España: Gedisa.

Ministerio de Cultura y Educación (1995). *Contenidos básicos comunes para la educación general básica*. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Recio, Á. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática.* Resumen de tesis doctoral presentado en el III SIDM, Madrid, España, El Escorial.

Sáenz Castro, C. (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas*. En M. F. Moreno, et al. (Ed.), *Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 47-62) Almería, España: Universidad de Almería.

Santaló, L. (1966). *La matemática en la escuela secundaria*. Buenos Aires, Argentina: EUDEBA.

Santaló, L. (1981). *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires, Argentina: Proyecto Cinae.

Soto Rivera, R. (2003). El argumento por reducción al absurdo en Parménides y Nagarjuna. *La Torre*. *Revista de la Universidad de Puerto Rico 8* (27), 93-105.

Toranzos, F. I. (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Buenos Aires, Argentina: Espasa Calpe.

Vega, L. (1993). ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de demostración matemática. *Mathesis IX* (2), 155-177.

Cecilia Crespo
Instituto Superior del Profesorado
"Dr. Joaquín V. González"
Buenos Aires, Argentina

Email: ccrespo@sinectis.com.ar

Rosa María Farfán
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
México

Email: rfarfan@cinvestav.mx