

Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad

Javier Lezama Andalón¹

RESUMEN

En este escrito, se aborda el análisis de un fenómeno didáctico denominado reproducibilidad a partir de los resultados obtenidos al repetir en diversos escenarios una situación didáctica. Se muestran los factores a considerar para introducir una propuesta didáctica determinada a un sistema ajeno para el que fue diseñada. El estudio señala al profesor como un factor fundamental de la reproducibilidad. Mostramos, los procesos de comunicación de escenarios así como la dinámica de adaptación a los mismos. Se pone especial atención a la actividad del profesor, entendiendo a ésta, como una práctica social institucionalizada, así mismo, mostramos cómo el enfoque socioepistemológico nos permite abordar dicho fenómeno de una manera más amplia.

- **PALABRAS CLAVE:** Socioepistemología, reproducibilidad.

ABSTRACT

In this writing, the analysis of a didactic phenomenon called reproducibility is approached from the results obtained when repeating in diverse scenes a didactic situation. The factors to consider when is introduced a didactic proposal unsuitable to a system for the one that was designed are shown. The study point out to professor as a fundamental factor of the reproducibility. We show the settings communication processes as well as the adaptation dynamics. Special attention is put to the professor activity, understanding to this, as a institutionalized social practice, also, we show how the socioepistemological approach let us to undertake the phenomenon in a more extensive way.

- **KEYWORDS:** Socioepistemology, Reproducibility.

RESUMO

Aqui, abordamos a análise de um fenômeno didático denominado reproducibilidade a partir dos resultados obtidos ao repetir em diversos cenários uma situação didática. São apresentados os fatores a serem considerados para introduzir uma proposta didática

Fecha de recepción: Noviembre de 2004/ Fecha de aceptación: Septiembre de 2005

¹Programa de Matemática Educativa (*Prome*), Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (Cicata-IPN, Legaria), México.

determinada a um sistema desconhecido ao que foi planejada. O estudo marca o professor como um fator fundamental da reproducibilidade. Mostramos, os processos de comunicação de cenários assim como a dinâmica de adaptação aos mesmos. Demos especial atenção à atividade do professor, entendendo esta, como uma prática social institucionalizada. também mostramos como o enfoque sócio-epistemológico nos permite abordar tal fenômeno de uma maneira mais ampla.

- **PALAVRAS CHAVE:** Sócioepistemologia, reproducibilidade.

RÉSUMÉ

Dans cet écrit, on aborde l'analyse d'un phénomène didactique appelé reproductibilité à partir des résultats obtenus par la répétition d'une situation didactique dans divers scénarios. On montre les facteurs obtenus à considérer pour introduire une proposition didactique déterminée dans un système étranger auquel elle fut dessinée. L'étude signale le professeur comme un facteur fondamental de la reproductibilité. On montre les procès de communication de scénarios ainsi que la dynamique d'adaptation aux mêmes. On met une spécial attention à l'activité du professeur, comprise comme une pratique sociale institutionnalisée, de même, on montre comment l'approche socioepistemologique permet d'aborder tel phénomène d'une façon plus étendue.

- **MOTS CLÉS:** Socioepistemologie, reproductibilité.

La Matemática Educativa y el enfoque socioepistemológico

La Didáctica de las Matemáticas o Matemática Educativa (ME), como se le conoce en México, aunque es un campo de conocimiento relativamente joven, ha sufrido importantes cambios tanto en su objeto de estudio como en los métodos con que lo aborda (Gascón 1998; y Cantoral y Farfán 2003a).

La ME centra su atención en el estudio de los fenómenos que se producen en la apropiación del saber matemático en la escuela. El conocimiento generado por sus investigaciones es utilizado en la construcción de dispositivos didácticos, entendiendo por éstos a todas aquellas elaboraciones tanto teóricas como prácticas que se destinan a apoyar el aprendizaje de las matemáticas en la

escuela; es en este contexto que Cantoral y Farfán (2003a) señalan: "*Actualmente se desarrollan estudios sobre currículo, en los que se busca determinar cuáles deben ser los contenidos a enseñar, considerando la evolución de la matemática y las necesidades sociales que el sistema educativo espera cubrir con la escuela*".

Además, hay trabajos de ME que profundizan en las resistencias desarrolladas por los profesores de matemáticas, ante la dificultad de articular novedosos enfoques educativos basados en teorías educativas muy generales, con actividades de clase o procesos instruccionales acordes a dichas teorías y a sistemas de creencias de los profesores, sustentadas —en muchos casos— en la

experiencia. Otros se circunscriben a las actividades que acompañan el aprendizaje para buscar la mejora de los métodos de enseñanza, un aspecto sumamente importante de la investigación, ya que está relacionado con la aplicación del saber que se produce en la ME para la innovación en la escuela, de ahí que tenga un alto valor utilitario y sea una de las principales demandas del profesorado a esta disciplina.

Existe otra veta de la ME se encamina al estudio de los problemas que se enmarcan en torno a la transmisión oral del conocimiento, los procesos cognitivos, la motivación y la creación de actitudes positivas; los trabajos de este tipo en ocasiones han sido poco abordados porque exigen consideraciones teóricas que, se pudiera pensar, están muy alejadas de la disciplina.

Otras investigaciones de ME ponen cierta atención sobre recursos, específicamente sobre aquellos que refuerzan el proceso de enseñanza, los materiales educativos, las calculadoras y computadoras, y la manera en que los medios audiovisuales se habrían de introducir en las aulas. Estas investigaciones tienen un carácter urgente, ya que la escuela está resintiendo una fuerte presión social para introducir tecnologías que ya tienen un uso generalizado en la sociedad y, en ocasiones, con un alta efectividad (Trouche, 2005).

Como los anteriores, muchos otros problemas se están abordando en el campo de la matemática educativa desde múltiples paradigmas, debido a que es una disciplina eminentemente social.

Uno de esos paradigmas, en el que nos formamos y actualmente desarrollamos en nuestro trabajo es la *socioepistemología*² (Cantoral y Farfán, 2004), que plantea una distinción de origen con las aproximaciones epistemológicas tradicionales. Mientras éstas asumen al conocimiento como el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana, la socioepistemología se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares. El conocimiento, en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y los diversos factores sociales.

Desde este enfoque, reflexionamos sobre un fenómeno didáctico llamado reproducibilidad, cuyas investigaciones iniciales (Farfán y Lezama, 2001; Lezama, 1999; Lezama, 2003) se centraron en la repetición de situaciones didácticas, trabajadas con la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995; Artigue y Perrin-Glorian, 1991). En este artículo nos interesaremos por discutir el papel que tienen los estudios de reproducibilidad de

² La socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología, por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión.

los productos de innovación para la escuela, y que han sido elaborados con base en la investigación.

Cabe señalar que las investigaciones sobre reproducibilidad no sólo tienen un carácter práctico, al hacer un análisis de los aspectos a considerar cuando se elaboran dispositivos didácticos para intervenir en un sistema didáctico determinado, sino también tienen un carácter de investigación básica, ya que han permitido conocer la relevancia de las estructuras de dichos dispositivos y muy especialmente nos introducen a modelar la actividad del profesor y, con ello, al reconocimiento de su labor fundamental para alcanzar los propósitos didácticos.

El fenómeno de la reproducibilidad

Estudiar el fenómeno de la reproducibilidad de una situación didáctica o situación de aprendizaje implica establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de una misma clase, al repetirse en distintos escenarios.

La exploración de la reproducibilidad se puede iniciar alrededor del fenómeno del envejecimiento de situaciones de enseñanza³, que está asociado con otro de índole más general, el de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza. Brousseau hace dos preguntas que permiten vislumbrar la problemática asociada al fenómeno de la reproducibilidad:

*El hecho de reproducir situaciones de aprendizaje provoca una pregunta que es esencial para la didáctica: ¿qué es lo que realmente se reproduce? (...) Un profesor que reproduce la **misma historia**, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos, ¿ha reproducido el mismo hecho didáctico que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido? (...) Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica; no es un resultado de la observación, sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable (Brousseau, 1986).*

Las preguntas anteriores nos permiten identificar elementos que pudieran caracterizar el fenómeno que designamos como reproducibilidad.

La reproducibilidad como investigación básica

La ME reflexiona tanto en sus métodos de investigación como en el examen de la naturaleza de sus hallazgos. El fenómeno de la reproducibilidad adquiere un papel relevante en este último aspecto, como hace ver Johsua (1996), quien discute sobre lo que es un resultado de investigación en el campo de la ME, bajo tres condiciones:

² Brousseau introduce la noción de envejecimiento de las situaciones de enseñanza a fin de mostrar el problema que experimenta el profesor para reproducir una misma lección con nuevos alumnos; los resultados que se obtienen son diferentes en cada repetición y, en ocasiones, mucho más pobres. Él afirma que surge en el profesor la necesidad de modificar las instrucciones, su exposición, los ejemplos, los ejercicios y en ocasiones hasta la estructura misma de la lección. Mientras más repite la lección, este fenómeno se acentúa, llegando a cambiar el sentido de la lección original. Reconoce que las situaciones con poca interacción entre alumno y profesor, como las exposiciones seguidas de ejercicios o instrucciones acompañadas de una situación de aprendizaje, envejecen más lentamente.

a) *Que se apoye en argumentos empíricos.* Es decir, que haya datos empíricos producto de la observación, el análisis y la experimentación que sustenten las afirmaciones.

b) *Que la didáctica pase de la identificación de fenómenos didácticos a la delimitación de las condiciones de su aparición.* Afirma que la teoría gana en potencia cuando es capaz de distinguir los fenómenos recurrentes de aquellos que son contingentes, las formas de aparición de fenómenos recurrentes y las condiciones de producción de unos y otros.

c) *Que haya producción de fenómenos.* Eso conduce a pasar de datos de observación a datos experimentales en sentido estricto, sujetos a experimentación. Lo mismo si las limitaciones aparecen al principio que en la reproducción de esos fenómenos, al menos se deberá exhibir la posibilidad de dominio de la evolución del fenómeno, hecho que está ligado a un cierto rango de predicción. Esta condición quizá es la más importante de todas.

Johsua se pregunta si la didáctica de las matemáticas responde a esas tres características, y señala que, de ellas, la más problemática es la de la reproducibilidad. Afirma, con base en las investigaciones de Artigue (1984), que la reproducibilidad en sentido estricto no se puede asegurar en didáctica. Uno puede ganar en predicción reagrupando las historias de clase en *vecindades de historias* y en distinguir trayectorias y órbitas propias de cada situación didáctica, lo cual constituye una limitante muy drástica para la reproducibilidad.

Ahora sabemos que la reproducibilidad no

depende únicamente de los elementos internos del diseño, sino que se deben considerar factores exógenos a él, y que para poder obtener cierta estabilidad en los resultados tendremos que identificar y atender a esos factores, como se mostrará más adelante.

La ingeniería didáctica

En la ingeniería didáctica, como metáfora de la actividad de los ingenieros (Artigue, 1995), se reconoce que los objetos con los que se trabaja en educación resultan ser mucho más complejos que los considerados por la ciencia, lo cual obliga al ingeniero-investigador o ingeniero-profesor a hacer uso de todos los recursos a su alcance para lograr su objetivo.

Desde su surgimiento, la ingeniería didáctica ha sido vista con una doble función, como declara Chevallard (1982): “Ingeniería, acción para investigar” e “Ingeniería, acción para la acción”. Tal polisemia de la expresión “ingeniería didáctica”, vista como metodología de investigación y producción de desarrollos para la enseñanza, le es inherente; sin embargo, deja al descubierto que la separación entre la investigación y la acción no es fácil de localizar y, sin lugar a dudas, puede representar peligros de interpretación.

Un aspecto relevante de la ingeniería didáctica es su esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Además, se caracteriza por ubicarse en el registro de los estudios de caso cuya validación es en esencia interna, ya que se sustenta en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori.

Breve revisión de los estudios de reproducibilidad

La tesis doctoral ⁴ que presentó Artigue en 1984 constituye el primer estudio específico sobre el fenómeno de la reproducibilidad, ya que propone la construcción de un modelo que le permita caracterizar a la reproducibilidad como fenómeno didáctico para así poderlo estudiar, explicar y simular.

De inicio, Artigue pone de manifiesto las dificultades que se enfrentan al desarrollar investigaciones con grupos en situación escolar, al señalar que las investigaciones clásicas, clínicas o estadísticas introducen un paréntesis en el medio escolar durante la experimentación; por el contrario, la experimentación en situación escolar resulta difícil debido a la complejidad del sistema, ya que no se puede aislar al alumno del grupo, al grupo del maestro ni al maestro de la institución.

Las preguntas que guían su investigación son:

- ¿Cuáles son los fenómenos observados y cuáles son las variables que los determinan?
- ¿Qué relaciones existen entre las historias de clase y las historias individuales de los alumnos?
- ¿Se puede pasar de un discurso descriptivo llegando a uno explicativo y, aún más, predictivo, a nivel de los alumnos, a nivel del grupo?

Artigue precisa que Brousseau (1981) fue el primero en enfrentarse al problema de la reproducibilidad y le identificó dos vertientes: una *externa*, de orden dinámico, que se ubica en el nivel de las historias de clase⁵ (actividades, procedimientos, entre otros, ostensibles para el investigador), y otra *interna*, que se localiza en el nivel de la comprensión de los significados.

Con base en el reconocimiento de la complejidad que implicaba retener la dinámica del grupo en el momento de trabajar una situación de aprendizaje, Artigue tuvo que reconsiderar sus hipótesis iniciales. Fue a partir del análisis de una experiencia de trabajo con una situación didáctica determinada (Artigue y Robinet, 1982), la cual implicó un elaborado proceso de simulación y análisis de los resultados, que pudo desprender algunas conclusiones importantes.

- El desarrollo de una situación en un grupo estará determinada por la estructura de la situación (las posibles vías de solución –trayectorias–, las distintas órbitas que se pueden producir, los elementos de la situación que pueden provocar bloqueos en los estudiantes), así como por la difusión local y grupal, que puede ser espontánea o provocada por el profesor.
- Es el profesor quien conoce el propósito didáctico de la situación, las vías de solución y los posibles obstáculos para el estudiante, así como el control del tiempo escolar.

⁴ Para una descripción más detallada ver Lezama y Farfán (2001); Lezama 2003).

⁵ Una trayectoria estará constituida por todo aquello que hace un alumno en el proceso de resolver o enfrentar una actividad en clase. Pero esta noción de trayectoria es demasiado amplia y compleja para identificar en ella de manera razonable regularidades cognitivas. Es por ello que se utiliza preferentemente la noción de órbita, que permite operar los reagrupamientos didácticamente significativos. Una órbita sería una sucesión finita de estados del sujeto; dicho de otra manera, es una discretización de la trayectoria. El conjunto de las órbitas da la historia de clase.

- En tal dinámica, el maestro juega un papel esencial. Él es el actor decisivo de la reproducibilidad.

Artigue concluye que *“la reproducibilidad está en buscar en las estructuras de historias y no en las historias mismas, y dentro de esa reproducibilidad estructural, el profesor tiene un papel activo a desarrollar”* (1986, p.55). Sin embargo, reconoce que los resultados obtenidos en su investigación son limitados por reducirse a estudiar el problema de la reproducibilidad bajo un ángulo dinámico para una situación, no para un proceso.

En 1989, Artigue comenta en relación a la reproducibilidad de situaciones didácticas:

Me parece razonable formular en la actualidad la siguiente hipótesis con respecto a la noción de reproducibilidad: conviene pensar las relaciones entre reproducibilidad interna y reproducibilidad externa en términos de una relación de incertidumbre. En otras palabras, una exigencia fuerte de reproducibilidad externa no puede satisfacerse sino sacrificando otro tanto la reproducibilidad interna.

Otros estudios relacionados con la reproducibilidad

Otras investigaciones, elaboradas a partir de los estudios de Artigue, han incorporado nuevos aspectos a considerar, como es el caso de Grenier (1989). En esta experiencia emergen fenómenos en las etapas de institucionalización, cuando el profesor deberá tomar decisiones sobre el curso de la discusión, en términos de la problemática que plantean los estudiantes

en su debate y los objetivos trazados por el diseño de la situación. Ello nos permite observar el papel del profesor al momento de tomar decisiones con miras al cumplimiento del objetivo de la situación; además, se plantea el fenómeno de las representaciones del profesor con relación a los alumnos, al saber y al aprendizaje. Tal hecho es un elemento que Artigue no consideró en su trabajo.

La investigación de Perrin-Glorian (1993) muestra la necesidad de considerar el polo del “profesor” como un elemento fundamental a considerar en un estudio de reproducibilidad. Uno de los problemas que le interesaba explorar a Perrin-Glorian era encontrar las variables intermediarias posibles, orientadas a explicar las diferencias de aprendizaje a partir de situaciones aparentemente idénticas. Sin embargo, se hizo notorio el fracaso de llevar una ingeniería didáctica diseñada para un escenario a otro muy distinto porque, a pesar de que se hicieron las adaptaciones que se consideraron pertinentes y se trabajó estrechamente con los profesores de grupo, sobre la marcha se mostraron las enormes distorsiones que se producían al aplicar las actividades en el aula, debido a las interpretaciones que hacían los profesores sobre las actividades y a las características de los grupos. Ante la fuerza de las variaciones, Perrin-Glorian tuvo que renunciar al planteamiento original de su investigación, trasladando el foco de atención a las diferencias de aprendizaje.

El estudio de Perrin-Glorian nos muestra que las ingenierías no son instrumentos universales, lo cual es un hecho relevante en términos de reproducibilidad porque nos permite poner atención en los aspectos de estructura de las situaciones, los trabajos de adaptación para los escenarios y el papel del profesor en la

actividad de reproducir ingenierías didácticas.

Por último, Arsac, Balacheff, y Mante (1992) reportan una investigación en la que, con el fin de dar un carácter científico al problema de la reproducibilidad de situaciones didácticas, se plantean la siguiente pregunta: *¿Qué tipo de fenómenos podemos esperar se reproduzcan cuando la misma situación de clase es implementada por dos profesores distintos en dos diferentes clases?*

Con dicho fin, se creó un experimento que consistía en plantearle un problema a varios grupos de estudiantes. En el diseño del problema participaron los profesores que coordinarían la actividad con el grupo; sin embargo, debido a su fuerte intervención en el desarrollo de esa tarea, se decidió realizar una segunda etapa en la que se repitió el experimento, pero con docentes ajenos a la elaboración del diseño del problema.

El principal requerimiento a los profesores que aplicarían la actividad era que no podían intervenir en aspectos matemáticos; sólo dirigirían la discusión del problema en grupo y elaborarían un reporte de lo acontecido.

A partir de esta experiencia surgió el problema relacionado con lo que se denominaría *comunicación de un escenario de una situación didáctica a un profesor* y, por tanto, a la descripción de dicho escenario, que se caracterizó con los siguientes aspectos:

- Propósito didáctico de la situación.
- Estructura de la situación (actividad del estudiante, actividad del profesor, tiempo asignado, organización social de la clase).

- Contenido de la situación (contenido matemático, naturaleza de las actividades, claves de construcción de significados), donde era indispensable establecer ligas, interacciones y compatibilidad entre contenido y escenario.

En el análisis de estas puestas en escena se evidenció que los profesores, durante el período de debate, tomaban varias decisiones opuestas al escenario planeado. Las causas de esto fueron la gestión del tiempo y la responsabilidad epistemológica del profesor (Balacheff, 1988), ya que el profesor experimentó la necesidad de un “cierre aceptable”; este hecho provocó una tensión entre esa necesidad y el contrato de no intervención, siendo el indicativo de la responsabilidad epistemológica del profesor. Asimismo, se desprendieron dos elementos de índole exógeno a la situación, que no incumbieron a la administración del tiempo ni a la responsabilidad epistemológica del profesor: la relación personal del profesor con las matemáticas y con el contenido matemático específico y las ideas acerca de lo que es aprender y enseñar matemáticas.

Como podemos observar, estas conclusiones giran alrededor de las concepciones del profesor.

Es importante notar el deslizamiento de la atención a la posición del profesor cuando se hacen consideraciones relacionadas con la reproducibilidad. Artigue (1995) llama la atención de ello, e indica que la investigación de Arsac (1989) pone en evidencia la desproporción entre el carácter aparentemente insignificante de algunas intervenciones del profesor y sus efectos reales.

Arsac señala la necesidad de construir

alguna otra categoría paralela a la de variable didáctica —como podría ser la de *escogencia didáctica*— que permita hacer consideraciones sobre las posibles decisiones tomadas por el profesor ante determinadas situaciones en el curso de las interacciones con los estudiantes, las cuales no sólo motivan un cambio cognitivo en el estudiante, sino también el sentido y la función del conocimiento.

Tras reconocer la importancia de los trabajos que hemos mencionado en este apartado, Artigue indica que están abriendo un tema de investigación que, si bien plantea preguntas y dificultades metodológicas delicadas, tiene como beneficio la atención que se le está brindando al profesor.

reproducibilidad interna, la cual está situada en la construcción de significados con relación a un contenido matemático específico. No obstante, la descripción que generalmente se hace sobre los productos de ingeniería enfatiza, sobre todo, las características de la *reproducibilidad externa*, como los comportamientos individuales o colectivos de los estudiantes, o su evolución en el tiempo. Tal procedimiento descriptivo da la impresión de que la sola reproducibilidad externa garantizará la interna (Artigue, 1995); sin embargo, no pueden ocurrir por separado porque comparten un asunto de primordial importancia: *buscar los mecanismos de reproducibilidad interna haciendo uso de todos los factores que constituyen la reproducibilidad externa*.

●

Reproducibilidad interna y reproducibilidad externa

Debido a la naturaleza dual de la ingeniería didáctica y la cercanía que esta práctica de investigación tiene con los profesores y su actividad en el aula, es fácil querer transformar los diseños de investigación en diseños para clase. Tal tentación la experimentan tanto investigadores (con el fin de probar acciones desarrolladas bajo un control inusual en una clase estándar) como profesores cercanos a los investigadores y a las investigaciones mismas, quienes incluso demandan ese traslado.

Es una necesidad real la demanda de que la investigación produzca objetos didácticos para ser llevados posteriormente al aula, en condiciones reales de clase; sin embargo, como se ha visto, introduce una problemática importante, ya que el objetivo del diseño de una situación es que tenga una

●

La reproducibilidad en el marco de la socioepistemología

En razón de que la investigación sobre el fenómeno de la reproducibilidad está ligada a la necesidad de acercar sus productos de investigación a la escuela, necesita contestar dos preguntas: ¿cómo deberán ser comunicados estos productos de investigación? y ¿cómo podrán ser tomados en cuenta o utilizados por el profesor en su práctica docente?

Pero surge otra interrogante: ¿Cómo garantizar, por una parte, la estabilidad de los efectos didácticos en una actividad de clase, o en el uso de un texto, de una ingeniería didáctica o de una propuesta curricular; por otra, la validez de un hallazgo de investigación surgido de una experimentación didáctica?

El término *estabilidad de efectos didácticos* se presenta frágil cuando se miran los reportes de las investigaciones

sobre reproducibilidad. Artigue hace simulaciones sobre posibles órbitas en una situación didáctica concreta, pero su modelo le impone restricciones en torno a las interacciones entre estudiantes y el profesor; esto no le impide darse cuenta del papel del profesor para el logro didáctico en un grupo.

Ahora bien, el diseño de situaciones de aprendizaje y la correspondiente investigación de su reproducibilidad es relevante dentro del enfoque socioepistemológico, ya que el diseño de las situaciones requiere que se incorporen supuestos inherentes a dicha perspectiva, como el que *“la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia de donde, a su vez, adquieren sentido y significación”* (Cantoral y Farfán, 2003a y 2003b). Este supuesto exigirá la estructuración de actividades y prácticas de aprendizaje que contrastan con el discurso escolar convencional.

En este contexto se diseñó una ingeniería didáctica orientada a explorar nuevas maneras de abordar la función exponencial, que forma parte de un proyecto más amplio, dirigido a elaboración de un nuevo lenguaje gráfico en el marco de la construcción de un universo de formas gráficas que sea a su vez amplio y estructurado, y permita constituir una base de significaciones para procesos y conceptos del cálculo preuniversitario y universitario.

Un proyecto de esta naturaleza provoca la necesidad de introducir nuevas prácticas escolares de aprendizaje que impliquen, como señalan Cantoral y Farfán, *“no mirar los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino tratar con las prácticas que producen o favorecen la*

necesidad de tales conceptos” (2003a y 2003b). En este sentido, se produce un importante deslizamiento metodológico en la actividad didáctica, desplazando el foco de atención en la definición del concepto a las prácticas (sociales) que lo propician.

La ingeniería didáctica, llamada “Un estudio didáctico de la función 2^x ” (Aguilar, et al., 1997; Lezama y Farfán, 2001; Lezama 2003), fue el producto de reflexiones sobre elementos de índole didáctico, epistemológico y cognitivo. Estaba encaminada a que el estudiante se apropiara de la noción de función exponencial favoreciendo la realización de acciones concretas, las cuales serían desarrolladas paso a paso a partir de criterios geométricos, localizando puntos en el plano, observando las dificultades para obtenerlos, escribiendo y analizando tablas con el fin de identificar regularidades que propiciarán la generalización. Para ello, se propuso una construcción cuyas características atendieran a:

- *Elementos geométricos y gráficos*, que requerían las actividades donde se solicitaba la realización de trazos y la localización de puntos en un sistema coordenado.
- *La inducción de lo local a lo global*, que se presentaba tanto en las actividades donde se solicitaba la argumentación sobre la posibilidad de localizar otros puntos, como en las que se debía argumentar sobre los cocientes y las diferencias de valores puestos en sucesión, los cuales se observarían en las tablas elaboradas.
- *El elemento de generalización*, que se encontraba en la actividad donde se pedía analizar si las regularidades observadas para 2^x se podrían tener en otras expresiones exponenciales.

Dicha secuencia didáctica perseguía dos objetivos: a) proporcionar un proceso geométrico de construcción de puntos de la gráfica de la función $2^x - y$, a partir de eso, analizar las regularidades que caracterizan a dicha función—; b) confrontar la concepción espontánea de que 2^x es evaluable sólo cuando x es entero.

● Un estudio de reproducibilidad basado en la repetición de la ingeniería en diversos escenarios

Repetimos la ingeniería mencionada en diversos escenarios, haciéndonos las siguientes preguntas: *¿Qué tipo de fenómenos podemos esperar que aparezcan cuando se repite una situación didáctica que fue diseñada con un propósito específico, al ser aplicada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios con la intención de lograr su reproducibilidad? ¿Cuáles de estos fenómenos apuntan a lograr la reproducibilidad y cuáles no? ¿Cuáles son predecibles y cuáles no?*

Cabe señalar que repetir no es sinónimo de reproducibilidad. Nuestra revisión de los distintos estudios relacionados con la reproducibilidad nos permitió conocer varios fenómenos que estarían presentes en el ejercicio de la repetición de la ingeniería “Un estudio didáctico de la función 2^x ”, como las dispersiones y bloqueos que experimentan los estudiantes al trabajar el contenido de la situación, y las variadas interpretaciones que sobre el contenido podrían elaborar los profesores, las cuales obstaculizarían nuestro propósito de estudiar el “proceso”

de reproducibilidad; es decir, las condiciones generales que permiten la reproducción de un objeto didáctico.

Por ello, nuestra intención era identificar los fenómenos que surgen cuando se repite una situación didáctica, a fin de desprender de esa experiencia los elementos generales que permitieran establecer una clara definición de dichos fenómenos. Esto lo usaríamos en la construcción de un *posible modelo de reproducibilidad* para entender en qué consiste el “proceso” de la reproducibilidad, el cual reconociera los aspectos relevantes que caracterizaran a los actores, los elementos dinámicos del proceso que resultaran determinantes y no exclusivos de la situación, así como esclarecer el papel jugado por las acciones individuales y colectivas constitutivas de las historias de clase. Nuestro propósito es que dicho modelo se constituya en un factor de predicción* sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas.

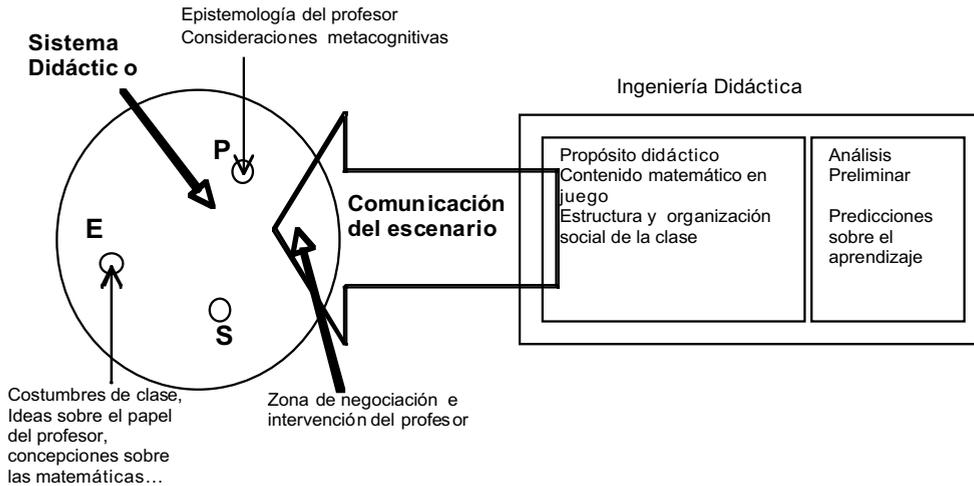
Fueron dos los elementos en que nos apoyamos para efectuar nuestra investigación y en los que esperábamos profundizar:

- a) Reconocer la relevancia del papel del profesor cuando se intenta reproducir situaciones didácticas.
- b) Advertir de que llevar una situación didáctica a un sistema didáctico ajeno al que nació constituye una intervención sobre dicho sistema, y que sólo se podrá intervenir en él con legitimidad si se establece un ordenado proceso de comunicación y construcción de

* Empleamos este término en un sentido descriptivo, como una manera de hacer uso de elementos que permitan conjeturar determinados resultados a partir del cumplimiento de determinadas condiciones. Por la naturaleza del estudio, no puede asociarse el término al valor que se le daría en Estadística.

acuerdos con el profesor responsable, que haga posible hacer las adaptaciones pertinentes de la situación a ese nuevo sistema.

La determinación de esos aspectos para cada puesta en escena nos permitió extraer elementos para elaborar nuestro modelo de reproducibilidad.



Elementos para un modelo de reproducibilidad de situaciones didácticas

A continuación, se exponen algunos resultados y conclusiones producto de la repetición de la ingeniería en diversos escenarios. Una lectura completa se encuentra en Lezama (2003).

La situación didáctica en el sistema didáctico

Al interior del sistema didáctico es el profesor quien propone problemas, planea y diseña actividades; además, sigue el curso de las interacciones del alumno con el saber a aprender. La intencionalidad didáctica del profesor y aceptación del problema por parte del estudiante provocará en ambos el desarrollo de un conjunto de prácticas e interacciones que

caracterizarán al contrato didáctico. Ahora bien, si un mismo problema es llevado a diversos sistemas didácticos, la intencionalidad del profesor se ve afectada y, por ende, la naturaleza del contrato. Pero, en realidad ¿qué es lo que cambia? El propósito didáctico de la ingeniería se mantiene aunque el profesor cambie, ya que es un elemento objetivo; sin embargo, la manera como el profesor se apropie de él y lo interprete sí afectará el desempeño de los estudiantes, debido a que se producirán formas de interacción que estarán determinadas por el contrato didáctico.

De igual manera, planteamos nuestro problema (como sinónimo de situación) con un propósito didáctico, pero con la intervención del profesor aparece un factor que denominaremos *intencionalidad del profesor*; el cual podemos esperar que sea

uno de los que afecten al sistema con mayor fuerza.

La estructura de la situación didáctica como factor de reproducibilidad

Dentro del sistema, la situación didáctica “Un estudio de la función 2^n ” se ubica en el polo del saber. Y aunque no se la puede considerar independientemente de los otros dos polos —el del profesor y el del estudiante— las consideraciones sobre su estructura y propósito fueron fundamentales para nuestro interés por reproducirla.

Así, en el proceso de comunicación del escenario, principalmente cuando se abrió la posibilidad de que los profesores propusieran cambios a la situación, las únicas modificaciones introducidas por ellos se ciñeron a la redacción de algunas actividades que, en su opinión, resultarían más comprensibles a los alumnos. Los propósitos, los antecedentes, el eje conceptual y la secuencia de situaciones del problema permanecieron inalterados en todas las puestas en escena debido a que el carácter puntual de las actividades de la situación planteó problemas muy concretos al estudiante, lo cual redujo la posibilidad de dispersión, pero aumentó las posibilidades de bloqueo.

Además, la situación, por sus características, era poco flexible para sufrir modificaciones en su estructura, de ahí que no cambió su sentido de manera importante. Este factor de estabilidad permitió tener un mayor control de la actividad cuando fue trabajada en equipo por los estudiantes, ya que fueron muy pocos los casos donde los alumnos rompieron el orden propuesto en la situación.

Los estudiantes ante la reproducibilidad

Se trabajó con los grupos en condiciones lo más parecidas posibles a una clase común. Uno de los factores en que más cuidado se puso fue al control de tiempo; sin embargo, en todos los casos se rebasó el tiempo estimado porque los estudiantes se tomaron amplios espacios de tiempo para discutir algunas partes de la situación.

Los estudiantes siempre trabajaron en equipos de tres, y todos se comprometieron genuinamente con la situación. No obstante, su trabajo resultó contrastante debido, en la mayoría de los casos, al dominio de los conocimientos previos que los estudiantes requerían para trabajar la situación, pero también incidieron las características de los equipos: hubo varios muy activos, que buscaban alternativas de solución con mucho sentido o solicitaban el apoyo del profesor, mientras que otros se mostraron mucho más reservados. Asimismo, en algunos equipos el contenido matemático de la situación fue una fuente de interés; en otros, fue desalentadora.

Si el estudiante acepta los problemas, los trabaja, los discute, propone respuestas, las reconsidera, pregunta al profesor, reelabora sus respuestas, atiende a lo que otros equipos hacen, defiende su punto de vista, consume el tiempo asignado y deja inconcluso su trabajo. Si finalmente escucha los comentarios de otros compañeros y del profesor con relación a los contenidos de la situación, ¿se reproduce en él el propósito didáctico de la situación?

Lo dicho en el párrafo anterior correspondería a una historia individual. Pero si se describen diez, quince o veinte historias individuales, la dificultad radica en cómo “sumarlas” para hablar después de la historia del grupo, y luego responder a la pregunta sobre si en él se reproduce el propósito didáctico, considerando que

la dinámica concerniente a la difusión de la respuesta a los problemas de la secuencia puede ser muy variada.

En nuestro caso, dentro de un mismo equipo, cuando un estudiante tomaba el liderazgo del trabajo, sus compañeros daban muestra de quedarse al margen de la reflexión, mas se incorporaban a la discusión cuando el líder dudaba y requería de la validación de sus compañeros; en algunos casos, ahí se producía un cambio de liderazgo. Pero no todos los grupos funcionaron por la vía del liderazgo; en la mayoría, los tres integrantes trabajaron juntos para enfrentar los problemas: juntos se hicieron fuertes, juntos se equivocaron.

Un fenómeno producido a partir de la falta de antecedentes matemáticos en los estudiantes

El caso de los grupos cuyos resultados en el ámbito de la reproducibilidad externa fue limitada provocó grandes dificultades para interpretar lo que desde el punto matemático habían hecho los estudiantes; por ejemplo, se encontraron hasta cinco interpretaciones distintas sobre lo que significaba realizar la operación 2^q . Ante lo variado de las respuestas, se efectuó un primer análisis de su trabajo, tratando de interpretar el contrato didáctico surgido. Se asumió que los estudiantes se sentían comprometidos con los profesores y quisieron colaborar con ellos; sin embargo, sus respuestas no fueron resultado de un auténtico compromiso o apropiación de la situación, sino “una salida al paso”. Reconsiderar esa interpretación llevó mucho tiempo y sólo se logró cuando se puso a la consideración de personas ajenas a la experiencia, ya que cuando se les pidió que discutieran nuestras transcripciones nos hicieron observaciones importantes

sobre la actividad matemática de los estudiantes, que no habíamos detectado porque la interpretación de su desempeño desde el contrato didáctico sólo nos conducía a trivializarlo.

La reconsideración de la actividad de cada equipo y la naturaleza de sus respuestas erróneas nos llevó a darnos cuenta que sus integrantes estaban haciendo un esfuerzo por construir un significado; la carencia de antecedentes matemáticos firmes y la imposibilidad de ocupar los algoritmos geométricos no canceló la posibilidad de que propusieran genuinamente una salida matemática a partir de los elementos que sí dominaban. Asimismo, que los estudiantes interpolaran linealmente, propusieran respuestas que generaran números no enteros, o a través de operaciones que sí conocían, constituyeron evidencia de un quehacer matemático serio, por más que fuera erróneo. Ellos se encontraron ante una frontera de conocimiento que les hizo proponer respuestas provisionales, y no la cortedad del tiempo de trabajo no permitió que las pudieran reconsiderar.

El profesor como agente de reproducibilidad

El profesor tiene una posición privilegiada dentro del sistema porque domina el contenido matemático de la situación, conoce las características de sus estudiantes e interviene en el establecimiento de los propósitos de la ingeniería, adaptándola a partir de las características de sus alumnos. Por tal motivo, el polo del profesor es el que mayor trabajo exige en el proceso de reproducción de la ingeniería didáctica

Como planteamos en la estrategia de la investigación, se había considerado llevar la ingeniería a un sistema didáctico para

el que no se había diseñado. Por tanto, había que hacer una intervención en el sistema mediante un plan que hiciera posible la adaptación de la ingeniería al nuevo sistema, mientras que el inicio del proceso de adaptación del diseño a las nuevas condiciones exigía una amplia colaboración entre el profesor del grupo y los agentes que colaborarían en dicha puesta en escena.

● **El profesor ante la situación didáctica**

Cuando los profesores trabajaron la situación didáctica para conocerla tuvieron dificultades porque les resultó inusual. El uso de criterios geométricos llamó fuertemente su atención; aunque fueron capaces de hacer uso de los algoritmos geométricos para obtener los segmentos, en ese momento no tenían claro para qué llevar un problema de potenciación al campo geométrico.

Declararon que la actividad era interesante y ponía en juego múltiples conceptos geométricos, pero en principio estaban lejos de poder darle sentido. Suponemos que las dificultades que los profesores enfrentaron y la riqueza de la situación —en el sentido de que hacía uso de varios aspectos matemáticos— provocó que reflexionaran sobre qué deberían hacer para llevarla a sus alumnos. Esto se debió a que los docentes trabajaron la situación siempre en función de sus estudiantes y los problemas los vivieron, en cierto modo, desde la perspectiva de ellos. *“Esto que a mí me está costando trabajo, ¿cómo van a hacer los estudiantes para resolverlo?”*

En su reflexión posterior del trabajo sobre la situación, les fue fácil expresarse sobre el contenido matemático de la situación y sobre las posibles dificultades que podrían

enfrentar los alumnos al ocuparla, sin embargo, en los aspectos concernientes al sentido de la situación y los aprendizajes que propiciaba, sus comentarios fueron más inciertos y breves.

Los profesores señalaron de manera clara deficiencias en sus estudiantes y expresaron dudas sobre si podrían abordar ciertos problemas. No se atrevieron a proponer modificaciones radicales a la situación o al tiempo de desarrollo de las actividades.

● **Los profesores y las interacciones con los estudiantes**

La actividad de los estudiantes en sus equipos de trabajo exigió diversas intervenciones de los profesores que, para los fines del análisis, se catalogaron como preguntas, observaciones, indicaciones y acciones.

Debido al nivel de familiarización que para entonces tenían los profesores con la situación, se esperaban intervenciones bien dirigidas y que redujeran al mínimo la incertidumbre. Sin embargo, muchas tuvieron que calificarse como ambiguas porque empleaban un lenguaje inapropiado para los estudiantes, o eran respuestas ajenas a lo que demandaban. La explicación a la intervención ambigua es difícil de dar, ya que puede aludir a que el profesor no entiende la pregunta del estudiante, no está atento a lo que en ese momento el estudiante hace o no tiene claro el sentido de la actividad; de ahí que sus observaciones y respuestas sean impertinentes. En nuestra experiencia, las interacciones ambiguas constituyeron una fuente de bloqueos y desviaciones.

Cuando se incurre en las interacciones ambiguas, se muestra la complejidad de

los fenómenos que se producen en el aula. Responder, indicar, hacer observaciones y realizar acciones en el marco de un plan para apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes son actividades propias del profesor, pero en determinadas circunstancias de presión o de enorme dificultad puede hacer que vayan en contra de sus propósitos.

Elementos para la modelación del fenómeno de reproducibilidad

Llevar una propuesta de estudio formal a un sistema exige en el profesor que operará la propuesta un alto nivel de familiaridad con ella y que esté convencido de los beneficios para sus estudiantes.

Identificamos tres grandes espacios de acción a considerar para hacer un análisis sobre la reproducibilidad:

a) Estructura de la ingeniería didáctica (estructura). Es un espacio para el saber constituido por la ingeniería didáctica a trabajar, la cual es resultado de un análisis preliminar riguroso y su correspondiente validación. Al comunicarla a un profesor candidato para que la lleve a sus estudiantes, consideramos que deberá:

- Explicitarse de manera amplia el propósito didáctico.
- Establecerse de manera clara los antecedentes matemáticos indispensables para abordarla.
- Mostrarse los ejes conceptual y operativo, establecidos a través de una sucesión de elementos matemáticos a considerar, así como el conjunto de acciones, validaciones y formulaciones a realizar.

- Analizar y discutir la estructura y sucesión de situaciones problema a resolver.

b) Comunicación del escenario (comunicación). Es un espacio para la comunicación de la ingeniería –lo que se ha denominado comunicación del escenario–, consistente en discutir el propósito de la situación didáctica. Al ser necesaria una apropiación del sentido de la actividad, analizar el por qué y para qué de todas sus partes, entonces se requiere de un proceso de apropiación de la ingeniería orientado a lograr que los profesores puedan considerarse como diseñadores de la situación. Ello se consigue al resolver todas las situaciones problemas y discutiendo aspectos conceptuales y operativos de la situación.

c) Adaptación al nuevo sistema didáctico (adaptación). Es un espacio para la planeación de la puesta en escena donde, con base en el conocimiento que se tiene sobre los alumnos, es preciso identificar los antecedentes matemáticos que requieren para trabajar la situación, así como las posibles dificultades que podrían enfrentar desde la perspectiva matemática.

De igual manera, para desarrollar un proceso de adaptación de la situación didáctica al grupo de estudiantes hay que establecer una negociación entre el diseñador y los profesores; a partir de ahí, seguramente se rediseñará la situación didáctica ajustada al nuevo grupo de estudiantes. Además, resulta indispensable marcar los límites de modificación de la situación didáctica, poner en claro cuál será la estrategia de interacción a seguir entre el profesor y los alumnos, así como tener en cuenta a la organización social de la clase, donde se establece la modalidad de trabajo con la

que los estudiantes afrontarán la situación y se elaborarán las predicciones sobre lo que producirán.

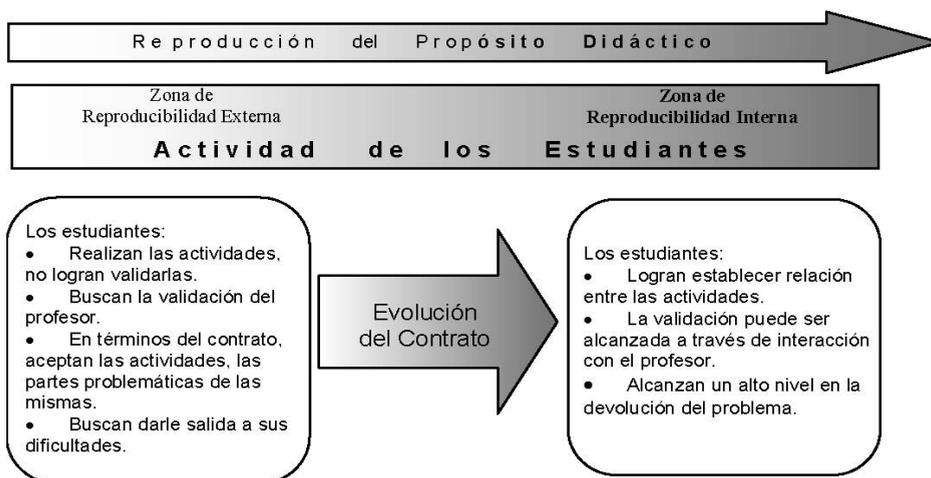
Por tanto, la experiencia de trabajo de la situación didáctica por los estudiantes está determinada por la *estructura* de la situación, el nivel de apropiación de la situación por parte del profesor que coordinará la puesta en escena (tal factor dependerá de una apropiada *comunicación” del escenario*) y una conveniente *adaptación*, que toma en cuenta las características de los estudiantes.

Ante las dificultades que los estudiantes enfrentan para resolver los problemas planteados, entra en juego la organización de la clase. Si el trabajo se efectúa colectivamente, debe considerarse la posibilidad de que la interacción entre los alumnos permita superar los problemas; si enfrentan obstáculos que, a juicio del profesor, resultan insalvables o se desvían del tema de la situación, la planeación de la puesta en escena debe proporcionarle

una estrategia de ayuda, la cual deberá estar planificada con el fin de que sea lo menos interventora posible y responda puntualmente a las necesidades de los estudiantes. Debe tomarse en cuenta que las interacciones entre profesores y estudiantes es uno de los factores que mayor alteración puede causar en el desarrollo de la actividad.

Como se ha señalado, la reproducibilidad de la situación didáctica se puede presentar de dos formas: externa e interna. La reproducibilidad externa, que se puede dar en detrimento de la interna, consistiría en transitar por todas las partes de la situación didáctica, aunque no se esté seguro y no se pueda dar sentido a cada uno de los aspectos que se trabajan. Lograr la reproducibilidad interna estribaría en hacer evolucionar el trabajo de los estudiantes para que puedan alcanzar tanto el significado de las actividades como una visión de conjunto sobre ellas.

El siguiente esquema ilustra cómo esperamos que se produzca esta evolución:



Esquema 1. Evolución del contrato didáctico de la zona de reproducibilidad externa a la interna.

Por otro lado, lograr la reproducibilidad de una situación didáctica consiste en que las historias de clase descritas por los estudiantes se encuentren lo más próximas posibles a la historia principal, que se establece desde el diseño. Las órbitas descritas por cada uno de los equipos pueden ser variadas, pero deben estabilizarse cuando se discuten los obstáculos alrededor de los cuales se ha diseñado la situación.

Un diseño apunta a reducir al mínimo las posibles alteraciones, aunque son inevitables. Lo normal es que surjan múltiples alteraciones, provocadas cuando los estudiantes entran a interpretar los problemas que se les plantean por su bagaje matemático, por el dominio conceptual de los asuntos matemáticos que tratan o por la heterogeneidad de los alumnos. Estos elementos no son uniformes, por lo cual causan inestabilidad en el efecto didáctico; sin embargo, el profesor juega aquí un papel importante porque, desde su nivel de apropiación de la situación, y recurriendo a estrategias de interacción con los estudiantes, puede ayudar a reducir los factores desestabilizadores.

Para poder asegurar que el efecto didáctico se ha reproducido, la historia particular que desarrolla cada uno de los estudiantes o grupo de estudiantes deberá tener el mayor parecido con la historia principal o ideal. La cercanía o lejanía de la historia principal estará determinada por los elementos estabilizadores o desestabilizadores que se ponen en acción, como ilustra la Figura 1.



Figura 1. Elementos estabilizadores y desestabilizares que inciden en la cercanía o lejanía de la historia de clase particular con la historia principal.

La reproducibilidad está determinada por la distancia o parecido de las historias particulares a la historia principal, sin desligarla del supuesto de que es imposible tener historias de clase idénticas.

La reproducción de una situación didáctica requiere que el diseño sea lo suficientemente robusto para que presente el menor número de dificultades de interpretación, ya sea en su estructura conceptual o en el lenguaje con el cual se

plantean las situaciones problema. Ahora bien, el proceso de reproducción inicia cuando el profesor se pone a trabajar la situación didáctica como un problema personal (en lo que se podría denominar *proceso personalizador*) e identifica sus partes problemáticas desde su experiencia y formación, para luego pasar a un *proceso de despersonalización*, en el que mirará a la situación como una actividad para otros (sus estudiantes) y detectará los elementos problemáticos a partir del conocimiento que tiene de ellos.

La etapa de preparación o adaptación que hace el profesor para los estudiantes podría ser considerada como *rediseño de la situación*. Su éxito dependerá de la habilidad del profesor para despersonalizar su experiencia de trabajo con la situación; es decir, no deberá identificar las dificultades que experimentó al trabajarla, sino su estructura y sentido con el fin de poder generar estrategias apropiadas de adaptación para sus estudiantes.

Dicha etapa de rediseño deberá, por un lado, ser hecha de tal manera que no cambie el propósito didáctico de la situación; por otro, ser producto de discusión y acuerdos con el diseñador. Un elemento característico de la toma de acuerdo es que el diseño pase en la práctica a posesión del profesor que la aplicará, dado que él será el responsable de la puesta en escena. Este espacio de intervención del profesor en la situación didáctica permitirá que por fin que injiera en el sistema didáctico, que se había señalado anteriormente como ajeno.

El trabajo de reproducción consistirá en generar estrategias que reduzcan lo más posible aquellos elementos desestabilizadores, si bien éstos aparecerán inevitablemente. Ahora bien,

los operadores de la reproducción (los profesores) tendrán que estar atentos al surgimiento de las situaciones inesperadas y atenderlas, pero como esto también estará sujeto a acciones inesperadas, se caerá en procesos de naturaleza cíclica, mas característicos de la actividad humana.

Conclusiones

La búsqueda de elementos objetivos que garanticen la repetición de los efectos didácticos, independientemente de los alumnos y del profesor con los que se trabaje, hace que se vea el fenómeno de la reproducibilidad como algo ilusorio, ya que la experiencia muestra que cada grupo de estudiantes es distinto y, por ende, cada experiencia será distinta. Si se repiten algunas cosas, pero la determinación exacta sobre qué hace que se repita el efecto didáctico no es posible porque la conducta de las personas en la clase es extraordinariamente compleja. Al repetir la situación didáctica “Un estudio didáctico de la función 2^x ” en condiciones de control pudimos identificar algunos fenómenos que se producen cuando ésta se reproduce en distintos escenarios.

Señalamos algunas conclusiones a dos niveles: las primeras son generales, las segundas hacen referencia a asuntos de carácter específico.

Aspectos generales

- El fenómeno de la reproducibilidad se presenta como frágil, ya que la repetición del efecto didáctico está determinado por múltiples factores, siendo los más complejos e incontrolables los humanos.

- El fenómeno de reproducibilidad emerge en el contexto de una intervención a un sistema didáctico, por lo cual es indispensable abordarlo desde una perspectiva sistémica. En nuestra investigación obtuvimos evidencias de que en la tríada didáctica el polo del saber es el más estable a pesar de su complejidad, mientras que el de los estudiantes y profesores son los más difíciles de controlar.
- El fenómeno de reproducibilidad también está asociado al de la transposición didáctica, ya que el proceso de adaptar una situación didáctica a un grupo específico de estudiantes se halla sujeto a un proceso de negociaciones y adaptaciones por parte de quien está interesado en repetir la actividad didáctica. La negociación y la posterior intervención sobre el diseño para obtener el rediseño son actividades características del sistema operativo de la transposición didáctica, al que Chevallard (1991) denomina como *noosfera*. Se puede afirmar que reproducir una situación didáctica constituye una transposición a un nuevo sistema didáctico.
- La reproducibilidad de una situación didáctica, entendida como la cercanía de las historias de clases particulares a la historia de clase principal, puede ser establecida de manera objetiva, ya que pueden ser explicitadas las orbitas de la historia de clase principal y contrastarla con las seguidas por los estudiantes.
- Los elementos estabilizadores y desestabilizadores pueden ser identificados y, en cierto modo, controlados a partir del proceso de comunicación del escenario y su respectiva adaptación.
- El profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas; es el polo del sistema didáctico que requiere ser más activo y flexible. Debe modificar su mirada sobre la situación didáctica, pues tendrá que reformularla para sus estudiantes y posteriormente acompañarlos cuando la trabajen. Tal dinamismo exige en el profesor habilidades que van más allá del dominio disciplinar; sin embargo, al ser tantos los aspectos que necesita cubrir, es muy fácil que falle en alguno. De igual manera, en esas múltiples actividades podemos observar cómo se ponen en acción las concepciones del profesor tanto acerca de su propia actividad como acerca de los alumnos.
- Con relación a las actividades que desarrolla el profesor, reviste primordial importancia las interacciones entre profesores y alumnos, ya que a través de ellas se puede observar en toda su realidad no sólo el sistema didáctico, sino también los roles que asumen sus participantes.

Aspectos particulares

- En el aspecto de las interacciones profesor-alumno, pudimos identificar lo que denominamos *interacciones ambiguas* cuando no le quedó claro a ninguno de los participantes la dirección a la que había de dirigirse, lo cual creó un clima de acuerdo sumamente ambiguo que no permitió dar salida a los problemas que se estaban enfrentando. A respuestas ambiguas sobre preguntas específicas les correspondieron acciones ambiguas, debido a la autoridad que reconocían los estudiantes a sus profesores.

- En las interacciones donde el profesor observó que los integrantes de los equipos no avanzaban, podríamos decir que tal hecho lo angustió en extremo y lo obligó a hacer cada vez más intensas sus intervenciones para tomar la dirección del equipo, lo cual generó en los estudiantes acciones totalmente dependientes del profesor.
- Se pudo estudiar el fenómeno que hemos denominado *umbral de conocimiento*, el cual resultó de la carencia de los antecedentes matemáticos indispensables para afrontar la situación. Las respuestas erróneas podrían ser calificadas como arbitrarias o como la consecuencia de un salir al paso ante preguntas donde se desconocían las respuestas. Los estudiantes formularon respuestas provisionales que no estaban en posibilidad de validar o darse cuenta del error por razones de tiempo.
- Las respuestas dadas por los estudiantes eran auténticas formulaciones; sin embargo, esto sólo lo permitió ver un largo análisis de lo hecho y dicho por las estudiantes. En condiciones normales de clase sus respuestas hubieran sido calificadas como arbitrarias y erróneas.
- El concepto de potencia entera positiva se mostró estable en la mayoría de los

estudiantes, pero también fue causa de las dificultades para interpretar las potencias fraccionarias, ya que carecía de significado para la casi totalidad de los estudiantes.

- Muchos de los estudiantes asociaron la función exponencial con crecimiento, pero fueron incapaces de reconocer la modalidad de crecimiento, ya que la mayoría representó dicho crecimiento con líneas rectas crecientes.

● Una reflexión final

El enfoque socioepistemológico para el desarrollo de las investigaciones sobre la reproducibilidad de diversas propuestas didácticas tiene especial importancia, ya que la incorporación explícita de la componente social permite explorar factores que se habían mantenido ajenos a la investigación en el campo de la Matemática Educativa.

Reconocer los elementos socioculturales y su estrecha vinculación con los aspectos de carácter cognitivo, epistemológico y didáctico abre una extraordinaria veta de exploración y, sin lugar a dudas, aportará nuevas e interesantes explicaciones sobre los fenómenos, que podrán ser útiles a profesores e investigadores en su afán por rediseñar el discurso matemático escolar.

● Bibliografía

- Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J., y Moreno, J. (1997). Un estudio didáctico de la función 2^x . En R. Farfán (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 11 (1), 19-25.
- Arsac, G. (1989). Le rôle de professeur –aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*. Grenoble, France: IMAG-LSD.

Arsac, G.; Balacheff, N. y Mante, M. (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics* 23, 5-29.

Artigue, M. (1984).

Contributions à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques. Thèse de doctorat d'état, Université Paris VII.

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité.

Recherches en Didactique des Mathématiques 7 (1), 5-62.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281- 308.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. y Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3 (1), 5-64.

Artigue, M. & Perrin-Glorian, M. J. (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics* 11, 1, 13-18.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire.* Thèse d'Etat. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 2(1), (pp. 37-127). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-112.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 65-94). Barcelona, España: Editorial Paidós.

Cantoral, R.; y Farfán, R. (2003a). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa* 6 (2), 161-193.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003b). Formazione iniziale degli insegnanti: Il caso messicano. En M. I. Fandiño (Ed.), *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale* (pp. 39–59). Bologna, Italie: Pitagora Editrice Bologna.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003c) Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics* 53 (3), 255-270.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24 (2-3), 137-168.

Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Texte préparé pour la deuxième Ecole d' Etè de Didactique des Mathématiques, Orléans.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Farfán, R. (2003). Uma pesquisa em Educação Matemática. Da propagação do calor à noção de convergência. *Revista Educação Matemática Pesquisa* 5 (2), 39-58.

Farfán, R. (1991). El curso de precálculo: un enfoque gráfico. *Memorias de la Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* 5 (1), 206-211.

Farfán, R. y Montiel G. (2005) Uno studio sulle interazioni del sistema didattico negli scenari di educazione a distanza. *La Matematica e la sua Didattica* 1, 5-31.

Farfán, R. y Lezama, J. (2001) Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4 (2), 161-193.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18 (1), 7-34.

Grenier, D. (1989). Construction et étude d'processus d'enseignement de la simetrie orthogonale: èlèments d'analyse du fonctionnement de la thèorie de situations. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17 (1), 5-60.

Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un <<Résultat>> en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16 (2), 197-220.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Margolinas, C.; Perrin-Glorian, M. J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17 (3), 7-16.

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées a partir de l'ensegnement des mathématiques dans des classes <<faibles>>. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13 (12), 5-118.

Trouche, L. (2004). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools, with differential effects. In D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche. (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Devise into a Mathematical Instrument* (pp. 9-39). USA: Mathematical Education Library, Springer.



● **Javier Lezama Andalón**

Programa de Matemática Educativa
Cicata-IPN
México

Email: jlezama@ipn.mx