



Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa  
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa  
relime@mail.cinvestav.mx  
ISSN (Versión impresa): 1665-2436  
MÉXICO

2001

Javier Lezama Andalón / Rosa Ma. Farfán Márquez

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA REPRODUCIBILIDAD

*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, julio, año/vol. 4,  
número 002

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa  
Distrito Federal, México  
pp. 161-193

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Universidad Autónoma del Estado de México

reDalyC  
LA MEMORIA CIENTÍFICA EN LÍNEA  
<http://redalyc.uaemex.mx>

## Introducción al estudio de la reproducibilidad \* •

Javier Lezama Andalón <sup>1</sup>  
Rosa Ma. Farfán Márquez <sup>1</sup>

### RESUMEN

Este escrito, proporciona información sobre un fenómeno didáctico denominado reproducibilidad. Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica, es establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la misma, al repetirla en distintos escenarios. Se hace descripción de los principales trabajos que se han realizado sobre el tema y se muestra cómo se ha hecho uso de dicha información, para plantear una nueva investigación sobre el tema en el medio educativo mexicano, al poner en funcionamiento, una ingeniería didáctica a lo largo de tres años en diversos escenarios. Se muestran las preguntas que han guiado la investigación y algunos resultados iniciales importantes que atañen al papel del profesor, la estructura de situación didáctica y la actividad de los estudiantes.

### ABSTRACT

This document provides information regarding an educational phenomenon, which we call reproducibility. The fact of studying the reproducibility of a teaching situation means to explicitly establish the facts that allow the achievement of its didactics and purposes, whenever it is repeated in different scenes. Our study describes the main works that have been performed on the subject and shows how the use of such information has been managed in order to propose a new research on this area within the Mexican educational environment. This happened when such an engineering of didactics was applied within diverse scenes during three years. Hereby are shown the questions that have led our research, as well as some preliminary results concerning the role of the professor. It also describes the structure of the teaching situation and the activity of the students.

### RÉSUMÉ

Ce résumé donne l'information sur un phénomène didactique nommé reproductibilité. Etudier la reproductibilité d'une situation didactique, est établir explicitement les facteurs qui favorise la réussite des buts didactiques de la situation, en repetant cette situation en différents scénarios. On fait la descriptions de principaux travaux qu'on a réalisés sur le sujet et on montre comment on a utilisé cette information, pour donner une nouvelle recherche sur le sujet dans système éducatif mexicain, en mettant en marche, une ingénierie didactique tout a long de trois ans en différents scénarios. On montre les questions qui on dirigé la recherche e quelque résultats préliminaires importants qui concernent le rôle du professeur, l'estructure de la situation didactique et la l'activité de étudiants.

\*Fecha de recepción: Diciembre de 2000.

\*Esta investigación forma parte de los resultados de investigación del proyecto financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Construcción Social del Conocimiento Matemático Avanzado. Estudio sobre el Pensamiento y el Lenguaje Variacional: 26345-S.

<sup>1</sup> Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

## RESUMO

Este resumo proporciona informação sobre o fenômeno didático chamado "reprodução". Estudar a reprodução de uma situação didática consiste em estabelecer explicitamente os fatores que possibilitam alcançar os propósitos didáticos da mesma, ao reproduzi-la em diferentes cenários. Se faz uma descrição dos principais trabalhos que tem sido feitos sobre o tema e se mostra como têm se usado essa informação para expor uma nova pesquisa sobre o tema no meio educativo mexicano, ao colocar em andamento uma engenharia didática no decorrer de tres anos em diversos cenários. Mostram-se as perguntas que têm direcionado a pesquisa e alguns resultados preliminares mais importantes que atingem o papel do professor, a estrutura da situação didática e a atividade dos estudantes.

### CONSIDERACIONES TEÓRICAS DE INICIO

La evolución de la didáctica de las matemáticas está determinada por sucesivas ampliaciones de la problemática didáctica. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios de su objeto primario de investigación y, en consecuencia, modifica la naturaleza de la didáctica como disciplina científica (Gascón, 1998).

La evolución de la didáctica de las matemáticas de arte a ciencia, ha ido modificando la manera como se entienden los hechos didácticos. Desde la concepción de que la didáctica es un arte, poseído por unos cuantos y que hace que la función del alumno, sea dejarse moldear por el artista, para pasar luego a una etapa que se le ha denominado clásica, donde el aprendizaje era considerado como un proceso psico-cognitivo.

La didáctica de las matemáticas es considerada como un caso particular, de lo que podría denominarse como didáctica general, en donde las explicaciones de cómo aprende en general una persona, podían ser aplicadas al aprendizaje de las matemáticas.

Gascón, op. cit., p.10, señala los dos siguientes aspectos, como característicos del enfoque clásico en didáctica de las matemáticas:

1. Toma como problemática didáctica, una ampliación limitada de la problemática espontánea del profesor. Menciona como ejemplos de esto, los conocimientos previos de los alumnos, el problema de la motivación de los alumnos para el aprendizaje, los instrumentos tecnológicos de la enseñanza, la diversidad, cómo enseñar a resolver problemas, cómo evaluar, etc.
2. Presenta el saber didáctico como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes más fundamentales, importados de otras disciplinas

Agrega además, que desde el punto de vista clásico, la didáctica de las matemáticas, consiste en proporcionarle al profesor los recursos profesionales para llevar su trabajo de forma eficiente.

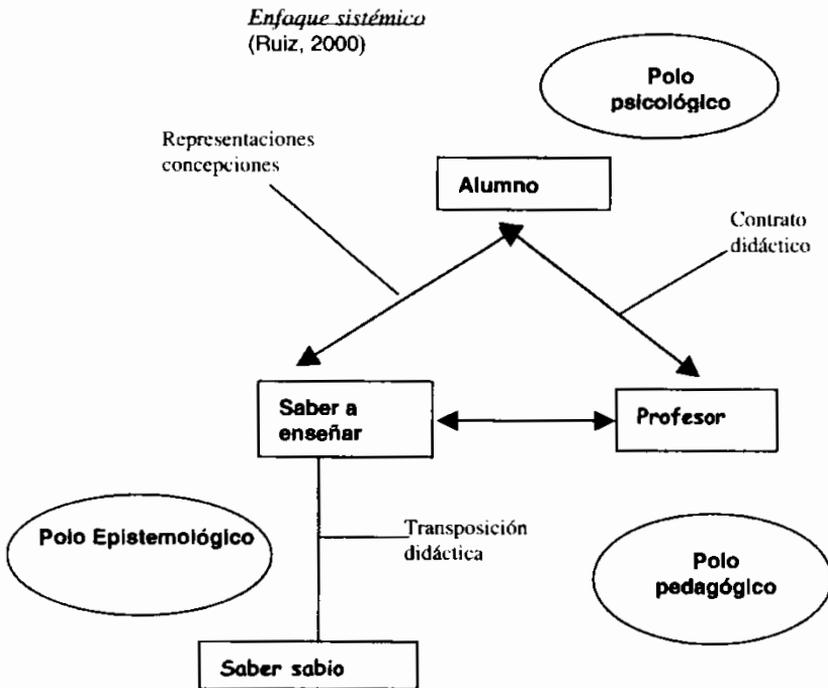
Desde esta perspectiva, enseñar y aprender matemáticas, son nociones transparentes y no cuestionables. El análisis se centra en el alumno o el profesor, condicionándolo fuertemente a los procesos psicológicos asociados a la enseñanza y el aprendizaje. Interpreta el saber didáctico a un saber técnico, renunciando así a construir la didáctica de las matemáticas como un saber científico.

Para construir la didáctica de las matemáticas como saber científico, se requeriría un modelo de la matemática escolar, así como un modelo de la actividad matemática y un modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con el surgimiento de la teoría de situaciones, Brousseau, junto con otros investigadores, se dieron cuenta de la necesidad para la didáctica, de utilizar un modelo propio de la actividad matemática. En esto consiste precisamente, el principio metodológico fundamental de la teoría de situaciones: definir un <<conocimiento matemático>> mediante una <<situación>>, esto es, por un autómata que modela los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima (Brousseau, 1994).

La teoría de situaciones adopta un enfoque sistémico ya que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1998) (véase Figura 1)

Chevallard, (1991) denomina a este esquema teórico, como "sistema didáctico". El entorno inmediato del sistema didáctico es el "sistema de enseñanza", que está constituido por un conjunto diverso de dispositivos que permiten operar a los distintos sistemas didácticos. Alrededor de este sistema de enseñanza se encuentra un entorno social, que puede caracterizarse por la presencia de padres, académicos, y las instancias políticas.



*Figura 1*

Alrededor del lo que Chevallard denomina el sistema de enseñanza en *estricto sensu*, hay un entorno donde se piensa el sistema didáctico. A tal entorno lo denomina noosfera. En la noosfera, los representantes del sistema de enseñanza, se encuentran directa o indirectamente con los representantes de la sociedad. Esta versión simplificada, del funcionamiento escolar, puede desarrollar formas muy complejas de funcionamiento.

Todo funcionamiento social de enseñanza y de aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de contenido de saberes como contenidos a enseñar (Chevallard, 1991). Los contenidos de saberes designados como aquellos a enseñar, en general preexisten al movimiento que los designa como tales, pero en algunas ocasiones constituyen "creaciones didácticas", por necesidades de enseñanza.

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica (Chevallard, 1991), p.45.

La noosfera, es el centro operacional del proceso de transposición. Allí se produce todo conflicto entre sistema didáctico y entorno.

Este centro operacional constituye un punto de especial importancia para reflexionar sobre el fenómeno didáctico que queremos discutir, (la reproducibilidad), pues es en ese centro donde se desarrollarán los mecanismos de transposición, pues éste se constituye en un espacio de negociación entre diseñadores de propuestas didácticas (ingenierías o situaciones didácticas) y los profesores, con el fin de que éstos adopten tales propuestas

para ponerlas a funcionar con sus estudiantes. Luego de que en el sistema didáctico, se ha determinado un saber a enseñar, éste es sin lugar a dudas un saber transpuesto, despersonalizado, descontextualizado. Constituye la labor del profesor proceder en sentido contrario al productor de tal conocimiento, debe contextualizar y repersonalizar el saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar (Brousseau). El estudiante que se ha apropiado de los conocimientos, procede a descontextualizar y despersonalizar para poderlos usar.

La didáctica de las matemáticas se ocupa de la identificación y modelación de los distintos fenómenos que se producen en el sistema didáctico, para ello deberá identificar, quiénes participan en él, las relaciones que unen a esos participantes y mostrar los efectos que produce.

Para abordar el fenómeno la reproducibilidad, requeriremos de otros elementos que se encuentran insertos en el sistema didáctico.

Un supuesto básico de la teoría de situaciones es: que el alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios... Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986).

Este supuesto, se basa en principios de la psicología genética y de la psicología social y que se podrían resumir en: *El aprendizaje se apoya en la acción*. La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación. (Estos, constituyen elementos básicos de la obra de Piaget). Los aprendizajes previos de los alumnos deben ser tenidos en cuenta para construir los nuevos conocimientos y para

superar los obstáculos: se conoce en contra de los conocimientos anteriores. (Esta afirmación constituye una idea fundamental de la epistemología de Bachelard (1986)). Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición del conocimiento [idea básica de la psicología social genética, representada por los trabajos de la escuela de Ginebra tales como Mungny (1986)] (Ruiz, 2000).

La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los problemas que le propone.

Tomando una situación matemática, como elemento primario, podemos plantearnos cómo transformarla en una situación de aprendizaje, para ello, debemos cerciorarnos de que la respuesta inicial del alumno, no constituya la respuesta "correcta", sino que se vea obligado a hacer modificaciones a sus conocimientos previos.

Uno de los factores principales de estas situaciones de aprendizaje, lo constituye el hecho de que las respuestas que produce el alumno, sean respuestas provocadas por las exigencias del medio, no a los deseos del profesor; al logro de este hecho se le llama devolución de la situación por el profesor. La devolución no se realiza sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que lo caracterizan (Brousseau, 1994).

Se llama situación adidáctica, a una situación matemática específica de dicho conocimiento tal que, por sí misma, sin apelar a situaciones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el alumno. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma

de provocar este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hacen que fracasen las estrategias espontáneas (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

Se llamará variable didáctica, de la situación adidáctica, a aquellos elementos de la situación que al ser modificados permiten engendrar tipos de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución.

El empleo por parte del profesor de situaciones adidácticas, con una determinada intención didáctica, constituyen lo que se denomina situación didáctica. La situación didáctica, comprende, las situaciones adidácticas, un cierto medio y el profesor, que tiene el propósito de que los alumnos aprendan un determinado conocimiento matemático.

El medio se constituye así en un elemento fundamental, dentro de la noción de situación didáctica, ya que está constituido por todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y que puede emplear con seguridad y sin cuestionamientos, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el fin de que pueda lograr el objetivo deseado. Es muy importante notar que en tal medio se encuentran el profesor. Este hecho será de gran importancia en el momento de analizar la función del profesor en la actividad de reproducción de situaciones didácticas.

En la relación didáctica, maestro-alumno, se erige explícitamente o implícitamente, un acuerdo de cuáles son las responsabilidades de cada uno de ellos. Es un sistema de relaciones recíprocas análogas a las de un contrato, pero a diferencia de los contratos sociales, éste estará determinado no por reglas previas a la relación, sino por la naturaleza del conocimiento matemático buscado. Este contrato didáctico evoluciona conforme evo-

luciona la relación del estudiante con la situación adidáctica. El estudiante puede resistirse a la devolución de la situación, o experimentar problemas, es entonces que, las acciones del profesor, traducidas a la negociación del contrato, experimentan evolución.

con la metáfora de la ingeniería, se reconoce que los objetos con los que se trabaja, resultan ser mucho más complejos que los considerados por la ciencia y esto obliga al ingeniero a hacer uso de todos los recursos a su alcance para lograr su objetivo.

## LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La ingeniería didáctica, nace a principios de la década de los ochentas, y constituye una metáfora de la actividad de los ingenieros, quienes para desarrollar sus proyectos hacen uso de los conocimientos científicos de su dominio y ponen a prueba sus resultados al control la ciencia de referencia. Continuando

Desde su surgimiento, ha sido vista con una doble función, como declara Chevallard (1982), "Ingeniería, acción para investigar" e "Ingeniería, acción para la acción". Tal polisemia, de la expresión ingeniería didáctica, vista como metodología de investigación y producción de desarrollos para la enseñanza, le son inherentes. Esta conveniente polisemia deja al descubierto que la separación entre la

### Ingeniería didáctica: Metodología de Investigación e instrumento para la elaboración de productos para la enseñanza

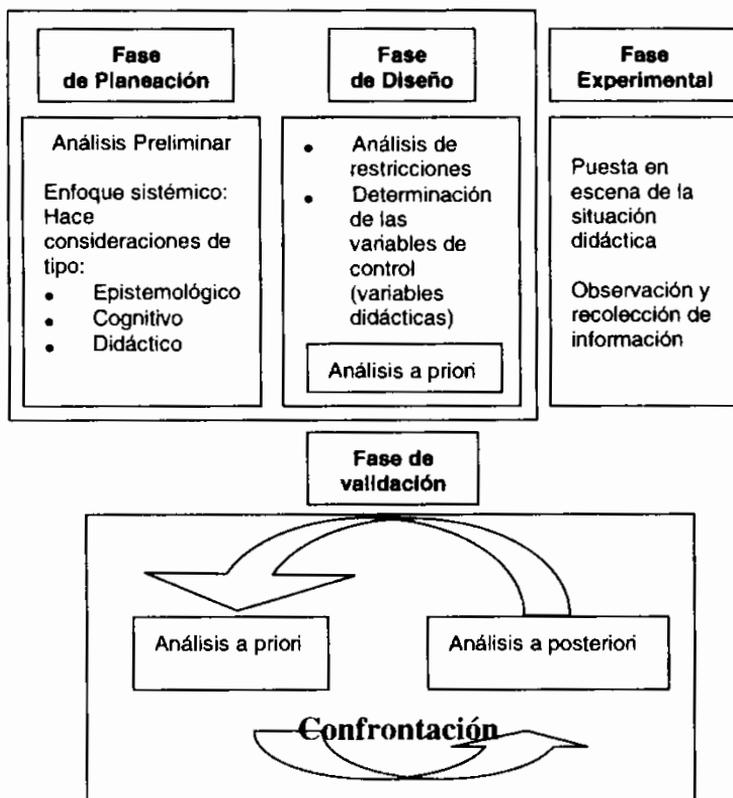


Figura 2

investigación y la acción no es fácil de localizar y sin lugar a dudas puede representar peligros de interpretación.

Un aspecto relevante de la ingeniería didáctica, es su esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La ingeniería didáctica se caracteriza también, por ubicarse en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995).

Las fases de la metodología de la ingeniería didáctica, constan de análisis preliminares, en el que entran aspectos como, la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones de los estudiantes, las dificultades, los obstáculos, las restricciones donde se realizará la experiencia y los objetivos perseguidos.

Un aspecto importante de esta fase, es el concerniente a tres dimensiones indispensables a considerar para el diseño de la situación didáctica y que son la dimensión epistemológica (asociada a las características del saber en juego), la dimensión cognitiva (asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza) y finalmente a la dimensión didáctica (asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza).

El propósito del análisis a priori es determinar en qué, las elecciones hechas, permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis sobre lo que harán los estudiantes.

La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase

entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, como se muestra en la figura anterior.

## **EL FENÓMENO DE LA REPRODUCIBILIDAD**

Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica, es establecer explícitamente los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de la misma, al repetirla en distintos escenarios.

Es alrededor del fenómeno del envejecimiento de situaciones de enseñanza, que iniciaremos la exploración del fenómeno de la reproducibilidad, ya que como veremos más adelante, este fenómeno, está asociado a la actividad de repetir la misma clase en varios escenarios distintos.

Brousseau introduce la noción de envejecimiento de las situaciones de enseñanza, para designar el problema que experimenta el profesor, para reproducir una misma lección con nuevos alumnos, los resultados que obtiene son diferentes y en ocasiones mucho más pobres. Él afirma que surge en el profesor la necesidad de modificar las instrucciones, su exposición, los ejemplos, los ejercicios y en ocasiones hasta la estructura misma de la lección. Mientras más repite la lección, este fenómeno se acentúa, llegando a cambiar el sentido de la lección original. Reconoce que las situaciones con poca interacción entre alumno y profesor, como las exposiciones seguidas de ejercicios o instrucciones acompañadas de una situación de aprendizaje envejecen más lentamente.

El envejecimiento de situaciones está asociado a otro de índole más general, el de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza. Brousseau, se hace preguntas que nos permiten vislumbrar la problemática asociada al fenómeno de la reproducibilidad:

*“El hecho de reproducir situaciones de aprendizaje, provoca una pregunta que es esencial para la didáctica ¿qué es lo que realmente se reproduce? Y agrega: Un profesor que reproduce la misma historia, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos, ¿ha reproducido el mismo hecho didáctico que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido?”.*

Además declara, *“Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica, no es un resultado de la observación sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable”* (Brousseau, 1986).

Son las dos preguntas expuestas arriba las que nos permiten en principio identificar elementos que pudieran caracterizar el fenómeno que designamos como reproducibilidad.

## **EL PRIMER ESTUDIO SISTEMÁTICO DE REPRODUCIBILIDAD**

En el año de 1984, Artigue, presenta su tesis doctoral con el título: *Contribuciones al estudio de la reproducibilidad de situaciones didácticas –Diversos trabajos de matemáticas y de didáctica de las matemáticas.* Éste constituye el primer estudio específico sobre la reproducibilidad.

Desde el inicio pone de manifiesto las dificultades que se enfrentan al desarrollar investigaciones con grupos en situación escolar. Afirma que las investigaciones clásicas, clínicas o estadísticas, introducen un paréntesis en el medio escolar durante la experimentación; por lo contrario la experimentación en

situación escolar resulta difícil de introducirse de manera efectiva en la complejidad del sistema escolar, ya que no se puede aislar al alumno del grupo, al grupo del maestro, al maestro de la institución. Las preguntas que guían su investigación son:

- \* ¿cuáles son los fenómenos observados y cuáles son las variables que los determinan?
- \* ¿qué relaciones existen entre las historias de clase y las historias individuales de los alumnos?
- \* ¿se puede pasar de un discurso descriptivo llegando a uno explicativo, y aún más, predictivo, a nivel de los alumnos, a nivel del grupo?

Artigue se propone construir un modelo de reproducibilidad que le permita estructurarla como fenómeno didáctico, para así estudiarlo, explicarlo y simularlo.

Para lograr esto, hace un análisis crítico de los primeros diez números de la revista *Recherches en Didactique des Mathématiques*, a fin de establecer el estatus dado a la reproducibilidad, descubriendo que este estatuto era raramente explícito y que cuando lo era, adoptaba una forma esencialmente ideológica.

En el análisis de 23 artículos encuentra 20 trabajos de naturaleza experimental, 5 de ellos concernientes a experimentos dentro de clase y 14 concernientes a experimentos fuera de clase (test, entrevistas individuales, situaciones de interacción...). El artículo restante se puede considerar mixto.

Ante el predominio del tipo de investigaciones fuera de clase, pone atención a las razones que se dan para justificar las elecciones metodológicas e identifica:

- \* Con respecto a las entrevistas: que eliminan la complejidad del sistema didáctico; que

permiten centrarse en las relaciones sujeto-situación problema; que es posible un análisis fino y preciso de los procedimientos del sujeto, así como de su evolución.

- \* Con respecto a los test: por la economía de la investigación; permiten tratar simultáneamente un gran número de variables.

Con base en estos argumentos y dicho en forma general, estos dos métodos ( las entrevistas y la aplicación de test) permiten, elaborar, con mayor conocimiento de causa, una secuencia didáctica experimental y en particular definir mejor las hipótesis que guiarán la observación.

¿Pero qué relación existe entre los métodos elegidos y la noción de reproducibilidad que se maneja explícita o implícitamente en esos escritos?

En los trabajos vinculados con experimentos fuera de clase:

No se emplea el término reproducibilidad, se emplea la expresión "regularidades" y esto: en relación con su sentido, su precariedad y su dominio de validez; para poner de manifiesto tendencias y formular hipótesis explicativas; como prevención contra generalizaciones e intentos de aplicaciones pedagógicas inmediatas.

Afirma Artigue: como puede verse, la "reproducibilidad" no es englobada en la reproducibilidad de una experiencia precisa, la significación de los resultados es reducida a su validez estadística. Los límites percibidos en estas investigaciones se deben entre otros factores a la distancia que las separa de la didáctica escolar.

En los trabajos vinculados a experimentaciones en clase se ponen de manifiesto las dificultades

de estructurar métodos eficientes de observación y con ello se soslaya la reproducibilidad como un propósito explícito de estudio, ya que: algunos procesos individuales pueden no aparecer, a causa de algunas variables difíciles de controlar (papel del maestro, de los líderes, contaminación); algunos tanteos pueden pasar desapercibidos; la dificultad de análisis de los fenómenos observados; la multiplicidad de variables de que dependen dichos fenómenos.

Es claro el reconocimiento por parte de los investigadores de las dificultades que entraña la experimentación en clase y algunos de ellos señalan la necesidad de desarrollar una aproximación científica de la experimentación en clase, como es el caso de Vergnaud (1981), que algunos años antes reflexiona planteándose la pregunta:

¿qué precauciones deben tomarse para realizar experimentaciones didácticas en clase, en una experimentación propiamente científica? y subraya los siguientes aspectos:

- claridad de los objetivos contemplados y los efectos esperados.
- la fiabilidad de las observaciones realizadas,
- la repetición de hechos didácticos interesantes

En este contexto, la reproducibilidad se asocia con la identificación de regularidad de conductas, particularmente al nivel de distribución de conductas y las variaciones adquieren sentido en relación con estas regularidades. No es suficiente observar que se repitan conductas, errores, dificultades y efectos didácticos; sino ir más allá y ver si es posible describir los desarrollos posibles de una serie de lecciones de manera que ciertas regularidades sean repetibles e interpretables.

No se busca que todo ocurra de la misma manera, se sabe que eso es imposible.

Según Artigue, Brousseau (1982), es el primero en enfrentar al problema de la reproducibilidad, e identifica dos tipos de la misma, una externa, de orden dinámico, que se ubica en el nivel de las historias de clase (actividades, procedimientos etc.) y otra interna, que se ubica en el nivel de la comprensión de los significados e intenta determinar en qué nivel se sitúa la reproducción de un proceso de construcción de números decimales realizado en 8 clases diferentes a lo largo de 3 años.

Afirma Brousseau: la hipótesis de reproducción de un mismo proceso debe pensarse principalmente en contra de:

- \* un mejoramiento al menos local
- \* un envejecimiento de las situaciones didácticas

ya que estos procesos llevan a "cerrar" cada vez más las preguntas, disminuyendo el logro del estudiante al enfrentar preguntas más "abiertas"; aún reconociendo estos hechos no nos dice cómo se resuelve el problema de la reproducibilidad. La reproducibilidad es un problema que involucra a la dinámica del grupo cuando enfrenta una situación de aprendizaje, pero es extraordinariamente complejo retener todos los factores que son el tejido de esa dinámica, a partir de observaciones individuales.

Con base en las concepciones de la noción de reproducibilidad detectadas en esos escritos didácticos, Artigue plantea un primer modelo que denomina ingenuo en donde reconoce en las situaciones reproducibles las características siguientes:

A lo largo de experimentaciones repetidas,

- Los mismos procedimientos deben aparecer (de manera que ellos no sean marginales) con jerarquías comparables.
- La historia de la clase debe poder ser descrita por un pequeño número de órbitas<sup>2</sup>.
- Las regularidades observadas a nivel de procedimientos y de órbitas deben ser esencialmente los hechos de regularidades individuales. Ellas no deben estar sujetas a las acciones de centración y desbloqueo producidas por el instructor.
- Las ligeras perturbaciones que no puedan evitarse y se produzcan de una clase a la otra no deben tener tendencia a amplificarse.

El modelo ingenuo presupone que las regularidades colectivas son la suma de las regularidades individuales o bien que las regularidades individuales finalmente se transforman en regularidades colectivas.

Con base en dicho modelo, se tomarán las regularidades en las trayectorias individuales como los elementos que garantizan estabilidad y reproducibilidad suficiente para poderse compartir. Colocándonos en ese modelo se considerarán las situaciones que mejor se adapten a las características del mismo, es decir a situaciones donde:

- el alumno confronta individualmente la resolución de un problema preciso,
- el alumno puede controlar por sí mismo los resultados de su actividad.

El método seguido por Artigue para establecer la reproducibilidad consistió en matemati-

<sup>2</sup> Una trayectoria estará constituida por todo aquello que hace un alumno en el proceso de resolver o enfrentar una actividad en clase. Pero esta noción de trayectoria es demasiado amplia y compleja para identificar en ella de manera razonable regularidades cognitivas. Es por ello que se utiliza preferentemente la noción de órbita, la cual permite operar los reagrupamientos didácticamente significativos. Una órbita sería una sucesión finita de estados del sujeto. Dicho de otra manera es una discretización de la trayectoria. El conjunto de las órbitas da la historia de clase.

zar el modelo ingenuo, para ello se definen conceptos como los de trayectorias, historias individuales, historias de clase, órbitas, campo ponderado, la noción de vecindad sobre el conjunto de historias de clase.

El método empleado le permitirá, auxiliándose del modelo matemático pasar de las regularidades individuales (trayectorias, historias individuales) a las regularidades colectivas, historia de clase.

Sobre la marcha se da cuenta de que la reproducibilidad no está asociada, en el modelo implícito que se trata de teorizar, a la capacidad de reproducción de una historia determinada, sino más bien a la posibilidad de asegurar que todas las historias posibles están próximas a ella.

A pesar de que la observación anterior surge en el contexto del modelo ingenuo cuya intención es establecer comportamientos generales como una resultante de los comportamientos particulares, podemos hallar en dicha observación elementos de sumo interés. Descarta de hecho, la idea de reducir la reproducibilidad al intento de reproducir una misma historia de clase, como si esta fuera única, sino que por el contrario, señala que las historias de clase son múltiples y que se puede hablar de reproducibilidad si dichas historias no se dispersan, es decir si se mantienen en un determinado rango de cercanía. Este hecho invierte por completo una forma de pensar, especialmente cuando se piensa en buscar una sola vía o uniformidad en los procesos de aprendizaje.

Artigue concluye con relación al modelo ingenuo:

El modelaje matemático y un estudio probabilístico elemental me permitieron demostrar que el campo de validez de un modelo como ese era muy reducido en términos

teóricos, aun si se satisface con una reproducibilidad muy aproximada como la que definí a partir de la noción de "vecindad de historias de clase".

En otros términos se probó que el tamaño de la muestra de la clase era demasiado pequeño para permitir que las regularidades individuales pasaran a nivel colectivo.

Era indispensable estudiar un modelo donde se tomen en cuenta las interacciones entre los alumnos, para ello se estudió de manera precisa la dinámica de una situación experimentada en una investigación realizada anteriormente por Artigue y Robinet, (1982) Sobre las concepciones de círculo en los niños de la escuela elemental. Ella se había llevado a cabo en dos clases con una observación muy detallada, y con un importante grupo de datos recogidos en diferentes pasos de la investigación (análisis epistemológico, análisis de los objetos de enseñanza, pre-experimentación, experimentación, entrevistas individuales).

Primero se construyó un modelo cualitativo de la dinámica de la situación poniendo en evidencia:

- las regularidades individuales que gobiernan los comportamientos de los alumnos,
- Los fenómenos de interacción en el sentido de la clase.

Se trató de llevar lo más lejos posible el estudio del modelo construido, para ello se le asoció una familia de modelos cuantitativos susceptibles de simulación en la computadora.

Con base en este análisis se mostró para esta situación precisa:

- que no se podía buscar la reproducibilidad en una historia particular, lo mismo en in-

cluir una aproximación a través de vecindades de historias.

El problema está en determinar a qué nivel se sitúan las regularidades de la dinámica. Son dos los fenómenos que resultan esenciales.

- la fuerte probabilidad de estructuras en posición dominante cuando la difusión global tiene un coeficiente elevado
- la fuerte probabilidad de existencia de bloqueos que la simple difusión local o una difusión global con un débil coeficiente no permite superar en un tiempo compatible con las exigencias escolares.
- la fuerte probabilidad de existencia de bloqueos que la simple difusión local o una difusión global con un débil coeficiente no permite superar en un tiempo compatible con las exigencias escolares.

En el contexto de la situación que se estudió, se tenía una fuerte probabilidad de estructuras con posición dominante, producto de una difusión global espontánea como en el primer grupo o forzada como en el segundo grupo.

El desarrollo de una situación en un grupo estará determinado por la estructura de la situación (las posibles vías de solución - trayectorias -, las distintas órbitas que se pueden producir, los elementos de la situación que pueden provocar bloqueos en los estudiantes), la difusión local y grupal que puede ser espontánea o provocada por el profesor.

Es el profesor quien conoce el propósito didáctico de la situación, las vías de solución y los posibles obstáculos para el estudiante así como el control del tiempo escolar.

Entonces en esa dinámica, el maestro juega un papel esencial. Él es el actor decisivo de la

reproducibilidad. Artigue concluye:

*la reproducibilidad está en buscar en las estructuras de historias y no en las historias mismas y dentro de esa reproducibilidad estructural, el profesor tiene un papel activo a desarrollar.*

Las estructuras de historias hace referencia a las distintas órbitas que se pueden generar en una situación dada, la reproducibilidad se deberá buscar en la manera como se producen esas órbitas y no en la producción de historias iguales. Afirma Artigue que el papel del profesor en la producción de esas órbitas es fundamental.

Artigue reconoce que los resultados obtenidos son limitados, por reducirse a estudiar el problema de la reproducibilidad bajo un ángulo dinámico, para una situación y no para un proceso.

Artigue (1989), en el artículo titulado Ingeniería Didáctica, al retomar el tema de la reproducibilidad de situaciones didácticas escribe:

*...me parece razonable formular en la actualidad la siguiente hipótesis con respecto a la noción de reproducibilidad: conviene pensar las relaciones entre reproducibilidad interna y reproducibilidad externa en términos de una relación de incertidumbre. En otras palabras, una exigencia fuerte de reproducibilidad externa no puede satisfacerse sino sacrificando otro tanto la reproducibilidad interna.*

En el año en que esta tesis se concluyó, la ingeniería ya se había constituido como instrumento metodológico para la realización de investigaciones en el aula, hecho que permitió a los investigadores, la posibilidad de de-

sarrollar experimentos de reproducción de ingenierías que se habían diseñado con fines de investigación o bien, para fines educativos en la introducción de nociones específicas.

A continuación comentaremos algunas de estas experiencias, con el fin de desprender información que sea relevante a nuestro propósito de investigación y para señalar el nuevo rumbo que ha tomado las investigaciones de reproducibilidad; así como señalar si los hubiera, los hallazgos más recientes en este campo.

## **OTROS ESTUDIOS RELACIONADOS CON LA REPRODUCIBILIDAD**

Grenier (1989), reporta una experiencia didáctica, con estudiantes 11 a 15 años que tuvo como propósito, la elaboración de una secuencia de situaciones problema, capaz de hacer evolucionar los conocimientos de los alumnos sobre la simetría axial, antes de la enseñanza formal de la misma.

La investigación se desarrolla en dos planos, desde la perspectiva del profesor, cumplir con los objetivos de aprendizaje que está obligado a lograr en el marco de un curso de sexto grado, en el sistema escolar francés. Desde la perspectiva del investigador, hacer funcionar la teoría de situaciones didácticas, a fin de proporcionar elementos de estudio para la misma.

La metodología consistió en: aplicar la secuencia didáctica, en un grupo normal, de sexto grado, de 28 estudiantes de edades entre los once y doce años. El análisis de su desarrollo mostró, desfase entre los objetivos de aprendizaje previstos y los realmente obtenidos.

En un segundo tiempo, se modificaron las variables y restricciones sobre la secuencia, en términos de lo que los investigadores habían

determinado que había provocado tal desfase, sin embargo se conservaron los mismos objetivos de aprendizaje.

El proceso modificado, fue desarrollado al año siguiente en el mismo colegio con veinticuatro nuevos alumnos de sexto grado, con características equivalentes a los de la primera experiencia.

La comparación del desarrollo de los dos procesos, permitió analizar las consecuencias de las modificaciones hechas. Pero también apareció que el control de las situaciones no era suficiente para asegurar la reproducibilidad del proceso, ya que ciertos desfases son producto de decisiones del profesor como respuesta a situaciones reales de la clase.

La organización del trabajo, sería en pequeños grupos; al concluir esa fase de trabajo, pasarían representantes de cada grupo a exponer sus resultados. El profesor sería un observador en la primera etapa, posteriormente sería el coordinador del debate y finalmente desarrollaría la actividad de institucionalización.

Las modificaciones a las variables de la secuencia, fueron debidas a problemas mostradas por algunos estudiantes en relación con la interpretación de instrucciones, como es el caso de una que indicaba, "construcción precisa". Algunos alumnos asociaban esto con la necesidad de hacer medidas, «esta interpretación en términos de medidas, conducía a un bloqueo de la situación, y por ende a la necesidad de usar una regla graduada. Se cambia la instrucción, pero obliga al profesor a explicar el sentido de la tarea a realizar».

Un aspecto importante a considerar en esta investigación, radica en las actividades colectivas, específicamente de institucionalización. Situación, etapa, momento, fase, acción, pro-

ceso, esas diferentes aproximaciones de la institucionalización están en común con el objetivo (del profesor) de fijar el saber en juego de manera convencional. La institucionalización comporta dos aspectos importantes, la descontextualización y la formulación (reformulación) de los conocimientos puestos en juego en los problemas *op.cit.*, p.44.

En el análisis de las fases colectivas para las dos experiencias los llevaron a hacerse las siguientes preguntas: ¿se puede caracterizar lo que se destaca de la institucionalización en el desarrollo del proceso? Y ¿cuáles son los medios de que dispone el profesor para generar las fases colectivas y cuál es el papel que le toca jugar en esa fase?

En relación con este asunto comenta: En caso de que después del trabajo en equipo, los objetivos propuestos no se cumplieran, el profesor deberá en la fase de trabajo colectivo, atenerse a los objetivos aprendizaje previstos y luego tratar el contenido matemático acordado, o bien aceptar los cambios de contenido introducidos por los alumnos y ponerlos a debate y no solo los previstos.

Sobre esas dos decisiones están las consecuencias que marcan diferencias grandes sobre los aprendizajes.

En el primer caso, el profesor deberá hacer emerger a partir del debate de los estudiantes, los conocimientos surgidos del trabajo en los equipos. En el otro caso los conocimientos puestos a debate, surgidos del trabajo de los equipos pueden mantenerse muy alejados de los conocimientos que estaban planificados. A partir de las actividades colectivas observadas, reportan las consecuencias de esas decisiones.

a) La decisión de tratar el conocimiento previsto; el profesor da la solución, apoyándose en las soluciones aisladas de

algunos estudiantes.

b) La ignorancia de ciertos procedimientos correctos; basado en la decisión de mantenerse en el marco de los objetivos inmediatos, esta hace rechazar o no tomar en cuenta procedimientos que mostrarían ser pertinentes pero a más largo plazo.

c) La toma en cuenta de procedimientos marcadamente desiguales; uno de los propósitos de la fase de equilibrio o de consenso, es el de homogenizar los conocimientos puestos en escena por los estudiantes, el profesor deberá hacer una elección sobre de aquellos aspectos que resultan esenciales lograr el aprendizaje propuesto. La investigadora nos indica que la elección de lo que es esencial, resulta una actividad de realizar.

Finalmente Grenier, señala, dos herramientas importantes en el desarrollo de la investigación fueron, el tomar en cuenta las concepciones de los estudiantes durante el proceso, el estudio de las variables de comando de las situaciones adidácticas. Pero en relación con funcionamiento del proceso señala dos cosas que han quedado abiertas:

i) en relación con las situaciones adidácticas: ¿Cómo asegurar una devolución del problema en los estudiantes, que preserve el sentido de los aprendizajes en juego sin hacer a la situación caduca?

ii) en relación con la gestión de las fases colectivas (consenso, institucionalización) ¿Qué herramientas desarrollar para un control de los acontecimientos que ahí se producen?

Las elecciones (concientes o no) y decisiones del profesor al respecto, son sustentadas por las representaciones que el profesor tiene de sus alumnos, pero también sobre el aprendizaje y el saber. Bajo una preocupación de

reproducibilidad de situaciones didácticas no se puede hacer economía del estudio del polo "profesor" del sistema didáctico (op. cit., p.55).

En el marco de una investigación sobre reproducibilidad, desarrollada por Perrin-Glorian (1993), muestra la necesidad de considerar el polo del "profesor" como un elemento fundamental a considerar en un estudio de esta naturaleza.

Ella nos explica la experiencia desarrollada a lo largo de un poco más de ocho años, orientada a mejorar la enseñanza en alumnos de un medio social bajo o poco favorecido, para ello se planteó la posibilidad de desarrollar un estudio de condiciones de reproducibilidad de una ingeniería didáctica, elaborada con anterioridad por otra investigadora.

Esta ingeniería didáctica, sobre los decimales y las áreas, ya había sido experimentada en otras clases, y esto permitiría probar la estabilidad de la misma. Ello requería un esfuerzo de adaptación de la ingeniería, asunto que consideraron que sería mas o menos fácil subsanar, a pesar de la diferencia en el tipo de alumnos.

Ante el hecho patente, de grandes diferencias y distorsiones entre los resultados obtenidos y los esperados, orilló a los investigadores a un cambio de problemática, que consistía, en tomar esas distorsiones como objeto de estudio y por otra parte a encontrar las razones por las cuales, los profesores hacían otra cosa que la acordada con los investigadores; por otro lado, también pretendían analizar, de una manera más precisa, las dificultades de los alumnos, todo esto con miras a ampliar el campo de cuestionamientos.

Uno de los problemas que les interesaba explorar, era el encontrar las variables intermediarias posibles, orientadas a explicar las diferencias de aprendizaje a partir de

situaciones aparentemente idénticas.

Perrin-Glorian, indica que este estudio, analiza la imposibilidad de transmitir ingenierías didácticas elaboradas en clases ordinarias, y por tanto estables, libres de un cierto número de restricciones y fenómenos imbricados que conducen frecuentemente a una negociación dentro de las clases de medio social bajo o poco favorecido (Margolinas y Perrin-Glorian, 1997).

En 1992, Arzac, Balacheff, y Mante, reportan una investigación en la que con el fin de dar un carácter científico al problema de la reproducibilidad de situaciones didácticas, se plantean la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de fenómenos podemos esperar se reproduzcan cuando la misma situación de clase es implementada por dos profesores distintos en dos diferentes clases?

Con este fin, diseñan un experimento que consiste en plantearle un problema a varios grupos de estudiantes. En el diseño del problema participan los profesores que coordinarán la actividad con el grupo. El experimento se desarrolló en dos etapas, la primera, participarán profesores que intervinieron el diseño del problema, debido al desempeño de los profesores, se decidió repetir el experimento pero con profesores, ajenos a la elaboración del diseño.

El principal requerimiento para el profesor es que, él no puede intervenir en aspectos matemáticos, él dirigirá la discusión del problema en el grupo y finalmente elaborará un reporte de lo acontecido.

A partir de la experiencia surgió el problema relacionado con la comunicación de un escenario de una situación didáctica a un profesor y por lo tanto a la descripción de dicho escenario, caracterizándolo con los siguientes elementos:

Propósito didáctico de la situación:

- Estructura de la situación
- Actividades del estudiante
- Actividades del profesor
- Tiempo asignado
- Organización social de la clase

Contenido de la situación, que incluye:

- Contenido matemático
- naturaleza de las actividades
- claves de construcción de significados

Hay que establecer, ligas, interacciones y compatibilidad entre contenido y escenario

A partir del análisis de estas puestas en escena sabemos que, el profesor en este estudio, durante el período de debate, toma varias decisiones opuestas al escenario planeado.

¿Cuál fue la causa de dichas respuestas?

La gestión del tiempo y, la responsabilidad epistemológica del profesor [El profesor, experimenta la necesidad de un cierre aceptable. Ese hecho provoca una tensión entre esa necesidad y el contrato de no intervención. Esa tensión es el indicativo de lo que Balacheff (1988) denomina responsabilidad epistemológica del profesor].

Esto se hace evidente cuando se analiza junto con el profesor la razón de sus decisiones. ¿porqué elimina, porqué agrega, porqué no toma en cuenta, porqué privilegia?

Hay dos elementos que no dependen de la administración del tiempo, ni de la responsabilidad epistemológica del profesor: 1) La relación personal del profesor con las matemáticas y con el contenido matemático específico; 2) Las ideas acerca de lo que es aprender y enseñar matemáticas.

Como podemos observar, estas conclusiones giran nuevamente alrededor de las concepciones del profesor.

Es importante notar el deslizamiento de la atención a la posición del profesor, cuando se hacen consideraciones relacionadas con la reproducibilidad. La misma Artigue, llama la atención a ello en su artículo de (1995), cuando cita a (Arsac, 1989), que en su investigación puso en evidencia la desproporción, entre el carácter aparentemente insignificante de algunas intervenciones del profesor y sus efectos reales. Señala además la necesidad de construir alguna otra categoría, paralela a la de variable didáctica, como la de escogencia didáctica (consiste en una decisión situacional que toma el profesor y que motiva un cambio cognitivo en el estudiante y que cambia el sentido y la función del conocimiento).

Además en sus trabajos, en el marco de la epistemología del profesor en la que considera, 1) la concepción sobre la naturaleza de las matemáticas, 2) su concepción de la enseñanza, y 3) su concepción del aprendizaje. Mismas que coinciden con la definición de representaciones metacognitivas (Robert y Robinet, 1989). Estos investigadores parten de la hipótesis de que la transmisión está condicionada por las conductas de los profesores en clase. Además agregan otra más, que se refiere a que debe existir una cierta compatibilidad entre los investigadores que dieron origen a una ingeniería y los profesores que van a experimentarla o tratar de utilizarla, para que haya un buen funcionamiento de la transmisión didáctica. Ellas hacen uso de los trabajos de los psicólogos sociales quienes han mostrado que en efecto, "las representaciones sociales, vistas como un sistema de interpretación que rige nuestra relación con el mundo y con los otros, orientan y organizan las conductas y las comunicaciones sociales" (Jodelet, 1989).

En relación con la práctica profesional del maestro, introdujeron la noción de representación metacognitiva para referirse a: las concepciones de los profesores sobre las mate-

máticas, sobre la manera como se enseñan y aprenden, junto con las consecuencias de éstas sobre la práctica docente.

Artigue, reconoce la importancia de estos trabajos, pero indica que sólo están abriendo un tema de investigación, que plantea preguntas y dificultades metodológicas delicadas, pero tiene de beneficio, la atención que se le está brindando al profesor.

### **UN COMENTARIO SOBRE LAS NOCIONES DE REPRODUCIBILIDAD INTERNA Y EXTERNA**

Dada la naturaleza dual de la ingeniería didáctica y la gran cercanía que esta práctica de investigación provoca con el profesor y con el aula, crece la tentación de transformar diseños de investigación en diseños para la clase. Tal tentación la experimentan tanto investigadores impacientes con probar en condiciones reales de clase, acciones desarrolladas bajo un control inusual en una clase estándar. Por otra parte, profesores cercanos a los investigadores y a las investigaciones mismas, demandan dicho traslado. Este hecho, es una necesidad real, pero que como se ha visto anteriormente, introduce una problemática didáctica muy importante y que comentaremos brevemente para finalizar esta parte de nuestro trabajo.

El diseñador de una situación tiene como objetivo su reproducibilidad interna, es decir una reproducibilidad la cual está situada al nivel de los significados. A pesar de eso, la descripción que generalmente se da de los productos de ingeniería, enfatizan sobre todo las características externas de la reproducibilidad: comportamientos individuales o colectivos, su evolución en el tiempo, que se observa en la superficie, como si la sola reproducibilidad externa garantizará la interna (Artigue, 1991).

Reproducibilidad externa e interna, son elementos que no pueden discurrir por separado, queda un asunto de primordial importancia, buscar los mecanismos de reproducibilidad interna haciendo uso de todos los factores que constituyen la reproducibilidad externa.

### **UN ELEMENTO MÁS SOBRE LA REPRODUCIBILIDAD A CONSIDERAR**

La Matemática Educativa ha ido evolucionando en dirección de constituirse como una disciplina científica, en la actualidad se encuentra en proceso de consolidación y por tanto de definición, tanto al nivel de sus métodos de investigación como al examen de la naturaleza de sus hallazgos. El fenómeno de la reproducibilidad adquiere un papel relevante en este aspecto, como así nos lo hace ver Johsua, (1996), en la discusión sobre lo que es un resultado de investigación en el campo de la Matemática Educativa (o Didáctica de las Matemáticas para algunos, o Educación Matemática para otros), al señalar tres aspectos que le parecen básicos para caracterizar lo que es un resultado en nuestra disciplina.

1. Que se apoye en argumentos empíricos: que haya datos empíricos producto de la observación, el análisis y la experimentación que sustenten las afirmaciones.
2. La segunda condición es que la didáctica pase de la identificación de fenómenos didácticos, a la delimitación de condiciones de aparición de esos fenómenos. Afirma que la teoría gana en potencia cuando es capaz de distinguir los fenómenos recurrentes de aquellos que son contingentes, de distinguir las formas de aparición de fenómenos recurrentes y las condiciones de producción de unos y otros.

3. La tercera y quizás la más importante de todas es la de la producción de fenómenos. Eso conduce a pasar de datos de observación a datos experimentales en sentido estricto, sujetos a experimentación. Lo mismo si las limitaciones aparecen al principio que en la reproducción de esos fenómenos, al menos se deberá exhibir la posibilidad de dominio de la evolución del fenómeno, hecho que está ligado a un cierto rango de predicción.

Johnsua se pregunta si la Didáctica de las Matemáticas responde a esas tres características; y señala que de ellas, la más problemática es la de la reproducibilidad, sabemos, continúa diciendo, que después de los trabajos de Artigue, la reproducibilidad en sentido estricto no se puede asegurar en didáctica. Uno puede ganar en predicción reagrupando las historias de clase en <<vecindades de historias>> y en distinguir trayectorias y órbitas propias de cada situación didáctica. Y afirma, esto constituye una limitante muy drástica para la reproducibilidad. Ahora sabemos que la reproducibilidad, no depende de elementos internos del diseño únicamente, sino que debe de considerar factores ajenos a él, y que para poder obtener cierta estabilidad en los resultados, como es lo que se necesita con relación al fenómeno de la reproducibilidad, deberemos atender a esos factores para incorporarlos.

### **NUESTRA APROXIMACIÓN AL FENÓMENO DE LA REPRODUCIBILIDAD**

Con base en la puesta en escena de la ingeniería "un estudio didáctico de la función 2" (Aguilar, et al., 1997) en distintos escenarios, por el diseñador y por otros profesores, con el fin de reproducir los propósitos didácticos de la misma; nos proponemos responder a las siguientes preguntas:

¿qué tipo de fenómenos podemos esperar aparezcan cuando se repite una situación didáctica, diseñada con un propósito específico, aplicada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios y con la intención de lograr el mismo efecto didáctico?  
¿cuáles de estos fenómenos apuntan a lograr dicho logro didáctico y cuáles no?  
¿cuáles eran predecibles y cuáles no?

Sabemos que repetir no es sinónimo de reproducibilidad, nuestra revisión de los distintos estudios relacionados con la reproducibilidad, nos muestran las dificultades que se enfrentan cuando se intenta reproducir una situación didáctica; a partir de esos estudios, damos por conocidos varios fenómenos que estarán presentes y que obstaculizarán nuestro propósito, y del surgimiento de otros nuevos, y que estamos interesados en detectar.

La identificación de fenómenos que aparecen cuando se repite una situación didáctica, nos resulta una tarea indispensable, ya que, a partir de una clara definición de éstos, tendremos a nuestra mano componentes para construir un *posible modelo* que nos permita *considerar* aquellos elementos que están en juego para reproducir una situación didáctica, y que además posibilite *describir* sus interrelaciones y funcionamiento, con la finalidad de que tal modelo se constituya en un elemento con cierto valor de predicción sobre la reproducibilidad.

Para lograr nuestro propósito, buscamos observar y registrar la información referente al funcionamiento de las distintas componentes del sistema didáctico cuando la situación puesta en escena se constituya en un elemento básico del medio que posibilite la construcción de un conocimiento determinado en el estudiante. La determinación de ese

cuerpo de componentes, sus interrelaciones, los procesos que se ponen en marcha; forman parte de los objetivos específicos a lograr y que a conti-nuación exponemos.

- \* Determinar los factores de reproducibilidad interna; que están relacionadas directamente con la construcción del sentido y el aprendizaje.
  - Determinación de la devolución de las distintas situaciones adidácticas de la propuesta didáctica, considerando la naturaleza de ellas (acciones, formulaciones, validaciones), haciendo consideraciones referentes al contrato didáctico.
  - Observando la evolución de los modelos implícitos de los estudiantes, asociados a los conocimientos puestos en juego
  - Efectos sobre los estudiantes de las actividades colectivas de debate, especialmente las situaciones de institucionalización.
- \* Determinar las componentes de la reproducibilidad externa;
  - Escenario de la situación, que incluye, el propósito, estructura de la misma, las actividades de los estudiantes, actividades del profesor, tiempo asignado
  - Las producciones públicas del estudiante. Lo dicho y hecho en el desarrollo de la actividad.
  - Organización social de la clase.
- \* Mostrar de manera precisa el papel del profesor en el desempeño del grupo.
  - Determinación de los principios meta-cognitivos referentes al profesor y que rigen su actividad, específicamente con relación a lo que es la matemática, el aprendizaje y enseñanza de la misma, así como la función del profesor en el aula.
  - Descripción amplia del proceso de comunicación del escenario.

## CÓMO SE HA DESARROLLADO LA INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación inicia con el diseño de la ingeniería didáctica "Un estudio didáctico de la función  $2^x$ " (Aguilar et. al., 1997)<sup>3</sup>. Tal ingeniería se elaboró con el propósito de que los estudiantes iniciaran una exploración orientada a la construcción de la noción de función exponencial. La situación consta de tres etapas.

Se llevó a escena en enero de 1997, con un grupo, formado por estudiantes de distintos grados de un bachillerato en la ciudad de México. La puesta en escena resultó exitosa, fue validada por los métodos propios de la ingeniería didáctica.

En enero de 1998, fue nuevamente puesta en escena, pero ahora con un grupo de profesores que se encontraban en el primer semestre de un postgrado con especialidad en la enseñanza de las matemáticas. El análisis fue realizado por los propios profesores quienes cruzaron sus trabajos con el fin de observar qué dificultades había tenido el otro equipo y cómo las habían superado. La experiencia nos permitió concluir que la situación había generado interés entre los profesores y se habían comprometido con el trabajo propuesto.

A partir de esa experiencia, les propusimos a once profesores el que reprodujeran con sus estudiantes la ingeniería. Al haber aceptado, nos constituimos en un grupo de investigación sobre reproducibilidad.

Iniciamos el proceso con los once profesores, de profundización de la ingeniería. Se les dio a leer los documentos del diseño, y se revisó con detenimiento el contenido matemático de la situación. Se hicieron varias reuniones con los once miembros de nuestro equipo y mu-

<sup>3</sup> Anexo

chas otras en grupos reducidos, que respondían fundamentalmente a factores geográficos; Toluca, Pachuca y Oaxaca.

Las puestas en escena en los tres grupos que se formaron se realizaron en los meses de mayo y junio de 1998, cada grupo de profesores fincó sus objetivos sobre el supuesto de observar en una experiencia de puesta en escena de una ingeniería, pero no se hacían planteamientos explícitos de reproducibilidad.

Nosotros seguimos el proceso, pero con un planteamiento de reproducibilidad, apoyamos las tres puestas en escena, diseñamos la estrategia de observación en colaboración con ellos y participamos en ellas haciendo observaciones. Como resultado de este proceso realizamos una primera exploración en términos de reproducibilidad que nos permitió elaborar la tesis de maestría, que denominamos "Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas: El caso de la función exponencial" presentada en enero de 1999.

Los resultados del trabajo de tesis de maestría mostraron algunas pistas para continuar la investigación. Había que buscar una explicación más sólida de los resultados obtenidos especialmente en lo referente a las intervenciones de los profesores y los contrastantes resultados de los equipos.

La investigación continuó con la respectiva investigación bibliográfica, que hemos expuesto anteriormente y la preparación de nuevas puestas en escena. Éstas surgieron a partir de la colaboración de un nuevo grupo de profesores interesados en reproducir la ingeniería con sus estudiantes, pero ya con intereses explícitos de investigar reproducibilidad.

Este nuevo grupo de profesores tienen formación académica en ingeniería, además estudian un posgrado para especializarse en la en-

señanza de las matemáticas, en la escuela Normal Superior del Estado de México. Los tres trabajan en bachillerato y en la educación superior en una Escuela de Estudios Profesionales de la UNAM, en el área de ciencias sociales e ingeniería.

Con ellos realizamos un largo proceso de familiarización con la ingeniería, de abril a noviembre de 2000. Los trabajos han estado orientados a desarrollar el aspecto de comunicación del escenario, así como a desarrollar lo que hemos denominado, el *espacio de intervención del profesor*. Este espacio surgió como consecuencia de la argumentación y objetivos de esta investigación y que contempla posibles modificaciones de la situación en términos de los juicios de los profesores sobre el contenido, la estructuración de las secuencias y las predicciones en términos de sus estudiantes.

Se tiene documentación de todo el proceso, solución de la secuencia, comentarios iniciales de ellos sobre la misma, descripción del contenido matemático que se pone en juego, un intento por determinar el objetivo de la situación a partir de su experiencia de solución. Conocimiento del diseño de la situación, estudio de la noción de reproducibilidad, estudio de la experiencia del anterior grupo, elaboración de sus proyectos de investigación en términos de reproducibilidad. Preparación de la puesta en escena y para ello de sus propuestas de modificación de la secuencia y la elaboración de sus predicciones. Elaboración de una estrategia de observación.

Actualmente se encuentran en el proceso de transcripción de sus grabaciones y videos.

## PRIMEROS RESULTADOS

Hasta el momento hemos reunido un gran nú-

mero de información, que ha sido descrita de manera amplia en distintos trabajos (Lezama, 1998, 1999, 2000), pero con el fin de transformar dicha información en resultados, hemos iniciado un proceso de análisis que obliga a hacer cortes en la información recabada en términos de nuestros objetivos de investigación.

Hay algunos aspectos que pueden ser mencionados de las distintas puestas en escena y que son relevantes para la investigación y creemos dan una mejor comprensión del fenómeno y que comentamos a continuación.

De las primera puesta en escena, obtuvimos los siguientes tres hechos relevantes y que conciernen al contenido matemático de la misma:

- Rompieron con la idea de que  $2^x$  sólo tiene sentido para cuando  $x$  es un número entero.
- Manipularon el número  $2^{1/2}$ , ya la situación los llevo a considerar ese objeto de manera geométrica al obtener y manipular segmentos de longitud  $2^{1/2}$ .
- Reconocieron la naturaleza creciente de  $2^{1/2}$ .

De esta primera puesta en escena, pudimos darnos cuenta de manera más clara de las dificultades que experimentan los estudiantes para darle significado a la actividad de elevar a exponentes no enteros. Esto nos hizo reafirmar la hipótesis de que la ingeniería diseñada con

el propósito de introducir a los estudiantes al estudio de la función exponencial, se constituía en un importante medio para enfrentar al estudiante al rompimiento de criterios que están fijos con relación a interpretaciones para enteros positivos. Y, que aún, las interpretaciones de la potencias 0, o negativas están lejos de ser estables entre los estudiantes.

De la segunda puesta en escena: En esta nueva experiencia, hay diferencias significativas con la primera puesta. Es nuestra intención señalar cómo el contraste entre las experiencias nos permite ver la aparición de elementos nuevos a considerar, ubicar la relevancia de algunos factores puestos en juego y a diseñar una estrategia que no sólo nos evidencie la aparición de fenómenos, sino que nos permita describirlos y establecer su funcionamiento. Todo esto constituye el ingrediente indispensable para poder considerar el mayor número de componentes que se ponen en juego cuando se repite una ingeniería en nuevos escenarios con el propósito de lograr su reproducibilidad.

Haremos algunos señalamientos comparativos entre las dos puestas en escena.

La incorporación de los elementos externos a la ingeniería, la afinación de métodos para retener los múltiples factores que se ponen en juego en una actividad de clase en el aula; consideramos nos permitirán detectar los fenómenos que se producen, caracterizarlos y

## EL SABER

Puesta 97	Puesta 98
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El trabajo en los equipos fue desequilibrado. Algunos equipos tuvieron un gran avance y otros uno muy modesto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El trabajo en los equipos fue más equilibrado, sin embargo en Oaxaca hubo uno que se alejó mucho de la media, hacia arriba.</li> </ul>

Puesta 97	Puesta 98
<ul style="list-style-type: none"> <li>• En el trabajo con el contenido matemático cumplió con la predicción.</li> <li>• Las discusiones grupales fueron muy ricas en contenido y además muy participativas.</li> <li>• Los alumnos contaron con mucho tiempo para trabajar con la situación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En el trabajo con el contenido matemático cumplió con la predicción</li> <li>• Las discusiones grupales fueron más desequilibradas, en Toluca, fueron más superficiales. En Pachuca mucho más dirigidas por el profesor.</li> <li>• Los tiempos fueron mucho más controlados.</li> </ul>

### EL ESTUDIANTE

Puesta 97	Puesta 98
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fueron estudiantes de distintos semestres de bachillerato, de una misma institución pública</li> <li>• Fueron muy participativos, Había alumnos de probada capacidad para hacer trabajo matemático</li> <li>• Los alumnos más débiles matemáticamente hablando, eran de reciente ingreso a la institución.</li> <li>• Tenían cierta experiencia para trabajar en equipo.</li> <li>• En su mayoría eran alumnos que había mostrado interés en trabajar asuntos matemáticos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los grupos fueron constituidos por alumnos de bachillerato en Toluca (institución particular). Lo mismo en Pachuca (distintas instituciones públicas). En Oaxaca, por alumnos de primer año, de una institución de nivel superior, algunos de ellos con dificultades con las matemáticas (con cierta aversión a las matemáticas).</li> <li>• Algunos equipos fueron muy participativos, pero en otros los estudiantes fueron extraordinariamente tímidos, como en el caso de Oaxaca y Pachuca.</li> <li>• Todos con baja experiencia de trabajo en equipo.</li> <li>• En su mayoría, los alumnos podrían se catalogados como convencionales en su relación con las matemáticas.</li> </ul>

## EL PROFESOR

Puesta 97	Puesta 98
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los profesores como observadores de procesos de aprendizaje de las matemáticas podrían ser catalogados como expertos, y en algunos equipos trabajaron solos. Fueron muy moderados en sus participaciones</li> <li>- Tuvieron libertad para gestionar el tiempo de una forma muy flexible.</li> <li>- Los profesores eran los responsables del diseño.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Los profesores tenían poca experiencia en cuanto a la observación de estudiantes en condiciones experimentales.</li> <li>- Fueron los organizadores de la actividad.</li> <li>- Los profesores, sí eran vistos como tales por los estudiantes.</li> <li>- En algunos casos los profesores fueron muy presionados por los estudiantes para que les hicieran comentarios, o avalaran su trabajo.</li> <li>- En esta ocasión los profesores sí pudieron mostrar sus puntos de vista en relación con sus alumnos, con respecto a la labor docente y muy especialmente en lo referido a su relación con la matemática. En la que el estatus de posesión del saber es ambiguo.</li> <li>- Algunos profesores se mostraron muy interventores en la actividad del alumno, en contraste con el retraimiento de otros.</li> </ul>

describir su funcionamiento, esto nos permitirá construir el modelo reproducibilidad que hemos planteado en nuestro propósito de investigación.

La estrategia de dividir a los grupos en pequeños equipos, de tres o cuatro personas, se ha constituido en una estrategia idónea que nos permite afrontar la complejidad de interacciones que se producen en una clase abierta

a todo el grupo, nos da elementos para observar el desempeño de algunos estudiantes en condiciones de mayor control, pero no excluye la interacción con otros estudiantes, que es un factor primordial a observar cuando se estudia reproducibilidad.

Si bien las costumbres de clase de la mayoría de estudiantes con los que hemos trabajado no son las de trabajar sistemáticamente en

equipos en la clase, someterlos a esta práctica no ha constituido ningún obstáculo para su desempeño.

El análisis de las intervenciones del profesor al interior del equipo cuando éste se encuentra trabajando, es un aspecto de principal importancia y los resultados obtenidos así lo señalan; intervenir con insistencia, permanecer silencioso, dar opiniones así sean insignificantes, produce efectos que deben ser valorados en términos del cumplimiento del efecto didáctico de la situación. Y que abre a la necesidad de analizar las concepciones del profesor en cuanto a su propia actividad.

## DISCUSIÓN

Como hemos mostrado a lo largo del artículo, el estudio de la reproducibilidad ha traído al centro de la escena el papel del profesor, hecho que consideramos de primordial importancia, pues está en consonancia con la los esfuerzos de estudiar y caracterizar la actividad del profesor en la clase de matemáticas.

El diseño de ingenierías con fines de investigación o bien de elaboración de dispositivos didácticos, enfrenta la problemática de poderlos compartir o llevar dichos dispositivos a la escuela, los estudios de reproducibilidad, nos enseñan a no trivializar tal actividad, los diseños pensados por los investigadores, deberán hacer consideraciones basadas en los estudios de reproducibilidad ya que estos nos muestran los múltiples aspectos que hay que tomar en consideración.

En estos momentos podemos decir que llevar un producto didáctico a un espacio distinto

en el que fue diseñado, constituye un acto de intervención a un sistema didáctico que le es ajeno. Intervenir en dicho sistema, exigirá entrar en un proceso de negociación que pone en juego a todo el sistema, y deberá abrir un espacio para la intervención del maestro, ya que éste conoce a sus estudiantes, tiene un determinado nivel de familiaridad con el saber matemático en juego y además sus propios puntos de vista sobre la relevancia del saber y sobre su propia función como profesor.

Una ingeniería didáctica, diseñada con todo cuidado, puede ser totalmente distorsionada por una mala interpretación del profesor que la pone en función con sus alumnos. Negociar con un profesor para adaptar a nuevos estudiantes, conservando el objetivo de la ingeniería, es decir su efecto didáctico, es un reto muy grande y que no sabemos si sea posible realizar a plenitud, nuestra investigación apunta a encontrar elementos capaces de garantizar lo que hemos denominado estabilidad en los resultados, y que al mismo tiempo, deje gran libertad de acción a profesores y estudiantes.

El diagrama siguiente, muestra nuestra concepción de cómo es el modelo de la intervención del sistema didáctico, cuando se lleva una ingeniería a otro sistema, deberá entrarse al espacio que Chevallier denomina noosfera, en donde habrá de desarrollarse una negociación y como resultado de esta se obtendrá, una adaptación pertinente para que la ingeniería pueda vivir en este nuevo sistema. Encontrar cuáles son los elementos básicos a negociar y cuáles las adaptaciones pertinentes, son a nuestro entender el conjunto de factores que componen el fenómeno de reproducibilidad.

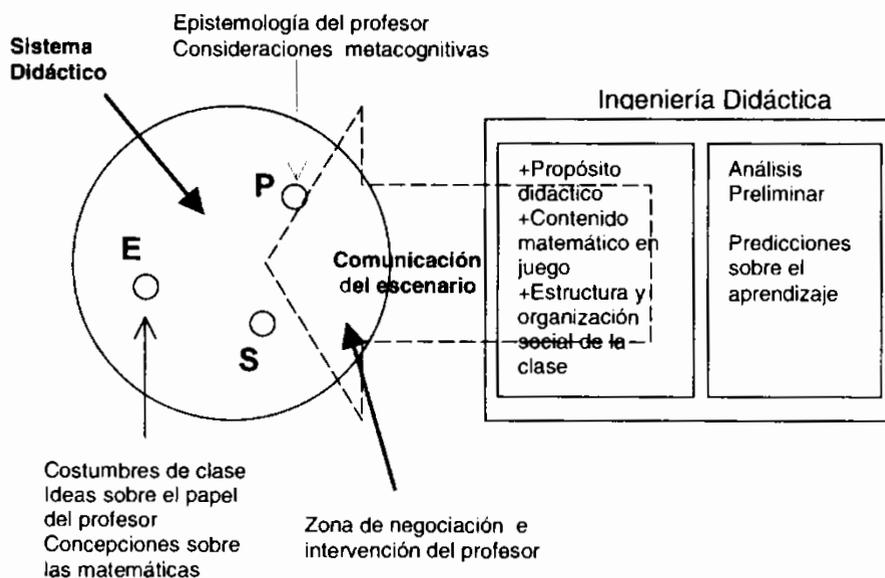


Figura 3

## BIBLIOGRAFÍA

- Aguilar, P.; Farfán R. M.; Lezama, J. & Moreno, J. (1997). Un estudio didáctico de la función 2°. En R. Farfán (Ed.) *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 19-23). México: Grupo Editorial Iberoamérica..
- Arsac, G (1989). Le rôle del professeur- aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble:IMAG-LSD.
- Arsac, G., Balacheff, N. y Mante, M. (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics* 23(5), 29.
- Artigue, M. (1984). *Contributions à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques – Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'état. Université Paris VII.
- Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(1), 5-62.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3( 1), 5-64.
- Artigue, M., Perrin-Glorian, M.J. (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the learning of mathematics* 11(1), 13-18.
- Balacheff, N. (1988). *Étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire*. Thèse de doctorat d'état és-sciences. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En E. Sánchez, y G. Zubieta (Eds.) *Lecturas en didáctica de las matemáticas, Escuela francesa*. DME, Cinvestav-IPN. México. Traducción de: Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115. 1986.
- Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra y I. Saiz, (comps) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 65-94). Argentina: Editorial Paidós.
- Brousseau, G. (1994). *Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques*, ICMI Study 94.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Texte préparé pour la deuxième Ecole d' Eté de Didactique des mathématiques. Orleáns.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Argentina: Aique.
- Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(3), 17-54.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: ICE-Horsori.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques* 18(1), 7-34.
- Grenier, D. (1989). Construction et étude d'un processus d'enseignement de la simétrie orthogonale: éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie de situations. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1), 5-60.

Jodelet, D. (1989). *Les représentations sociales*. (dir.). París: PUF.

Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un <<Résultat>> en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16 (2), 197-220.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Margolinas, C., Perrin-Glorian, M.J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. (Editorial). *Recherches en didactique des mathématiques* 17( 3), 7-16.

Mungny, G (1986). *Psychology sociale du développement cognitive*. Berna: Peter Lang .

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées a partir de l'enscnement des mathématiques dans des classes <<faibles>>.. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13(12), 5-118.

Ruiz, L. (2000). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. *Material de apoyo, del curso: Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje, impartido en REIME XIV*. Panamá.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes du 5ème colloque du groupe Psychology of Mathematics Educations*.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(2,3 ), 133-170.

Los autores:

**Javier Lezama Andalón & Rosa María Farfán Márquez**

Departamento de Matemática Educativa  
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Avda. IPN 2508, San Pedro Zacatenco  
C.P. 07300, México D.F.  
Telefono: 57473800 ext. 6019  
E-mail: rfarfan@mail.cinvestav.mx  
lezama35@prodigy.net.mx

## Anexo

### Diseño de la secuencia

#### Objetivos:

- o Proporcionar un proceso geométrico de construcción de puntos de la gráfica de la función  $2^x$ , así como analizar regularidades propias de la función.
- o Confrontar la concepción espontánea de que  $2^x$  es evaluable sólo cuando  $x$  es entero.

#### Análisis a priori:

- Los estudiantes evaluarán a  $2^x$  ,cuando  $x$  no es entero, asociándola con magnitudes de segmentos rectilíneos.
- Los estudiantes identificarán la naturaleza creciente de la función al comparar los segmentos rectilíneos obtenidos por métodos geométricos.

### Presentación del diseño

El diseño se compone de tres etapas:

#### Primera etapa:

Proporciona los conocimientos geométricos para obtener raíces y productos de segmentos rectilíneos.

#### Estudio de la función $2^x$

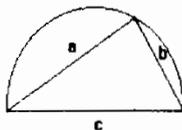
### *1. INTRODUCCIÓN.*

A través de la siguiente secuencia de actividades se pretende familiarizarnos con algunas propiedades y características de la función exponencial  $2^x$ . Para lo cual recurriremos a construcciones geométricas mediante regla y compás así como a la observación de regularidades.

El desarrollo de las actividades deberá ir acompañado de su respectivo reporte, en ésta ocasión prescindiremos del uso de la calculadora a fin de restringirnos al uso de la regla y el compás.

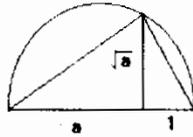
#### COMENZAMOS.

**Actividad 1:** Recuerda que si se inscribe un triángulo en una semicircunferencia y uno de sus lados coincide con el diámetro, como se muestra en la figura



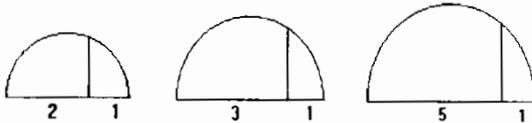
se tiene que el triángulo es rectángulo. Elabora argumentos para convencerte de que dicho triángulo es rectángulo.

**Actividad 2:** Al trazar la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa como se muestra en la figura,



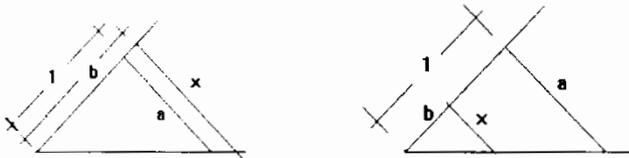
la altura divide a la hipotenusa en dos partes. Si suponemos que una de ellas mide la unidad y la otra una cantidad  $a$ , se obtiene que la altura mide  $\sqrt{a}$ . Convéncete de la veracidad de ésta afirmación.

**Actividad 3:** Utilizando el resultado anterior, construye para cada caso un segmento de magnitud  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  y  $\sqrt{5}$



Asimismo, recuerda que: El producto de dos magnitudes se puede obtener mediante un criterio geométrico, basado en semejanza de triángulos. El cual se desarrolla en la siguiente actividad:

**Actividad 4:** Dados dos números  $a, b > 0$ ; su producto se puede obtener geoméricamente como se muestra en las figuras. siendo  $a$  y  $x$  son segmentos paralelos. Verifica que el producto de  $a$  y  $b$  es el segmento  $x$  en cada caso ( $b > 1$ ,  $b < 1$ ).



**Actividad 5:** Empleando el procedimiento geométrico de semejanza descrito anteriormente, construye para cada caso un segmento de magnitud  $(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3})(\sqrt{5})$ .

### Comentario:

En esta etapa identificamos los siguientes elementos que son relevantes para su desarrollo.

- Las actividades propician el que los estudiantes entren en acción, dibujando las figuras correspondientes.
- Puede haber dificultades con la noción de semicircunferencia y el hecho de inscribir en ella un triángulo.
- El acto de validar que el triángulo es rectángulo puede constituirse en dificultad para algunos estudiantes.
- Pueden algunos estudiantes analizar sólo unos casos particulares y formular generalizaciones

- sin llegar a una justificación.
- En la construcción de segmentos de longitud  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , es posible que empleen distintos segmentos como unidad.
- Puede no recordarse la noción de semejanza y el hecho de que los lados homólogos son proporcionales.
- Es posible que no puedan hacer uso de la semejanza para obtener los productos:  $(\sqrt{2}\sqrt{3})$  y  $(\sqrt{5}\sqrt{3})$ .
- Algunos estudiantes se darán cuenta que el método estudiado no sirve para obtener raíces cúbicas, quintas, etc.
- Como los resultados y técnicas desarrolladas en esta etapa son fundamentales para el desarrollo de la siguiente etapa, es particularmente importante la discusión en grupo de los trabajos de los equipos. Es conveniente que en esta actividad de institucionalización se resuelvan todas las dudas.

### **Segunda Etapa:**

En donde se hace uso de los procedimientos discutidos en la primera etapa para localizar seis puntos en el plano cartesiano correspondientes a la gráfica de la función  $2^x$  restringidos al intervalo  $[0,2]$ .

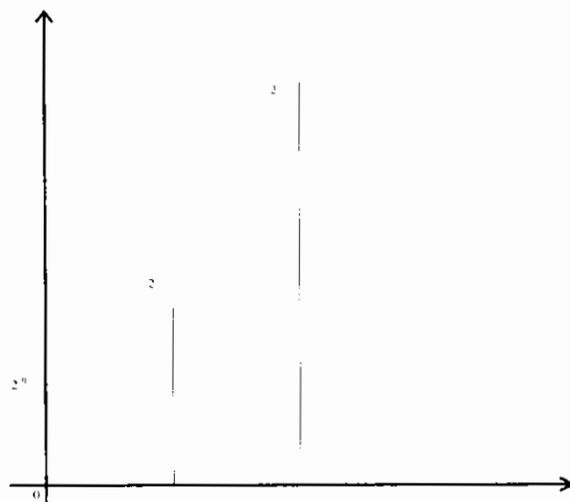
## **II. CONSTRUCCION GEOMETRICA.**

**Actividad 6:** En el dibujo siguiente, se han trazado los segmentos de magnitudes  $2^0$ ,  $2^1$  y  $2^2$ ; que nos sirven para localizar los puntos  $(0, 2^0)$ ,  $(1, 2^1)$  y  $(2, 2^2)$ .

El problema a resolver consiste en localizar los puntos  $(\frac{1}{2}, 2^{\frac{1}{2}})$ ,  $(\frac{1}{4}, 2^{\frac{1}{4}})$ ,  $(\frac{3}{4}, 2^{\frac{3}{4}})$ ,  $(\frac{5}{4}, 2^{\frac{5}{4}})$ ,  $(\frac{3}{2}, 2^{\frac{3}{2}})$  y  $(\frac{7}{4}, 2^{\frac{7}{4}})$ . Para esto, deberás localizar los segmentos de magnitudes  $2^{\frac{1}{4}}$ ,  $2^{\frac{3}{4}}$ ,  $2^{\frac{1}{2}}$ ,  $2^{\frac{5}{4}}$ ,  $2^{\frac{3}{2}}$  y  $2^{\frac{7}{4}}$ ; empleando únicamente procedimientos geométricos.

**Actividad 7:** ¿Es posible localizar el punto  $(\frac{1}{8}, 2^{\frac{1}{8}})$ ? Explica ampliamente.

¿Es posible obtener mas puntos siguiendo este procedimiento? Explica ampliamente.



**Comentarios:**

En esta etapa identificamos los siguientes elementos que son relevantes para su desarrollo.

- Puede haber dificultad para identificar la unidad.
- La construcción de los segmentos solicitado puede hacerse sobre los ejes cartesianos (es lo recomendable), o aparte, pero se corre el riesgo de que modifiquen la unidad en cada trazo.
- Tiene especial dificultad la obtención de los segmentos  $2^3$  y  $2^{5/4}$ , ya que se espera se den cuenta de que hay que descomponer  $3/4$  en  $1/2 + 1/4$  y luego desarrollar el producto de segmentos.
- Puede ser que algunos estudiantes intenten localizar los segmentos al tanteo.
- Algunos estudiantes harán un trazo continuo.
- Algunos estudiantes contestarán a las preguntas con un sí o un no, sin justificación.
- Algunos estudiantes harán explícito el que solamente se pueden obtener segmentos correspondientes a números de la forma  $2^{pq}$ .

**Tercera Etapa:**

En el que por medio de tablas con valores de  $2^x$  se trata de identificar regularidades en cuanto a la estructura del crecimiento de la función.

**III. OBSERVACIÓN DE REGULARIDADES.**

Hasta ahora hemos podido observar, que es posible construir segmentos asociados a la expresión

$2^x$  cuando  $x$  es de la forma  $\frac{p}{2^q}$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros positivos, por ejemplo  $1/8$ ,  $1/2$ ,  $7/4$ ,  $2,41/16$ ,  $3$  etc.. A continuación se dan tablas que contienen potencias de 2.

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5
$x$	$2^x$			
0	$2^0$			
3	$2^3$	$2^3/2^0$	$2^3 \cdot 2^0$	$2^0(2^3-1)$
6	$2^6$	$2^6/2^3$	$2^6 \cdot 2^3$	$2^3(2^3-1)$
9	$2^9$	$2^9/2^6$	$2^9 \cdot 2^6$	$2^6(2^3-1)$
12	$2^{12}$	$2^{12}/2^9$	$2^{12} \cdot 2^9$	$2^9(2^3-1)$

Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5
x	$2^x$			
0	$2^0$			
2	$2^2$			
4	$2^4$			
6	$2^6$			
8	$2^8$			

Col.1	Col. 2	Col.3	Col. 4	Col. 5
x	$2^x$			
0	$2^0$			
1	$2^1$			
2	$2^2$			
3	$2^3$			
4	$2^4$			

Col.1	Col. 2	Col.3	Col. 4	Col. 5
x	$2^x$			
0	$2^0$			
1	$2^1$			
2	$2^2$			
3	$2^3$			
4	$2^4$			

Col.1	Col. 2	Col.3	Col. 4	Col. 5
x	$2^x$			
0	$2^0$			
1	$2^1$			
2	$2^2$			
3	$2^3$			
4	$2^4$			

Observa y discute lo que resulte al efectuar las instrucciones que se presentan a continuación para las tablas anteriores:

**Actividad 8:** En la columna 3 de cada tabla, divide las potencias consecutivas de 2, cuidando que el numerador sea el de mayor potencia.

En la columna 4 de cada tabla, indica las diferencia de potencias consecutivas de 2, tomando como minuendo el número con la potencia mayor.

a) ¿Qué valores se obtienen en la columna 3 para cada tabla?

A los números obtenidos en dichas columnas los denominaremos como factores de crecimiento.

b) Si en una tabla, los valores de x están espaciados  $1/10$  o  $1/8$ . ¿Cuál será el factor de crecimiento en cada caso?

c) ¿Cuál será el factor de crecimiento cuando los valores de x están espaciados una cantidad cualquiera? Explica ampliamente.

d) Describe (factorizando, agrupando, etc.) en la columna 5 lo obtenido en la columna 4 para cada tabla tratando de identificar alguna estructura.

e) Si en una tabla, los valores de x están espaciados  $1/10$  o  $1/8$ . ¿Cuál será la estructura de la columna 5 en cada caso?

f) ¿Cuál será la estructura de la columna 5 en una tabla cuando los valores de x están espaciados una cantidad cualquiera? Explica ampliamente.

g) Las regularidades que se han observado para la expresión  $2^x$ , ¿se observarán en otras expresiones distintas? Explica ampliamente.

**Actividad 9:** Con base a todo el análisis anterior, ¿es posible graficar la curva correspondiente a  $2^x$ ? Explica ampliamente.

**Comentarios:**

- Se espera que los estudiantes identifiquen los distintos incrementos de la variable  $x$  y lo relacionen con la manera en que esta creciendo la función.
- Se espera que los estudiantes identifiquen la progresión aritmética y la progresión geométrica.
- Se espera que los estudiantes identifiquen el carácter creciente de la función.
- Se espera que se identifiquen los problemas de intentar trazar en forma continua la función  $2^x$ .
- Se espera puedan abrir la discusión en el caso de cambiar la base 2 a otra cualquiera " $a$ ", analizando los posibles valores de " $a$ ".