

USO DE UM ARTEFATO COMPUTACIONAL PARA EXPLORAR A COVARIÇÃO: UM ESTUDO DAS GÊNESES INSTRUMENTAIS DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

USING A COMPUTATIONAL ARTIFACT TO EXPLORE COVARIATION:
A STUDY OF THE INSTRUMENTAL GENESIS OF MATHEMATICS GRADUATES

RESUMEN

En este artículo se presentan resultados destacados de un estudio que investigó los efectos del uso de un artefacto computacional en el razonamiento covariacional de los estudiantes y su relación con la transposición informática del concepto de covariación en dicho artefacto. La metodología consistió en un estudio de casos múltiples de la génesis instrumental de profesores de matemáticas en formación en situaciones de covariación con GeoGebra. El uso instrumentado de herramientas para apoyar la cuantificación de la variación articuladas dinámicamente con representaciones de funciones contribuyó a una interpretación covariacional del gráfico y a la coordinación de la covariación continua. Por otro lado, las restricciones estuvieron relacionadas con la representación de la variación con segmentos dinámicos en situaciones de variación negativa y con la influencia de esquemas basados en una visión de función como correspondencia y una visión estática del gráfico.

PALABRAS CLAVE:

- *Educación matemática*
- *Tecnología educativa*
- *Razonamiento covariacional*
- *Génesis instrumental*
- *Transposición informática*

ABSTRACT

This article presents highlighted results of a study that investigated the effects of using a computational artifact on students' covariational reasoning and its relationship with the informatics transposition of the concept of covariation in this artifact. The methodology consisted of a multiple case study of the instrumental genesis of pre-service mathematics teachers who explored situations involving covariation with GeoGebra. The instrumented use of tools that support the quantification of variation dynamically connected with the function

KEY WORDS:

- *Mathematics education*
- *Educational technology*
- *Covariational reasoning*
- *Instrumental genesis*
- *Informatics transposition*



representations contributed to a covariational interpretation of the graph and the coordination of continuous covariation. On the other hand, restrictions were related to the representation of variation by dynamic segments in situations of negative variation and the influence of schemes based on a view of function as correspondence and on a static view of the graph.

RESUMO

Este artigo apresenta resultados destacados de um estudo que investigou os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional de estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato. A metodologia consistiu em um estudo de casos múltiplos das gêneses instrumentais de licenciandos em Matemática em situações de covariação com o GeoGebra. O uso instrumentado de ferramentas de suporte à quantificação da variação articuladas de forma dinâmica com as representações da função contribuiu para uma interpretação covariacional do gráfico e para a coordenação da covariação contínua. Por outro lado, restrições foram relacionadas à representação da variação com segmentos dinâmicos nas situações de variação negativa e à influência de esquemas baseados em uma visão de função como correspondência e em uma visão estática do gráfico.

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação matemática*
- *Tecnologia educacional*
- *Raciocínio covariacional*
- *Gênese instrumental*
- *Transposição informática*

RÉSUMÉ

Cet article présente les résultats mis en évidence d'une étude qui a examiné les effets de l'utilisation d'un artefact informatique sur le raisonnement covariationnel des étudiants et sa relation avec la transposition informatique du concept de covariation dans cet artefact. La méthodologie consistait en une étude de cas multiples sur la genèse instrumentale des enseignants de mathématiques en formation initiale en situation de covariation avec GeoGebra. L'utilisation instrumentée d'outils d'aide à la quantification de la variation articulée dynamiquement avec des représentations de la fonction a contribué à une interprétation covariationnelle du graphique et à la coordination de la covariation continue. D'autre part, des restrictions ont été liées à la représentation de la variation par segments dynamiques dans des situations de variation négative et à l'influence de schémas basés sur une vision de la fonction comme correspondance et sur une vision statique du graphique.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement des mathématiques*
- *Technologie éducative*
- *Raisonnement covariationnel*
- *Genèse instrumentale*
- *Transposition informatique*

1. INTRODUÇÃO

No contexto do estudo das funções, a abordagem covariacional refere-se a como as variáveis da função variam uma em relação à outra. Esta visão está intimamente ligada ao desenvolvimento histórico da ideia de função como o estudo das relações entre duas grandezas variáveis (Malik, 1980).

Apesar do enfraquecimento do aspecto da covariância na definição formal atual de função, essa forma de conceber relações funcionais permanece necessária para conceitualizações importantes como limites, derivadas e continuidade (Carlson et al, 2002; Thompson & Carlson, 2017). Além disso, pensar em termos de como a variação em uma variável afeta a variação na outra variável é central para a caracterização covariacional de tipos de funções como a linear e a quadrática (Lima et al., 2005), a exponencial (Confrey & Smith, 1994), entre outras.

No entanto, estudos como os de Moore (2014), Carlson et al. (2002) e Ellis et al. (2016) mostraram que o raciocínio covariacional não é trivial para os estudantes, especialmente quando são requisitados a descrever o comportamento da variação e da taxa de variação a partir do gráfico da função e dos aspectos envolvidos na sua forma. Em Moore (2014), os estudantes inicialmente interpretaram o gráfico apenas com base na sua forma e nos movimentos físicos envolvidos no fenômeno modelado, desconsiderando a forma como as variáveis variavam; já os estudos de Lagrange (2014) e Ellis et al. (2016) mostraram exemplos de estudantes que não conseguiam relacionar a variação em uma variável à variação na outra variável, nem quantificar a forma como tal variação ocorria.

Diante dessas dificuldades e da importância da abordagem covariacional, Thompson e Carlson (2017) reuniram contribuições teóricas e construíram um quadro de referência que estrutura o raciocínio covariacional em diferentes níveis, desde aqueles nos quais o indivíduo revela pouca ou nenhuma coordenação de como uma variável varia em função da outra, até os níveis mais sofisticados, nos quais o indivíduo sustenta uma imagem das variações no valor de uma variável ocorrendo simultaneamente às variações no valor da outra variável.

Conforme o desenvolvimento do raciocínio covariacional tornou-se objeto de investigações, o uso de tecnologias digitais como suporte a este raciocínio começou a ser empregado em alguns estudos. Ellis et al. (2016), Zengin (2018) e Lagrange e Psycharis (2014) apontaram contribuições da representação e manipulação dinâmica de variáveis para o raciocínio covariacional; já os estudos de Johnson e McClintock (2018), Aranda e Callejo (2017), Ellis et al. (2016) e Lagrange (2014) destacaram o papel da conexão entre representações de função para representar a variação em múltiplas representações simultaneamente.

Contudo, resultados de uma investigação preliminar revelaram que o papel que o uso de tecnologias exerceu no raciocínio covariacional dos estudantes não foi analisado de um ponto de vista central pela maioria das pesquisas analisadas (Silva & Gitirana, 2023). Defendemos que o uso de tecnologias digitais não tem um papel neutro no desenvolvimento conceitual (Trouche, 2005; Artigue, 2002) e que é necessária uma análise mais profunda de como se dá este papel.

Para entender como se dá uma parte dessa influência, alguns aspectos importantes a serem considerados são: (i) a forma como os objetos matemáticos são representados no meio computacional; (ii) as escolhas das características constitutivas na concepção e na programação dos dispositivos; e (iii) as formas de interação com o usuário na interface dos dispositivos, o que abrange a ideia de Transposição Informática (Balacheff, 1993). No caso da abordagem covariacional de funções essa transposição envolve, além do dinamismo e da conexão entre representações, as possibilidades e as ferramentas implementadas para dar suporte à coordenação e à quantificação da forma como as variáveis variam.

Além disso, a forma como o uso das tecnologias digitais influencia no desenvolvimento conceitual está ligada ao processo de apropriação dessas tecnologias e ao desenvolvimento de esquemas pelos indivíduos ao explorá-las para aprender, o que envolve a gênese instrumental (Rabardel, 1995). Dessa forma, a Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995) configura-se como uma lente apropriada para compreender de que forma o uso de tecnologias digitais pode influenciar o desenvolvimento conceitual, neste caso, o raciocínio covariacional de estudantes.

Diante disso, este artigo descreve resultados destacados de um estudo da gênese instrumental de três licenciandos em Matemática com o *software* GeoGebra para explorar situações de covariação (Silva, 2022). A pesquisa teve como objetivo “*investigar os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato*” (Silva, 2022, p. 20).

O estudo envolveu um experimento de ensino no qual os licenciandos exploraram materiais desenvolvidos no *software* GeoGebra para: (i) descrever a covariação entre as variáveis de funções e descrever a taxa de variação; (ii) esboçar gráficos para representar a covariação entre as variáveis; (iii) descrever relações entre os modelos algébricos de funções e a covariação entre as suas variáveis; e (iv) interpretar aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo e mínimo e pontos de inflexão por uma visão covariacional.

Dois questões direcionaram a investigação:

- “*De que forma o uso de um artefato computacional para explorar a covariação em relações funcionais influencia o raciocínio covariacional dos estudantes?*” (Silva, 2022, p. 20)

- “*Como os efeitos do uso do artefato podem ser relacionados aos aspectos da transposição informática da covariação nesse artefato?*” (Silva, 2022, p. 20)

2. QUADROS TEÓRICOS

Nosso estudo foi embasado no construto teórico do Raciocínio Covariacional, na noção de transposição informática, na Abordagem Instrumental, da qual tomamos o conceito de Gênese Instrumental, que tem por base a noção de esquema. Esses são os quatro pilares que suportaram teoricamente nossa investigação.

2.1. *Abordagem Covariacional de funções e aspectos do Raciocínio Covariacional*

Thompson e Carlson (2017) sistematizaram o construto teórico do Raciocínio Covariacional a partir dos trabalhos sobre covariação de Thompson (1994), Confrey e Smith (1994), entre outras contribuições.

Confrey e Smith (1994) distinguiram duas formas de conceitualizar funções: correspondência e covariação; a primeira enfatiza a associação de um valor x a um único valor y por meio de uma regra, já a covariação implica “poder mover operacionalmente de y_m para y_{m+1} coordenando com o movimento de x_m para x_{m+1} ” (Confrey & Smith, 1994, p. 33, tradução nossa).

Na construção teórica de Thompson (1994) a ideia de covariação tornou-se necessária para explicar o raciocínio de estudantes que em uma situação conceitual imaginaram quantidades como tendo valores que variavam. Assim, nessa construção uma pessoa raciocina covariacionalmente quando “imagina os valores de duas quantidades variando e os imagina variando simultaneamente” (Thompson & Carlson, 2017, p.425, tradução nossa).

Carlson et al. (2002) desenvolveram um quadro que estruturou níveis e ações mentais envolvidas no raciocínio covariacional, que envolvem desde o nível mais simples da coordenação da variação em uma variável com a variação na outra, depois os níveis de coordenação da direção e da quantidade da variação e, por fim, os níveis de coordenação da taxa média e da taxa instantânea de variação conforme se consideram incrementos uniformes na variável de entrada. Tal estrutura aponta para a ideia de um raciocínio covariacional mais ‘refinado’ conforme se raciocina em um nível mais alto, isto é, em termos de coordenar a taxa de variação com incrementos cada vez menores nas variáveis.

Já Castillo-Garsow (2012) distinguiu as formas pelas quais a variação pode ser concebida por alguém. Segundo ele, uma pessoa pode conceber um valor

variando discretamente ou continuamente; além disso, a concepção de uma variação contínua pode ser suave ou segmentada. Na variação contínua suave tem-se uma ideia de uma ‘variação em progresso’ dos valores, já na variação contínua segmentada, apesar de uma ideia de continuidade, imagina-se que os valores variam por ‘segmentos’ ou pedaços.

Thompson e Carlson (2017) revisitaram a estrutura desenvolvida por Carlson et al. (2002) para criar um novo quadro que estrutura o raciocínio covariacional em termos de seis níveis: (i) sem coordenação – quando não há uma imagem das variáveis variando juntas; (ii) pré-coordenação – quando há uma imagem de uma variação assíncrona das variáveis; (iii) coordenação ‘grosseira’ – quando há uma imagem de variação conjunta das variáveis, mas com um vínculo frágil entre os seus valores individuais; (iv) coordenação de valores – quando há uma coordenação dos valores de uma variável com os valores da outra variável, com a imagem de uma coleção de pares (x, y) desses valores; (v) covariação contínua segmentada – quando há a visualização de uma variação simultânea em uma variável conforme a outra variável varia, porém tal visualização é segmentada; (vi) covariação contínua suave – quando há a visualização, de forma contínua e suave, da variação em uma variável conforme a outra variável varia.

Para Thompson e Carlson (2017), raciocinar sobre funções covariacionalmente contribui para que se pense no gráfico como representação da covariação entre as variáveis e menos como uma forma, como definiram Moore e Thompson (2015):

O pensamento da forma estática significa fazer inferências sobre o comportamento de uma função estritamente por ter construído associações entre as formas dos gráficos e as propriedades da função. O pensamento da forma emergente é interpretar um gráfico como um traço emergente de variáveis que covariaram. (Thompson & Carlson, 2017, p. 445, tradução nossa)

No contexto das dificuldades dos estudantes, Moore (2014) e Carlson et al. (2002) apontaram dificuldades dos estudantes em interpretar a covariação entre as variáveis a partir do gráfico da função; no primeiro, os estudantes interpretaram o gráfico com base na forma e em movimentos físicos, sem levar em conta a forma como as variáveis variaram; ambos os estudos destacaram a dificuldade em interpretar o comportamento da taxa de variação a partir do gráfico da função.

Já os estudos de Lagrange (2014) e Ellis et al. (2016) apontaram exemplos nos quais estudantes visualizaram a variação, mas não conseguiram quantificar a forma como ela ocorria. No estudo de Johnson e McClintock (2018), os estudantes foram envolvidos em situações de variação variável, ou seja, da mudança no valor no qual uma variável aumenta ou diminui; os autores concluíram que a quantificação da variação pelos estudantes foi fundamental para os estudantes discernirem esse tipo de variação nessas situações.

No presente estudo, o quadro teórico do raciocínio covariacional foi tomado como uma referência para analisar como o uso do artefato computacional contribuiu no raciocínio covariacional dos estudantes. Entretanto, a forma como foi analisado não enfatiza uma abordagem da mera classificação hierárquica e sequencial dos níveis de Thompson e Carlson (2017), mas buscou identificar nos estudantes formas mais sofisticadas de raciocinar covariacionalmente com o suporte da tecnologia, isto é, como o uso do artefato contribuiu para eles progredirem de formas menos sofisticadas (pré-coordenação ou coordenação grosseira, por exemplo) para formas mais sofisticadas (coordenação da covarição contínua, por exemplo).

2.2. *Transposição Informática*

A transposição informática envolve as transformações que os saberes passam no processo de representação em um meio computacional. Balacheff (1994) define-a como:

Falarei de transposição informática (...) para designar este trabalho sobre o conhecimento que permite uma representação simbólica e a implementação desta representação por um dispositivo informático, quer se trate então de “mostrar” o conhecimento ou de “manipulá-lo”. (p.14, tradução nossa).

Tal processo envolve aspectos de três espaços dos dispositivos informáticos: o (i) universo interno, que integra as linguagens de programação e os componentes internos, (ii) a interface, que faz a mediação entre o dispositivo e o usuário e (iii) o universo externo, que envolve os elementos externos integrados ao dispositivo. Balacheff chama a atenção para a transposição para o universo interno, que envolve formas de representação em termos de linguagem de programação, e para a interface, que resulta em restrições e possibilidades sobre como objetos serão visualizados e manipulados na tela.

Tais restrições podem resultar em fenômenos com características determinantes sobre como conceitos serão construídos pelos usuários. Por exemplo, no processo de geração do gráfico de funções, a representação aproximada de números reais e a técnica de discretização podem gerar efeitos visuais incongruentes com os objetos matemáticos (Balacheff, 1993, p. 368).

Um dos fenômenos que podem surgir na transposição informática diz respeito às aparentes contradições, na interface, entre a matemática e a representação computacional do objeto matemático. Giraldo et al. (2002) descreveram esse fenômeno como um conflito teórico-computacional, que está intimamente ligado com a restrição imposta à representação matemática pelos algoritmos computacionais.

A Figura 1 ilustra um potencial conflito ao nível da interface (limitação da janela de visualização do gráfico) no gráfico de $f(x)=1/x$. Conforme varia-se um ponto dinâmico associado à variável em x e observa-se o comportamento de um ponto associado à variável em y , que some na área inferior do gráfico e logo reaparece no topo, pode ser gerada a impressão de uma conexão entre valores de y que tendem a $-\infty$ e a $+\infty$, sem uma quebra da continuidade em $x = 0$.

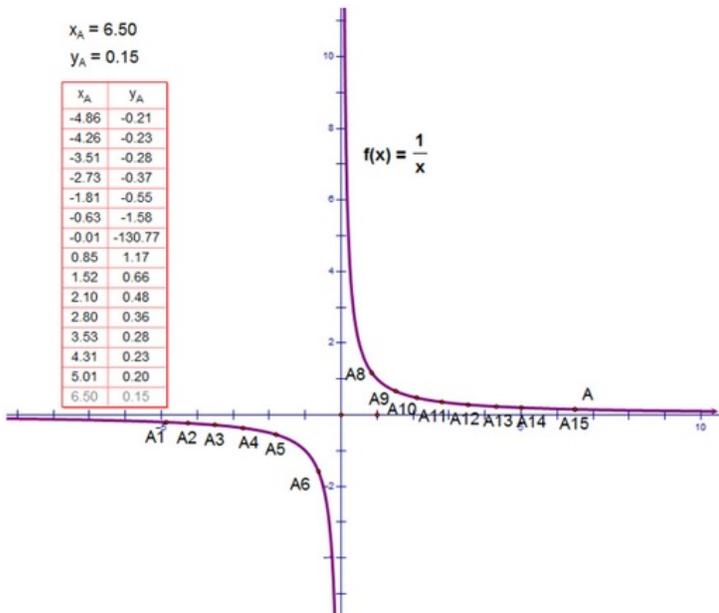


Figura 1. Conflito teórico computacional na função $f(x) = 1/x$
Nota: Adaptado de Ndlovu et al. (2011, p.9)

De uma forma mais geral, aspectos da transposição informática que podem impactar a forma como tecnologias são exploradas podem envolver ainda: a sintaxe, a semântica envolvida na representação dos objetos; as diferentes formas de representar e operar objetos na interface; as diferentes escolhas de *design*; as possibilidades de ação, restrições e os seus efeitos.

2.2.1. Alguns aspectos da transposição informática da covariação

No contexto da covariação, aspectos da transposição informática podem envolver a questão de como as representações de função e das variáveis são implementadas, bem como as formas de permitir coordenar e quantificar a maneira como as variáveis variam. Um dos meios nos quais a representação computacional de variáveis tem se apoiado é a geometria dinâmica, que permite o dinamismo das variáveis

(Figura 2). No contexto das funções, o aspecto da variação dinâmica está ligado às possibilidades computacionais de representação e manipulação de objetos que representam ou estão relacionados às variáveis, por meio de ações como deslizar, arrastar na tela, entre outras ações que permitem uma animação desses objetos.

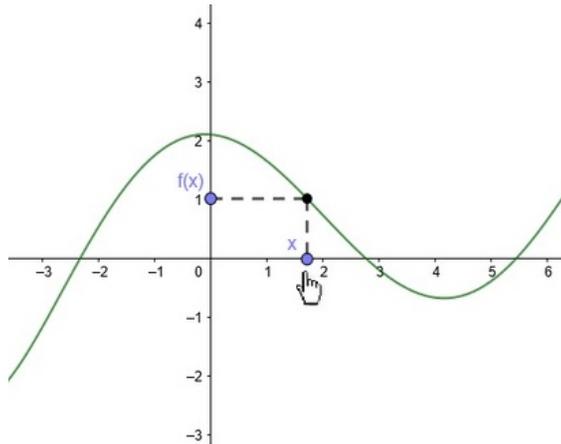


Figura 2. Manipulação de um ponto associado à variável

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 58)

Além disso, o meio computacional permite explorar a covariação por meio de diferentes representações de função conectadas. Como exemplo, Lagrange (2014), Lagrange e Psycharis (2014) e Ellis et al. (2016) destacaram o suporte de aspectos computacionais como a variação dinâmica e a conexão simultânea entre diferentes representações. Por outro lado, a infraestrutura da geometria dinâmica também traz restrições, como a possibilidade de associação entre objetos de naturezas distintas e das suas propriedades, podendo gerar equívocos, como o da associação do valor da variação Δy entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ com a distância entre os pontos que representam $f(x_1)$ e $f(x_2)$, a qual não assume valores negativos. Um conflito pode surgir com o conceito de variável ao deslizar o ponto associado à variável e construir uma ideia de um objeto único que se move no eixo em vez de um objeto representativo de um conjunto de valores; outro conflito da mesma natureza com a representação de retas e segmentos secantes e tangentes comuns na representação da taxa de variação (Zengin, 2018; Ndlovu et al., 2011).

No contexto numérico, a natureza finita dos algoritmos computacionais (Giraldo et al., 2002) tem efeito nas limitações da interface, por exemplo, na exibição do valor da variação entre valores próximos o suficiente, pode ser exibido o valor zero como resultado caso o número de dígitos não seja configurado adequadamente (Figura 3); este conflito pode ser comum ao abordar a variação infinitesimal, na qual é importante a aproximação cada vez maior entre valores.

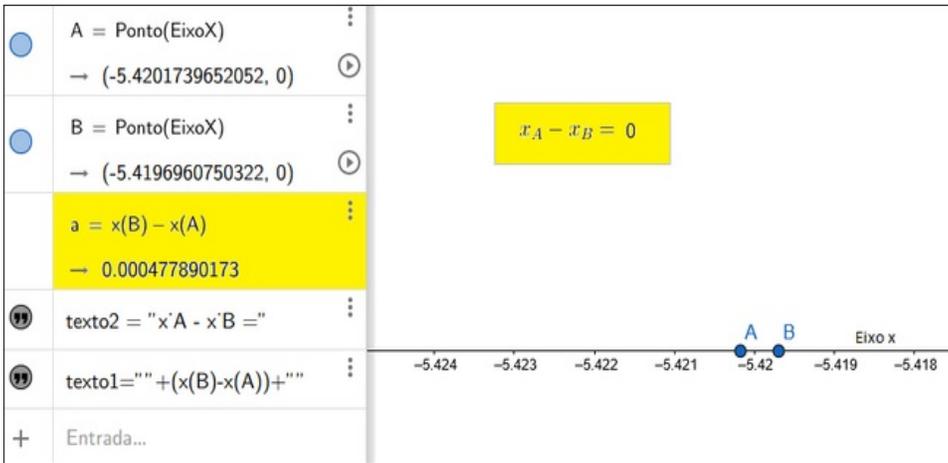


Figura 3. Inconsistência no valor da variação pela limitação de dígitos

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 66)

Neste estudo, o papel dos aspectos da transposição informática foi analisado em termos de como todas as características constitutivas e estruturadoras colocadas até aqui tiveram efeito no uso do GeoGebra pelos estudantes e, conseqüentemente no seu raciocínio covariacional. Com relação aos espaços envolvidos na transposição informática, delimitamos a nossa análise no espaço da interface, visto que é nela que se concentram os aspectos interativos entre o dispositivo e o seu usuário.

Entender como os aspectos envolvidos na transposição informática podem estruturar a atividade é uma das problemáticas da Abordagem Instrumental e do conceito de gênese instrumental, visto a seguir.

2.3. Gênese Instrumental

A gênese instrumental é um conceito definido por Rabardel (1995) na sua Abordagem Instrumental e diz respeito aos processos pelos quais um indivíduo constrói progressivamente um instrumento ao usar um artefato para realizar uma atividade. Essa construção é marcada pela evolução dos esquemas de utilização do artefato, isto é, a evolução dos elementos que organizam a forma como o sujeito usa o artefato para determinado fim em uma atividade.

Assim, no sentido de Rabardel, o instrumento é uma entidade mista, composta pelo artefato (ou uma parte deste) e por esquemas de utilização do artefato, que podem ser direcionados para a gestão das propriedades do artefato (esquemas de uso) ou para o objeto da atividade (esquemas de ação instrumentada). A gênese instrumental envolve, dessa forma, dois processos direcionados ao sujeito (instrumentação) e ao artefato (instrumentalização):

Os *processos de instrumentalização* dizem respeito ao surgimento e evolução dos componentes artefactuais do instrumento: seleção, agrupamento, produção e instituição de funções, desvios e catacreses, atribuição de propriedade, transformação do artefato (estrutura, funcionamento etc.) que prolongam as criações e realizações de artefatos cujos limites são, portanto, difíceis de determinar;

Os *processos de instrumentação* estão relacionados ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por meio da acomodação, coordenação, combinação, inclusão e assimilações recíprocas, a assimilação de novos artefatos para esquemas já constituídos etc. (Rabardel, 1995, p.111, tradução nossa)

Assim, segundo Rabardel, enquanto a instrumentalização envolve um enriquecimento das propriedades do artefato pelo sujeito, a instrumentação envolve o desenvolvimento de novos esquemas para o uso do artefato. A gênese instrumental também leva a uma estruturação das ações mediadas pelo instrumento. Rabardel insere essa estruturação a partir de duas fontes: das restrições próprias dos artefatos e das possibilidades de ação permitidas pelos artefatos.

Neste estudo, essas fontes de estruturação se relacionam bastante com a transposição informática e são esses aspectos que enfatizamos na análise e discussão dos dados, em termos de como eles influenciaram o uso instrumentado do GeoGebra e o desenvolvimento do raciocínio covariacional dos estudantes.

2.3.1. *A noção de 'esquema' de Vergnaud na Abordagem Instrumental*

Embora Rabardel apresente a noção de esquemas de utilização a partir de uma definição mais abrangente de esquemas, a conceitualização de esquemas de Vergnaud é destacada na sua construção da Abordagem Instrumental.

Vergnaud (2009) define o esquema como “a organização invariante da atividade para uma classe de situações” (Vergnaud, 2009, p. 88, tradução nossa). Os esquemas também podem se adaptar a novas situações, o que caracteriza o desenvolvimento do conhecimento. A estrutura analítica que integra a noção de esquema de Vergnaud envolve aspectos intencionais, gerativos, epistêmicos e computacionais:

- O aspecto intencional dos esquemas envolve um objetivo ou vários objetivos que podem ser desenvolvidos em subobjetivos e antecipações.
- O aspecto gerativo dos esquemas envolve regras para gerar atividade, ou seja, as sequências de ações, coleta de informações e controles.
- O aspecto epistêmico dos esquemas envolve invariantes operacionais, a saber conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Sua principal função é pegar e selecionar as informações relevantes e inferir os objetivos e regras.

- O aspecto computacional envolve possibilidades de inferência. Eles são essenciais para entender que o pensamento é composto de uma intensa atividade de computação, mesmo em situações aparentemente simples; ainda mais em novas situações. Precisamos gerar objetivos, subobjetivos e regras e, também, propriedades e relações que não são observáveis (Vergnaud, 2009, p. 88, tradução nossa).

Destacam-se, nesta definição, tanto o aspecto gerativo dos esquemas, cujas regras contribuem para organizar a atividade instrumentada, quanto o seu aspecto epistêmico, cujos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação revelam tanto o conhecimento que fundamenta quanto o conhecimento resultante da atividade instrumentada. Para Rabardel (1995), a noção de esquema de Vergnaud permite “definir as características das situações realmente levadas em conta pelo sujeito, sejam elas situações familiares, para as quais já estão constituídos invariantes operacionais, ou situações em que sua elaboração está em andamento” (Rabardel, 1995, p.88, tradução nossa).

A noção de esquema de Vergnaud foi tomada neste estudo por fornecer uma estrutura analítica que permite relacionar os aspectos intencionais e gerativos envolvidos nas regras, objetivos e ações que os compõem com o conhecimento subjacente à ação instrumentada sobre o artefato. Assim, ao estruturar as ações e as interações dos estudantes com o GeoGebra por meio dos seus esquemas inferidos, buscamos identificar nesses esquemas o raciocínio covariacional subjacente a essas ações, complementando assim o raciocínio covariacional inferido mais diretamente, a partir das falas e respostas dos estudantes.

Dessa forma, esta definição analítica dos esquemas permitiu uma análise voltada não apenas para o conhecimento, mas voltada também para integrar os aspectos da gênese instrumental à estruturação da ação realizada pela transposição informática no GeoGebra, por relacionar o seu uso instrumentado com as possibilidades e restrições impostas pelas características dos materiais desenvolvidos no *software*.

3. METODOLOGIA

A metodologia do estudo consistiu em um estudo de casos múltiplos (Yin, 2015) das respectivas gêneses instrumentais de três licenciandos em Matemática. O estudo de caso é uma abordagem metodológica que “investiga um fenômeno contemporâneo (o caso) em profundidade e em seu contexto de mundo real” (Yin, 2015, p.17) e pode aplicar-se tanto a um caso apenas como a múltiplos casos, nos quais as particularidades e as especificidades de cada caso são enfatizadas. Assim, consideramos cada caso como sendo o de cada licenciando na sua gênese instrumental com o GeoGebra ao explorar situações de covariação.

Definimos a escolha pelo método do estudo de caso pela necessidade de uma análise em profundidade de um fenômeno (gênese instrumental) que se desenvolveu de forma particular em cada indivíduo (caso) em interação com um artefato e o contexto no qual o caso se desenvolveu. Tal contexto consistiu em um experimento de ensino realizado por meio de um curso de extensão no qual cada indivíduo desenvolveu sua gênese instrumental com o uso do GeoGebra.

Os dados do estudo de caso foram produzidos por meio da aplicação de um questionário, de um experimento com seis sessões de ensino e de uma entrevista baseada em tarefas (Clement, 2000; Goldin, 2000), um modelo de entrevista no qual os entrevistados respondem às questões formuladas enquanto resolvem tarefas propostas pelo entrevistador. Além das respostas aos questionários e às entrevistas, os dados produzidos foram: registros do vídeo da tela e do áudio dos estudantes durante o uso do GeoGebra, respostas escritas e imagens produzidas em fichas *online*, interações orais e por meio de *chat*, bem como as anotações do pesquisador.

A produção dos dados em cada uma das etapas do estudo visou o acompanhamento do desenvolvimento da gênese instrumental dos estudantes com o uso do *software* GeoGebra e de como o raciocínio covariacional dos estudantes foi mobilizado com o suporte do *software*. A análise dos dados foi baseada na Análise Microgenética (Meira, 1994), por ser uma técnica que se aplica à análise detalhada de processos interativos da atividade e do seu potencial para analisar dados em vídeo, um dos principais tipos de dados produzidos no estudo. Neste processo de análise, foi observado como os esquemas mobilizados pelos estudantes revelaram o raciocínio covariacional subjacente e como as possibilidades e as restrições no uso do GeoGebra permitiram relações com a mobilização de tal raciocínio.

O contexto de ensino e aprendizagem no qual o estudo se inseriu trouxe especificidades como a necessidade de um planejamento didático e de instrumentos e técnicas metodológicas adequadas a esse contexto, o que levou ao uso metodológico do modelo de orquestração instrumental (Trouche, 2005) para estruturar o experimento de ensino, bem como as adaptações deste modelo ao ensino remoto (Gitirana & Lucena, 2021), considerando-se o contexto de pandemia da COVID-19 no qual se desenvolveu o estudo.

São descritos a seguir alguns aspectos desse contexto, dos participantes, dos materiais no GeoGebra e da produção e análise dos dados.

3.1. *Contexto*

O estudo de caso foi realizado no contexto de um curso de extensão oferecido a estudantes da Licenciatura em Matemática de duas instituições federais de ensino superior. Os inscritos no curso foram previamente informados de que poderiam

ser voluntários da pesquisa desenvolvida ao decorrer do curso. Oito licenciandos participaram do curso, que foi realizado de forma *online* por meio de uma plataforma de videoconferência. Os autores deste artigo atuaram como mediador e coordenador do curso, respectivamente. Além disso, três licenciandos em Matemática deram apoio ao mediador como monitores voluntários. Dos oito estudantes que participaram do curso, três tornaram-se sujeitos do estudo de casos múltiplos.

As adaptações decorrentes da pandemia da COVID-19 também influenciaram na estruturação do estudo (sobretudo do experimento de ensino) e da produção dos dados. Tal contexto levou à realização do curso de forma remota, por meio de uma plataforma de videoconferência e do suporte de diversos artefatos tecnológicos *online*.

3.2. *Perfil dos participantes*

A escolha por licenciandos em Matemática como participantes do estudo se deu por fatores como: (i) a relevância do objeto matemático para a formação matemática; (ii) a proximidade da pesquisa em Educação com a licenciatura; e (iii) o caráter formativo de um estudo que envolve o uso de tecnologias na aprendizagem da matemática, o que pode contribuir na formação docente dos participantes. Os sujeitos do estudo de caso foram selecionados de um total de oito participantes do curso de extensão dentro do qual o estudo foi realizado. Para a seleção, foi considerado o critério de participação nas atividades propostas durante o curso, visando uma produção de dados satisfatória.

Foram atribuídos nomes fictícios aos participantes: Eric, Alice e Louise. Eles estavam entre o quinto e o último período da Licenciatura em Matemática, o que significa que eles tinham experiência prévia com ideias do Cálculo. Já a sua experiência com o *software* GeoGebra para explorar funções foi apontada por meio de um questionário aplicado antes do curso; Eric e Alice informaram ter um domínio intermediário do GeoGebra para explorar funções, já Louise informou dominar pouco o software para explorar funções.

3.3. *Concepção e implementação dos materiais no software GeoGebra*

A concepção e a implementação dos materiais de suporte às situações no GeoGebra foram baseadas na representação dinâmica da variação, na conexão entre as variáveis em x e em y e na articulação dinâmica e simultânea entre representações, como o modelo algébrico, o gráfico e a planilha. Também se apoiou em ferramentas de suporte à quantificação da variação em y conforme x aumenta por acréscimos constantes. Essas características foram baseadas no objetivo de dar suporte à interpretação covariacional da função (sobretudo do gráfico), em termos de como a variável em y varia em função da variável em x .

A primeira situação, adaptada de Thompson, et al. (2017), foi baseada em uma representação dinâmica de funções por pontos e segmentos variáveis, nos quais o valor da variável x foi associado a um segmento no eixo x e o valor da variável y foi associado a um segmento no eixo y (Figura 4).

O material desenhado para esta situação configurou-se em duas janelas de visualização, cada uma com um sistema de coordenadas, a primeira janela incluiu cinco caixas de marcação, cada uma representando um tipo de função; ao marcar uma caixa específica, os estudantes deveriam deslizar o ponto no eixo x , observar e descrever o comportamento do ponto que representa a variável no eixo y e descrever como se dá a covariação e, em seguida, na segunda janela de visualização, esboçar o gráfico que representa a covariação entre x e y .

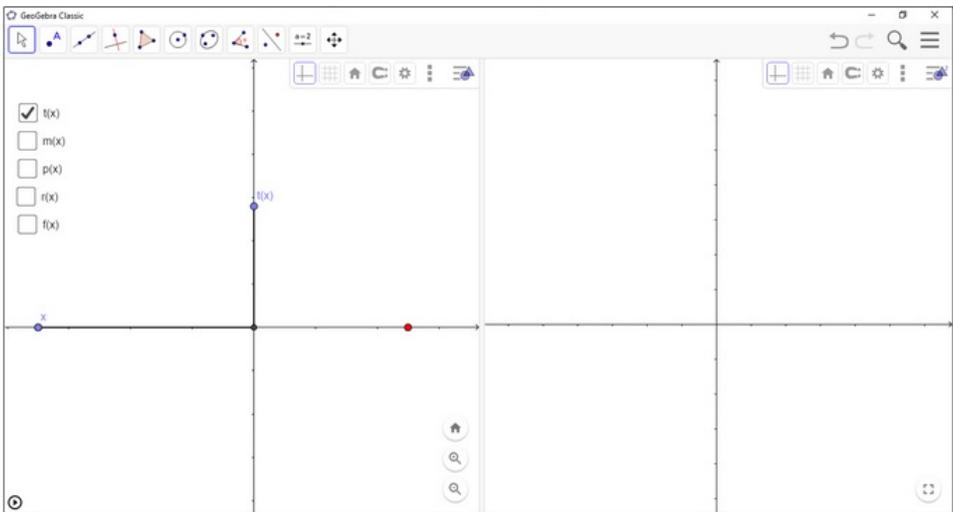


Figura 4. Material da situação 1
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 106)

A segunda situação foi baseada na representação dinâmica das variações Δx e Δy articuladas ao gráfico de uma função para explorar a variação de Δy em função de Δx e x , bem como a relação dessa variação com aspectos como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão (Figura 5). Os estudantes foram solicitados a descrever as suas inferências sobre a taxa de variação média e instantânea com relação às variáveis e esboçar o gráfico da taxa instantânea em função de x .

O material desenhado para esta situação centralizou-se na janela de visualização do gráfico, na qual foi implementada uma construção que conectou a variação de dois valores de x com os dois valores correspondentes em y . Ao deslizar o ponto correspondente a um dos valores em x , o outro ponto no eixo x e os pontos correspondentes em y variavam em simultâneo; os controles deslizantes

a , b , c e d tinham o papel de definir a função traçada e o controle deslizante Δx podia ser manipulado para definir o valor da diferença entre os dois valores em x . A variação simultânea dos valores de Δx , Δy , e $\Delta y/\Delta x$ podia ser visualizado na representação numérica da planilha.

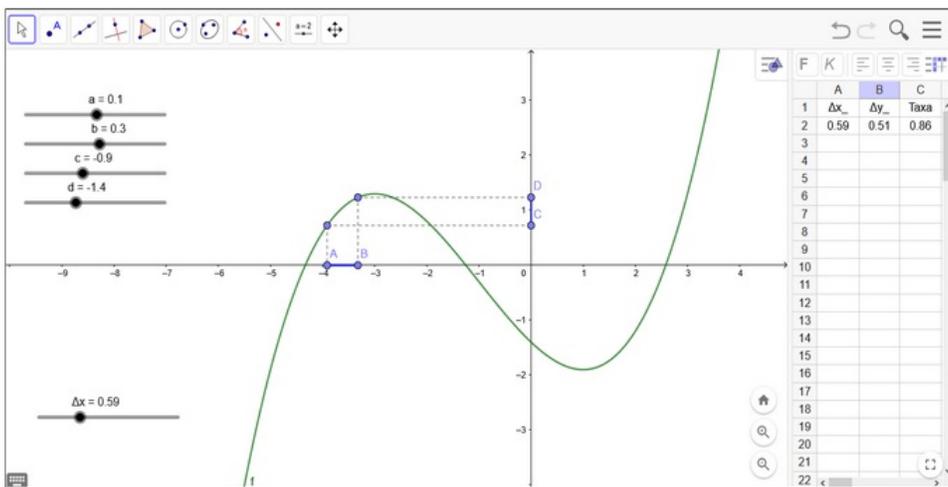


Figura 5. Material da situação 2

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 108)

A situação 3 foi baseada em uma representação das variações sucessivas em x e y no gráfico da função, além da articulação do gráfico com o gráfico das variações em y , o modelo algébrico e uma planilha (Figura 6). Inicialmente, os estudantes foram solicitados a descrever relações entre o gráfico da função e a variação em y em função da variação em x . Em seguida foram solicitados a descrever relações entre o modelo algébrico das funções e a variação em y com o suporte da planilha dinâmica.

As ações no material concebido para esta situação foram concentravam na janela central, na qual era possível deslizar em conjunto os pontos associados aos valores em x e observar a variação simultânea dos pontos associados aos valores em y , bem como dos segmentos que representam as variações Δx e Δy , cuja representação também podia ser visualizada de forma isolada na janela de visualização do lado direito na Figura 6; o controle deslizante k serviu para configurar a quantidade de intervalos sucessivos; as caixas de entrada x_A e x_B serviam para definir o valor de Δx , já os valores das diferenças sucessivas em Δx e Δy podiam ser visualizadas na planilha, na janela do lado direito.

Na entrevista, as ferramentas exploradas nas situações anteriores foram reunidas em um único material no GeoGebra: os segmentos dinâmicos nos eixos (situação 1), a ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy (situação 2) e a

ferramenta de variações sucessivas (situação 3). Os estudantes foram solicitados a descrever a forma como y varia em função de x e esboçar o gráfico da taxa de variação instantânea da função (Figura 7).

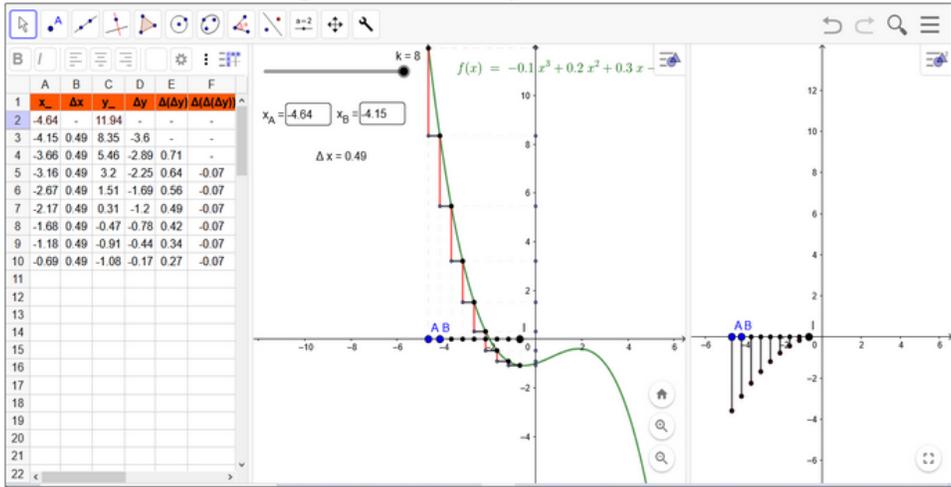


Figura 6. Material da situação 3
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 109)

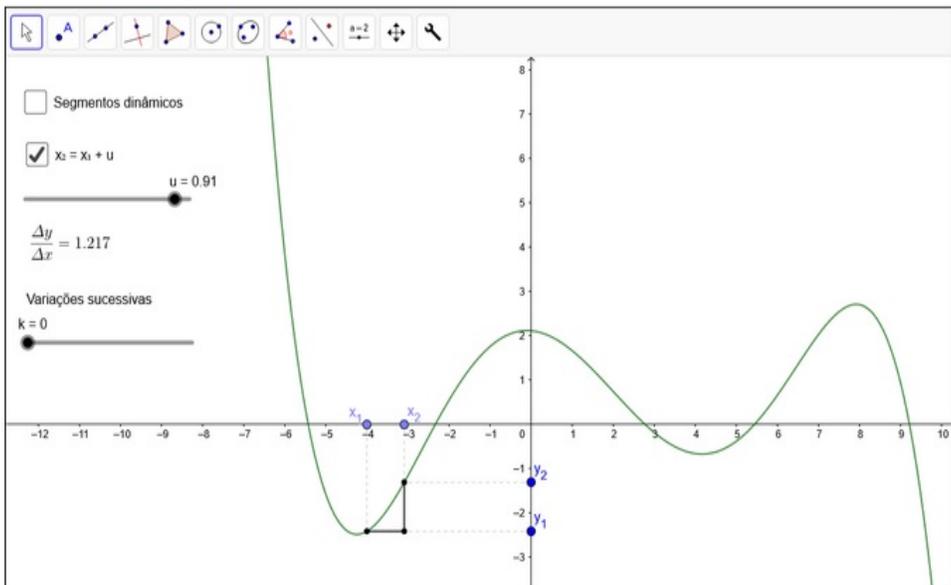


Figura 7. Material explorado na entrevista
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 283)

3.4. *Produção e registro dos dados*

Na primeira etapa, um questionário *online* foi aplicado para saber a experiência dos estudantes com tecnologias como o GeoGebra para explorar funções e sobre o seu entendimento sobre a ideia de função e a relação entre variáveis no gráfico.

Na segunda etapa, a gênese instrumental dos estudantes foi acompanhada durante um experimento de ensino de seis sessões, na qual os estudantes receberam um treinamento sobre as ferramentas do GeoGebra para explorar a covariação em funções e exploraram o *software* para resolver situações de covariação. Os estudantes registraram as suas ações no GeoGebra enquanto resolviam as situações, para isto, gravaram a tela e o áudio do computador; nesta etapa, os dados também envolveram as respostas escritas e esboços do gráfico produzidos pelos estudantes em fichas *online*, além das interações simultâneas entre os participantes, o mediador e os monitores, via *chat*.

Como um dos focos da análise eram os esquemas mobilizados pelos estudantes no uso do software, os estudantes foram orientados a usar a técnica de pensar em voz alta (Kujala & Mantyla, 2000) para que, em conjunto com as ações videogravadas na tela do software, tivéssemos um melhor acesso aos esquemas que fundamentaram as suas ações no software e as suas inferências, permitindo assim inferir o seu raciocínio covariacional.

A terceira etapa consistiu na aplicação de entrevistas baseadas em tarefas (Clement, 2000; Goldin, 2000), no qual os entrevistados responderam às perguntas formuladas enquanto usavam o GeoGebra para resolver as tarefas concebidas. A aplicação desse tipo de entrevista permitiu observar e arguir os estudantes enquanto eles exploravam o GeoGebra para resolver situações semelhantes às do experimento de ensino, fazendo emergir os seus esquemas e o raciocínio covariacional em desenvolvimento.

A produção e a análise dos dados sofreram um importante impacto devido ao contexto de pandemia da COVID-19 no qual o estudo foi realizado. Neste sentido, foi necessário repensar a estruturação do experimento, os recursos para o uso didático e metodológico e as formas de uso de tais recursos por cada ator, no sentido de minimizar as limitações de um estudo remoto, que reduziram a interação face a face e o acesso a dados úteis, como os gestos. A utilização de diferentes tipos de recursos para a interação e o registro de dados (*chat*, videoconferência, videogravação da tela, fichas *online* etc.), bem como a técnica de pensar em voz alta permitiram enriquecer os dados disponíveis para a análise.

Com relação aos aspectos éticos, os participantes foram previamente orientados quanto aos aspectos envolvidos na sua participação e do tratamento dos

dados produzidos por eles; um termo de ciência foi assinado por cada participante, voluntariando-se ao estudo e autorizando o uso dos dados produzidos.

3.5. Estruturação da análise dos dados

Para entender a influência do uso do GeoGebra, os esquemas mobilizados pelos estudantes foram inferidos a partir das suas ações na resolução das situações propostas no GeoGebra e, dentro da estrutura analítica proposta por Vergnaud, foram observados os invariantes operatórios (conceitos e teoremas-em-ação) e as inferências que caracterizaram a mobilização do raciocínio covariacional dos estudantes; os esquemas mobilizados também contribuíram para identificar os aspectos da transposição informática em jogo na forma como o uso do GeoGebra contribuiu ou não para o raciocínio covariacional.

Considerando o foco nos esquemas e tendo como principal fonte de acesso a tais esquemas as ações na tela do *software* registradas em vídeo, foi utilizada uma análise microgenética destes dados, em conjunto com as demais fontes de dados descritas. Segundo Meira (1994), a análise microgenética examina “mudanças relativamente sutis nas relações entre agentes e suas ações” (Meira, 1994, p. 60) e pode ser combinada com técnicas como a videografia para realizar uma análise interpretativa dos mecanismos psicológicos que fundamentam a atividade. Para isso, propõe-se uma descrição densa dos aspectos interacionais da atividade e uma estruturação que permita a análise de protocolos, como transcrições de discursos e ações.

Meira (1994) descreve algumas etapas para a estruturação e análise dos dados videogravados em uma análise microgenética: (i) assistir os vídeos completos e realizar anotações sobre os eventos que se associam ao problema; (ii) produzir um índice de eventos; (iii) identificar os eventos relacionados ao problema de pesquisa; (iv) transcrever os eventos detalhadamente; (v) assistir os segmentos e, com o suporte das transcrições, gerar interpretações sobre os microprocessos envolvidos e, por fim, (vi) divulgar os dados enfatizando exemplos prototípicos que ilustram a interpretação do autor.

Conforme ilustra o diagrama da análise (Figura 8), buscou-se identificar e descrever os esquemas mobilizados na gênese instrumental dos estudantes nas situações de covarição exploradas, articulando-se em seguida os componentes de tais esquemas com o raciocínio covariacional e com aspectos relacionados com a transposição informática descritos em análises *a priori* realizadas no planejamento do experimento. Tal articulação permitiu responder às questões de pesquisa.

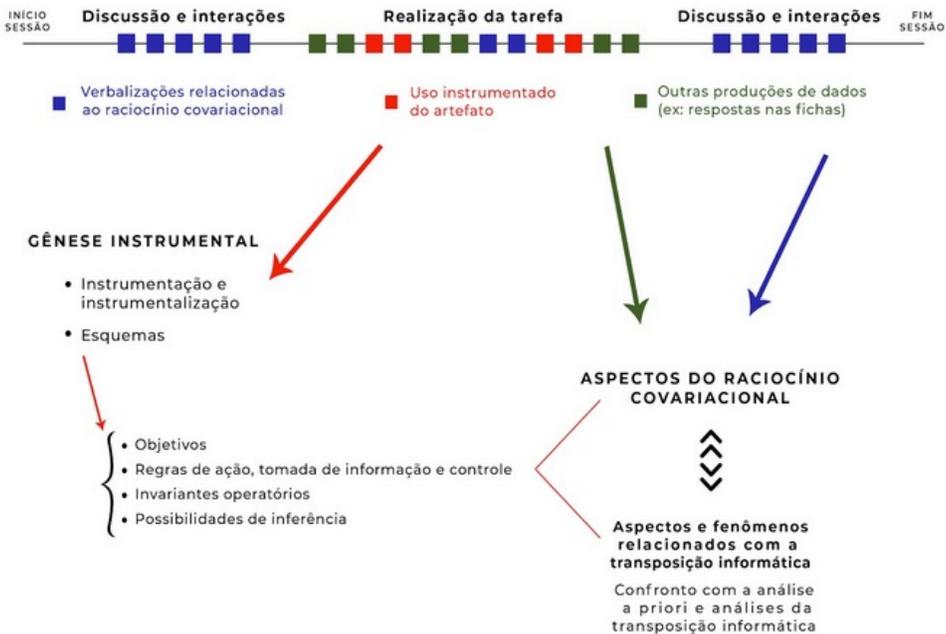


Figura 8. Diagrama da análise microgenética dos dados

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 95)

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Dividimos a análise e discussão dos resultados em duas partes: na primeira, analisamos e discutimos como o raciocínio covariacional dos estudantes se desenvolveu no contexto do uso instrumentado do GeoGebra; na segunda parte, discutimos as relações entre os efeitos desse uso instrumentado no raciocínio covariacional e os aspectos da transposição informática da covariação nos materiais concebidos no GeoGebra. A análise e a discussão são apresentadas por um recorte dos dados selecionados na análise microgenética, articulando-se as transcrições das falas e das ações dos estudantes no uso do GeoGebra e do registro em imagem da tela obtido na videogravação, bem como as outras fontes de dados. Além disso, são enfatizados os eventos que apontaram os componentes dos possíveis esquemas de ação instrumentada do GeoGebra para explorar a covariação e a mobilização do raciocínio covariacional subjacente a esses esquemas.

4.1. *Raciocínio covariacional e o uso instrumentado do GeoGebra*

Embora os resultados de Eric, Alice e Louise tenham aspectos comuns, suas gêneses instrumentais particulares e os seus conhecimentos de função os levaram a desenvolver o seu raciocínio covariacional de formas sutilmente distintas com o uso do GeoGebra.

Entretanto, nas primeiras situações, as descrições dadas pelos estudantes em geral da variação em y conforme variaram a variável em x restringiram-se a uma coordenação grosseira dos valores, ao limitaram-se ao crescimento ou decrescimento de uma variável em relação à outra, mesmo quando a relação envolvia uma variação variável:

Estudante do curso: *Função decrescente pois quando x cresce $m(x)$ decresce.* (referindo-se à variação na função quadrática na situação 1). (Silva, 2022, p.184)

Quando as suas descrições faziam referência à variação variável, elas foram feitas na maioria das vezes mobilizando o significado de velocidade variável, nem sempre relacionando a variação em y com a variação em x , ou seja, uma pré-coordenação de valores, com uma imagem de variação assíncrona das variáveis:

Alice (situação 1): *...Só que eu acho que o gráfico dessa vez não vai ser uma reta, porque em alguns pontos ó... o $m(x)$, a velocidade dele, que ele vai decrescendo é menor do que em outros pontos...* (Silva, 2022, p.196)

Uma dificuldade importante surgiu na interpretação da variação negativa, ou seja, a variação cujo valor é negativo ($\Delta y < 0$) a depender dos incrementos e das diferenças resultantes nos valores das variáveis. Na situação 1, ao abordar a função quadrática $m(x)$ (Figura 9) cujas variáveis foram representadas por segmentos dinâmicos nos eixos x e y , sem acesso visual ao gráfico, Louise descreveu a variável $m(x)$ como aumentando a sua variação conforme x crescia, embora tal variação fosse, pelo contrário, decrescente:

Louise (situação 1): *... ao passo que a variável x começa a crescer, $m(x)$ aumenta a sua variação...* (Silva, 2022, p.207)

O equívoco de Louise foi representativo de outras dificuldades que os estudantes, de forma geral, apresentaram com relação à variação decrescente e negativa; a representação da variação por pontos e segmentos dinâmicos pode ter tido um papel importante como uma restrição do artefato para que este tipo de equívoco ocorresse, visto que os valores negativos e decrescentes da variável são representados por segmentos dinâmicos de comprimento crescente.

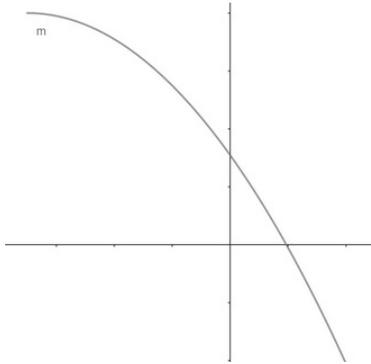


Figura 9. Gráfico da função $m(x)$
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 208)

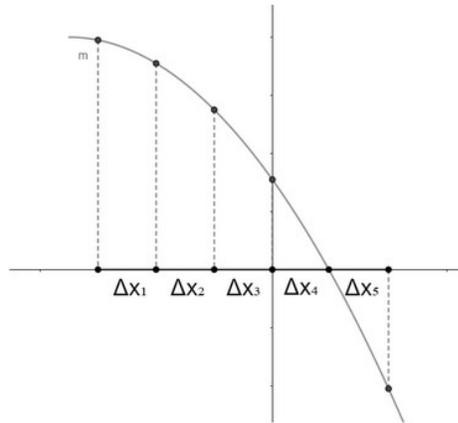


Figura 10. Esquema de Eric:
acrécimos constantes em x
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 191)

O desenvolvimento de um raciocínio covariacional mais refinado, isto é, em um nível mais elevado em termos do quadro de níveis Thompson e Carlson (2017) foi relacionado ao desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada de ferramentas do GeoGebra que permitiram: (i) coordenar a variação em y com acréscimos constantes em x ; (ii) coordenar a variação variável em y em função de x e Δx ; (iii) articular as ferramentas de coordenação da covariação com as representações das funções de forma dinâmica e simultânea.

A coordenação da variação em y com acréscimos constantes em x permitiu aos estudantes quantificar a covariação e superar dificuldades para interpretar a variação variável e a variação negativa, o que os permitiu progredir a uma coordenação da covariação contínua.

Como exemplo, o esquema de Eric, cuja regra de ação foi variar x por acréscimos constantes guiando-se pelas marcações no eixo x e observar a variação correspondente em y , envolveu o uso instrumentado das marcações nos eixos (Figura 10) para coordenar a variação em y com o valor de Δx fixo; já o uso instrumentado da ferramenta de variações sucessivas (Figura 11) permitiu o suporte à coordenação contínua da covariação por permitir variar x de forma dinâmica e visualizar as variações sucessivas em y e Δy .

A Tabela I compara as descrições dadas no questionário aplicado antes do experimento e, posteriormente, na entrevista final. Em ambas as etapas, os estudantes foram solicitados a descreverem o comportamento das variáveis de uma função representada pelo gráfico da Figura 12. As descrições de Eric e Alice evoluíram para uma coordenação da covariação contínua com a interpretação da

variação variável, em vez de apenas descrições em termos de crescimento e decréscimo; já Louise mostrou uma evolução no seu esquema de leitura do gráfico, porém ainda mostrou uma interpretação equivocada da taxa de variação.

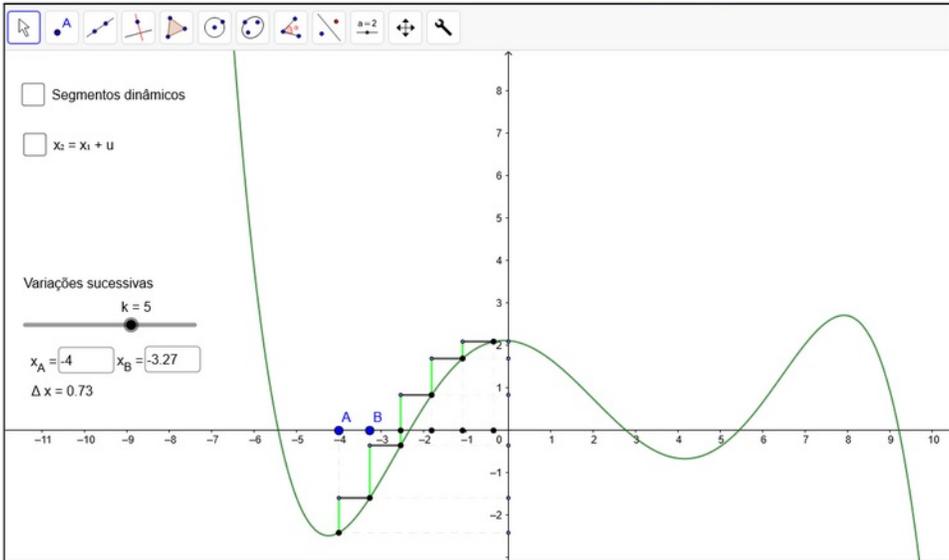


Figura 11. Mobilização da ferramenta de variações sucessivas, na segunda questão da entrevista

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 153)

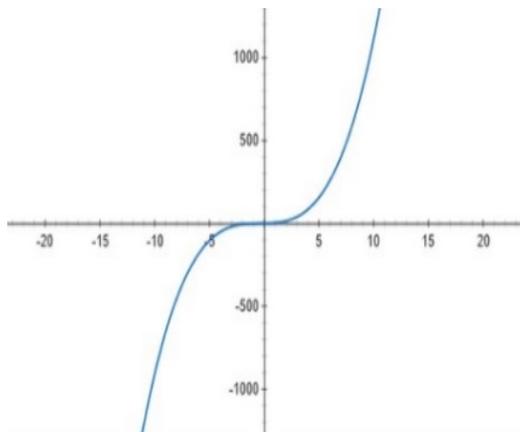


Figura 12. Gráfico do questionário revisitado na entrevista

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 281)

TABELA I
Evolução na interpretação da variação variável

<i>Questionário</i>	<i>Entrevista</i>
À medida que a variável independente cresce, a variável dependente cresce também (a função é estritamente crescente). (Eric) (Silva, 2022, p. 164)	Eu basicamente disse que a função ela é crescente (...) Eu poderia dizer com mais detalhes de <i>como estaria ocorrendo esse crescimento</i> (...) nesse primeiro trecho que é que os valores de x (são) menores que zero (...) <i>a taxa de variação é positiva, mas ela é decrescente</i> (...) Foi uma observação que eu não fiz no começo porque eu não tinha essa compreensão e, eu comecei a prestar atenção nisso depois do curso(...) para valores de x maiores que zero, <i>a taxa de variação continua positiva, só que agora ela é (...) crescente.</i> (Eric) (Silva, 2022, p. 282)
É uma função de grau 3, onde, para cada X existe apenas um Y correspondente, de forma que o conjunto imagem é todo R . À medida que X cresce Y cresce, à medida que X diminui (decrece) Y diminui. (Alice) (Silva, 2022, p. 165)	<i>Eu falaria em relação à variação da variação</i> (...) Vindo da esquerda do gráfico(...) na parte negativa do x eu diria que aí a gente tem uma <i>variação decrescente</i> até esse ponto de inflexão que é mais ou menos na origem, e a partir daí a gente tem uma <i>variação crescente.</i> (Alice) (Silva, 2022, p. 289)
Para X positivo a função é crescente, para X negativo a função é decrescente. (Louise) (Silva, 2022, p. 164)	A gente pode acrescentar aqui, algo sobre a <i>taxa de variação, né?</i> ... Eu creio que aqui a taxa de variação é sempre crescente... e na parte que tá positiva, também vai ser uma <i>taxa de variação positiva, porque ela tá aumentando né?</i> (Louise) (Silva, 2022, p. 296)

A coordenação da variação variável em y em função de x e Δx permitiu interpretar a taxa de variação $\Delta y/\Delta x$ em função de x . A gênese instrumental da ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx (Figura 13) teve um papel fundamental para a progressão no raciocínio covariacional, sobretudo de Eric, que após ter descrito detalhadamente como as variáveis variaram no gráfico revisitado na entrevista, destacou o papel da gênese instrumental desta ferramenta para o desenvolvimento do seu raciocínio covariacional:

Eric (entrevista): *Então, todas tiveram um grande impacto pra esse tipo de raciocínio, mas sem dúvida quando eu olho para o gráfico eu to vendo aqueles segmentos de reta que variavam, aqueles que quando você construía aqueles segmentos que mostravam o delta y e o delta x e à medida que iam avançando a gente conseguia ver o delta y , geralmente tava lá de uma cor diferente, e aí ele aumentava, ele diminuía, então é aquilo que eu enxergo quando tento fazer essa análise, então acho que era a*

construção daqueles segmentos que você definia pra o delta y e pra o delta x, geometricamente. (Silva, 2022, p.282)

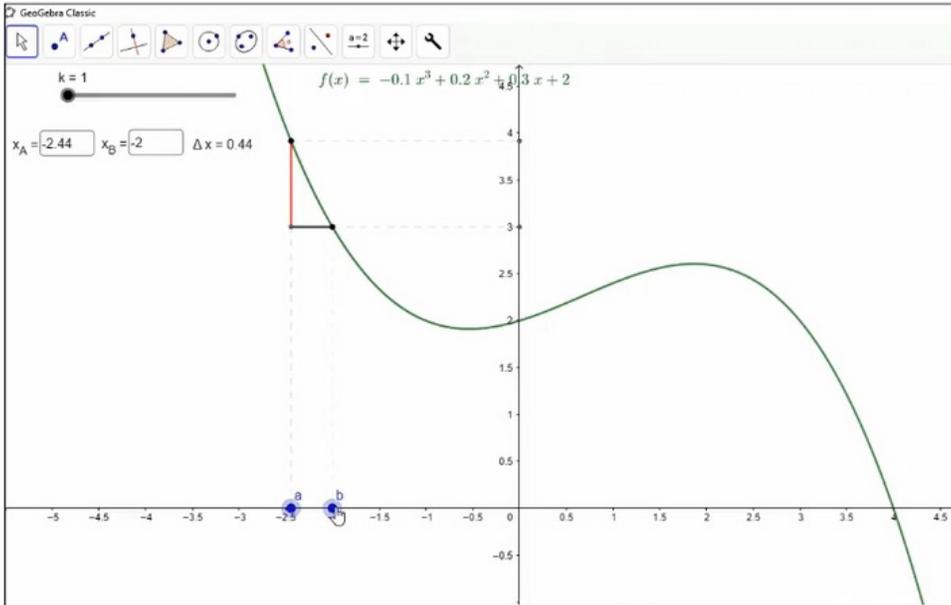


Figura 13. Ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx
Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 222)

A possibilidade do GeoGebra de permitir a conexão simultânea entre o gráfico e as ferramentas descritas acima permitiu aos estudantes o uso instrumentado dessas ferramentas para interpretar os seguintes aspectos do gráfico por uma coordenação da covariação contínua: intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão.

No início do experimento, os estudantes tiveram dificuldades para interpretar estes aspectos em termos da covariação entre y e x (por exemplo, quando a concavidade é voltada para cima, a taxa de variação é crescente), porém o uso instrumentado das ferramentas ‘variação dinâmica entre Δy e Δx ’ (exibida na Figura 13) e ‘variações sucessivas’ (exibida na Figura 11) conectadas ao gráfico contribuiu para coordenar a covariação contínua entre Δy e x em cada aspecto da forma do gráfico, permitindo uma interpretação covariacional desses aspectos.

Esta progressão é mostrada nos seguintes trechos, que revelam regras de ação e tomada da informação dos esquemas de Eric e Alice (descritas entre parênteses) e os aspectos do seu raciocínio covariacional sobre a forma do gráfico mobilizados e inferidos nesses esquemas, revelados nas suas falas enquanto manipulam o GeoGebra:

- Eric (situação 2): (Retorna x_A e x_B a um pouco antes do x do ponto de inflexão e varia os valores até um pouco depois do x do ponto de inflexão. Observa a variação em Δy na planilha. Repete o procedimento duas vezes.) *E aí tá nessa região aqui de mudança de concavidade. Começa a aumentar, aumentar... Então, onde tá aqui esse ponto, na mudança da concavidade, o Δy que estava diminuindo, ele passa a aumentar, ele começa a crescer.* (Silva, 2022, p. 229)
- Eric (situação 2): *A taxa de variação é decrescente quando a concavidade está voltada para baixo e crescente quando a concavidade está voltada para cima. Nos pontos de máximo e de mínimo a taxa de variação se anula e nos pontos de inflexão a taxa de variação deixa de ser decrescente para se tornar crescente e vice-versa.* (Silva, 2022, p. 229)
- Alice (situação 2): (Varia x_A e x_B do início até o final do intervalo exibido na tela, com uma pequena pausa próximo ao $x_{\text{INFLLEXÃO}}$. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy . Repete o procedimento algumas vezes) *Então aqui, vamos olhar as concavidades, tem concavidade voltada para cima aqui, concavidade voltada para baixo aqui. E como a gente já tinha visto, onde a concavidade é voltada para cima, a gente tem uma variação crescente em Δy . Ela é crescente... E, quando a concavidade é voltada pra baixo, ela passa a ser decrescente. Essa mudança acontece mais ou menos por aqui, que é onde tem um ponto de inflexão, então esse ponto de inflexão é o responsável por mudar a concavidade, alterar concavidade, né? se a gente tem uma concavidade voltada para cima, ela passa a ser voltada para baixo... e ocorre essa mudança. A variação em Δy vem sendo crescente até esse ponto de inflexão, onde há a mudança da concavidade e a partir daqui ela passa... a variação passa a ser decrescente.* (Silva, 2022, p. 239)
- Alice (situação 2): (Varia x_A e x_B próximo aos valores do x_{MIN} . Repete o procedimento algumas vezes, nos dois sentidos. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy). *Deixa eu ver mais o quê... os pontos de máximo e mínimo... No ponto de... nesse ponto de mínimo, ele... Se aproxima, né? Se aproxima de zero no ponto de mínimo, e por aqui acontece a mudança de sinal. Ele vem crescendo, só que com o sinal negativo e mais ou menos por aqui tem essa mudança de sinal. Continua crescendo só que o sinal se altera e passa a ser positivo. Então eu diria que esse ponto de mínimo é o responsável por alterar o sinal dessa variação ...* (Silva, 2022, p. 239)

Também foram observadas particularidades no raciocínio covariacional no caso de cada estudante nas situações de esboço de um gráfico para representar a covariação entre as variáveis.

Em uma situação na qual foi solicitado aos estudantes representarem graficamente a taxa de variação $\Delta y/\Delta x$ em função de x , considerando-se o valor de Δx como pequeno o suficiente para simular a taxa instantânea, os esquemas de Alice e Louise (principalmente) basearam-se na correspondência entre valores de x

e da taxa de variação e envolveram uma sequência de regras como: (i) calcular os valores das variáveis, (ii) definir pontos no gráfico e (iii) traçar uma curva aproximando a trajetória dos pontos. Essas regras revelaram a influência dos esquemas baseados em uma abordagem de função como correspondência entre valores e em um pensamento da forma estática (Moore & Thompson, 2015), geralmente desenvolvidos no ambiente papel-e-lápis. As Figuras 14 e 15 exibem os gráficos esboçados por Louise e Alice, respectivamente.

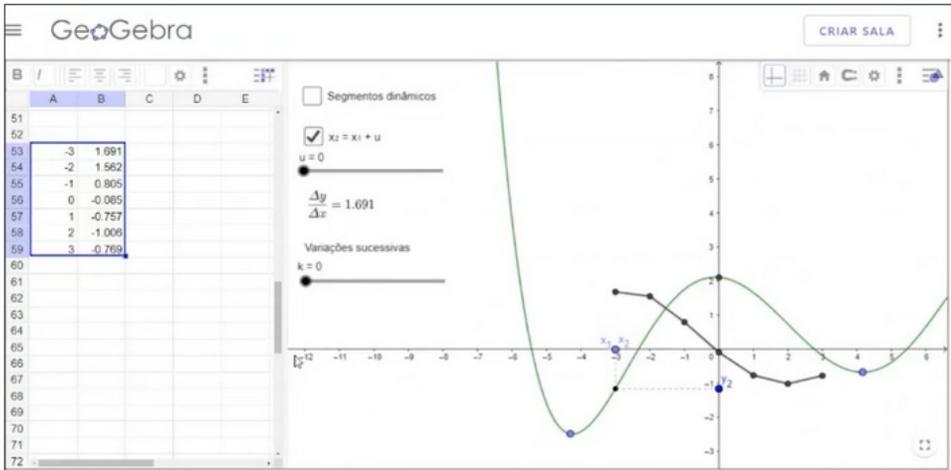


Figura 14. Gráfico esboçado por Louise na entrevista

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 301)

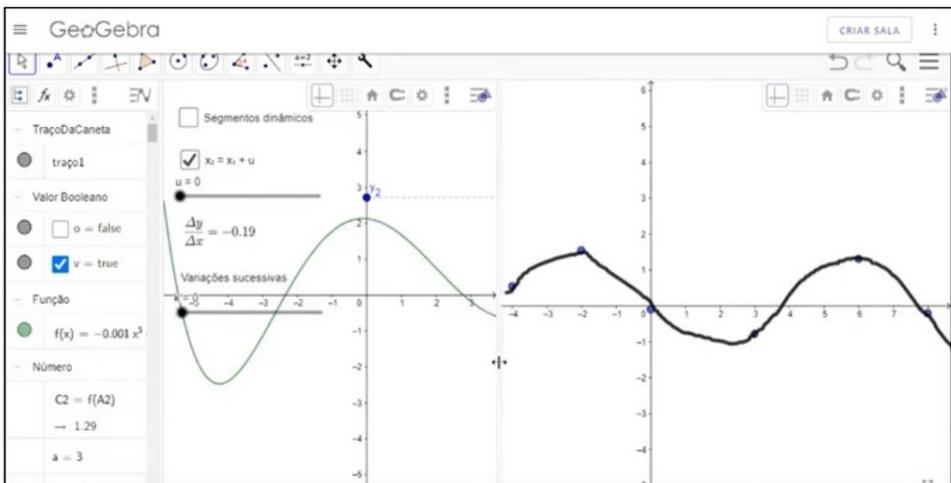


Figura 15. Gráfico esboçado por Alice na entrevista

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 295)

Por outro lado, embora os esquemas de Eric também tenham envolvido alguns dos aspectos mobilizados pelas suas colegas, ele foi além ao integrar aspectos de um raciocínio covariacional no seu esquema para esboçar o gráfico. Eric mobilizou a ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy para visualizar a forma como a taxa de variação variou em cada intervalo e em seguida traçou curvas suaves e côncavas para cima ou para baixo, em função do comportamento da taxa de variação em cada intervalo.

Eric não recorreu à definição de pares ordenados dos valores de x e da taxa de variação para traçar o gráfico, o que sugere que aqui ele se baseou em uma imagem da covariação contínua em cada intervalo em vez de usar esquemas baseados na correspondência entre valores. O gráfico traçado por Eric é mostrado na Figura 16.

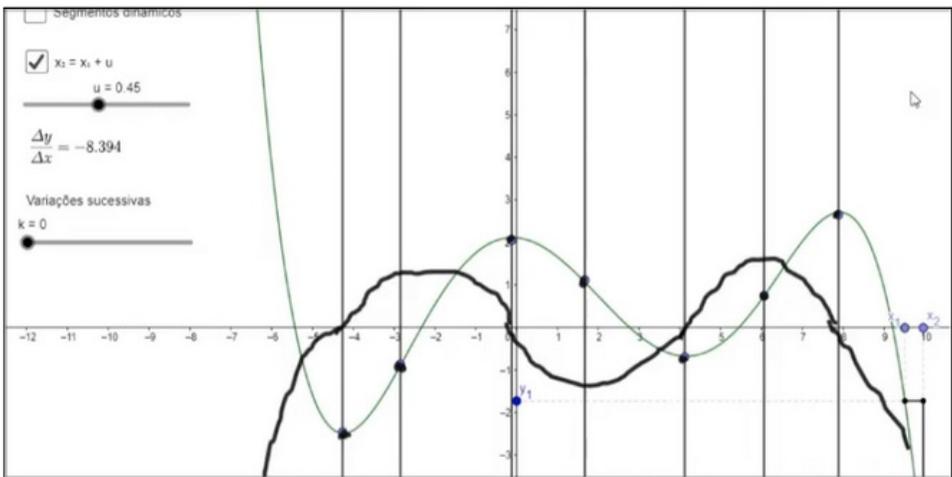


Figura 16. Gráfico esboçado por Eric na entrevista

Nota: Adaptado de Silva (2022, p. 288)

Observou-se também que o fato de os estudantes terem interpretado aspectos como a variação variável nas situações de descrição da covariação não implicou que esse aspecto fosse mobilizado também nas situações de esboçar o gráfico como uma curva suave côncava para cima ou para baixo. Este resultado reforçou que houve a prevalência dos esquemas baseados na correspondência entre valores no ambiente papel-e-lápis e mostrou a necessidade de mais desenvolvimento dos esquemas baseados na perspectiva da covariação e na mobilização das possibilidades do meio dinâmico computacional.

Na entrevista, cada estudante também foi questionado sobre qual ferramenta contribuiu mais para o desenvolvimento do seu raciocínio covariacional. Eric destacou o papel da ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy , o que mostrou que o seu raciocínio covariacional envolveu uma imagem em desenvolvimento da coordenação da covariação contínua suave. Alice destacou a representação numérica tabular da planilha, a qual ela considerou útil para visualizar os valores das variáveis; a sua escolha reforçou a forma como ela usou o GeoGebra durante o experimento, com um raciocínio covariacional segmentado e apoiado nas representações que enfatizam os valores das variáveis. Já Louise não destacou uma ferramenta específica e usou o GeoGebra sobretudo para visualizar gráficos e valores das variáveis, com um menor uso das ferramentas para quantificar a covariação, o que parece ter influenciado nas suas dificuldades em interpretar a variação variável e progredir para uma coordenação da covariação contínua.

4.2. *Relações com a transposição informática da covariação nos materiais concebidos no GeoGebra*

O papel de aspectos da transposição informática no uso instrumentado do GeoGebra e consequentemente na forma como o raciocínio covariacional dos estudantes progrediu destacou-se nos resultados.

Como exemplo, a coordenação da covariação entre as variáveis foi consideravelmente influenciada pelo uso instrumentado de ferramentas que permitiram coordenar a variação em y com acréscimos constantes em x . Neste sentido, destacamos o papel de duas ferramentas: (i) as marcações nos eixos x e y , cujo uso instrumentado por Eric permitiu a inferência da proporcionalidade na função afim; (ii) a ferramenta de variações sucessivas, cujo uso instrumentado pelos estudantes permitiu, entre outras contribuições, quantificar a variação e superar dificuldades em interpretar a variação variável e a variação negativa. A transposição informática nessas ferramentas envolveu uma representação da conexão entre a medida da variação em y e uma unidade de medida da variação respectiva em x .

Também foi destacado o papel das ferramentas que permitiram a coordenação da covariação contínua, como a ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy . Ao conectar dois valores da variável em x com os respectivos valores em y e permitir a variação dinâmica destes valores, esta ferramenta permitiu um suporte à coordenação dos valores de Δx e Δy , com Δx fixo. O papel da variação dinâmica e da conexão simultânea das representações foi um princípio de *design* fundamental em todos os materiais concebidos neste estudo. Tais características

permitiram explorar os aspectos da covariação revelados por cada representação, interpretar os aspectos da forma do gráfico covariacionalmente, construir relações entre o comportamento do gráfico da função e o gráfico da sua taxa de variação, bem como entre o modelo algébrico e a variação da função.

Do ponto de vista das restrições geradas no uso do GeoGebra, destacamos o papel da representação das variáveis por pontos dinâmicos e a representação da variação Δy por segmentos dinâmicos, que envolve a representação da diferença entre dois valores de uma variável por um segmento cujo comprimento varia conforme estes valores mudam, mas que não pode assumir um significado de valor negativo. Embora essa representação tenha sido associada ao suporte à coordenação e à quantificação da variação, foi no contexto da sua exploração que surgiram equívocos relacionados à variação negativa, como: (i) a associação de um ponto dinâmico que representa uma variável cujos valores são negativos e cada vez menores com o aumento da velocidade do ponto, produzindo o equívoco de uma variação crescente, em vez de decrescente; (ii) a associação entre a variação negativa decrescente e um segmento de comprimento cada vez maior para representar tal variação, produzindo um equívoco de mesma natureza que o anterior.

Ao considerar tais contribuições e restrições e o fato de que algumas ferramentas exploradas pelos estudantes foram concebidas pelos autores especificamente para este estudo, emergiu a necessidade de distinguir a origem dos fenômenos gerados pelo uso de ferramentas que não foram originalmente implementadas pelos *designers* do GeoGebra, mas que foram implementadas em um processo de *design* secundário realizado por professores e pesquisadores que concebem materiais no *software*, criando novos objetos e significados (no nosso caso, os segmentos dinâmicos para representar a variação, por exemplo). Propomos caracterizar tal processo como uma transposição informática de segunda ordem.

5. CONCLUSÕES

Neste artigo destacamos resultados de um estudo que teve por objetivo investigar os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato. Foi realizado um estudo de casos múltiplos das respectivas gêneses

instrumentais de três licenciandos em Matemática que exploraram situações de covariação em função com o suporte de materiais concebidos no *software* GeoGebra. Os resultados destacados apontam as contribuições e restrições do uso instrumentado do GeoGebra no raciocínio covariacional dos estudantes.

Por um lado, algumas das contribuições envolveram: (i) a progressão de uma coordenação da covariação meramente em termos do crescimento ou decrescimento das variáveis para uma coordenação da covariação contínua, por meio do suporte de ferramentas que permitiram a quantificação e a coordenação da variação em y com acréscimos constantes em x e das ferramentas que permitiram a coordenação dinâmica da covariação contínua; e (ii) a mobilização do raciocínio covariacional para interpretar aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo e de mínimo e pontos de inflexão com o suporte da conexão dinâmica e simultânea entre essas ferramentas e as representações de função, como o gráfico, o modelo algébrico e a planilha.

Já as restrições destacadas foram: (i) os conflitos na interpretação da variação negativa no contexto do uso das ferramentas que envolviam a representação da variação por segmentos dinâmicos; (ii) a influência e prevalência de esquemas baseados na correspondência entre valores, no ambiente papel-e-lápis e em um pensamento da forma estática nas situações de esboçar o gráfico, o que limitou a mobilização do raciocínio covariacional no esboço do gráfico.

A relação desses resultados com a transposição informática destacou as possibilidades de representar a covariação de forma dinâmica, conectando-se diferentes representações, além das características das ferramentas para coordenar e quantificar a covariação; por outro lado, foram destacadas as restrições da representação da variação por pontos e segmentos dinâmicos. O *design* secundário dos novos objetos concebidos para representar a variação nos materiais do estudo levou à emergência da ideia de uma transposição informática de segunda ordem.

A visão de uma não-neutralidade das tecnologias computacionais na aprendizagem nos permitiu ver que, para entender mais claramente o papel do uso desses artefatos no desenvolvimento conceitual, é necessário levar em conta aspectos como: (i) as possibilidades e as restrições dos artefatos e as formas pelas quais esses aspectos influenciam o desenvolvimento de esquemas que mobilizam o conceito em jogo; (ii) os diferentes usos instrumentados e as gêneses instrumentais; (iii) os aspectos matemáticos da situação; (iv) o papel do professor como *designer* de materiais didáticos computacionais e guia das orquestrações instrumentais; entre outros aspectos.

REFERÊNCIAS

- Aranda, C., & Callejo, M. L. (2017) Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: dos estudios de casos. *Bolema*, 31(58), 777-798. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13>
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *The International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>.
- Balacheff, N. (1993). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnignot, & N. Balacheff (Eds.). *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 364-370). La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 9-42. <https://telearn.hal.science/hal-00190648>
- Carlson, M., Sally Jacobs, Coe, E., Sean Larsen, & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*. (Vol. 2, pp. 55-73). University of Wyoming. <https://wilkins.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/2012cqr.pdf>
- Clement, J. (2000) Analysis of clinical interviews: foundations and model viability. In Lesh, R. & Kelly, A. *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 341-385). Lawrence Erlbaum.
- Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 135-164. <https://doi.org/10.1007/bf01273661>
- Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(3), 151-181. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090>
- Giraldo, V., Carvalho, L. M., & Tall, D. (2002). Conflitos teórico-computacionais e a formação da imagem conceitual de derivada. In L. M. Carvalho & L. C. Guimarães (Eds.), *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*. (Vol. 1, pp. 153-164). <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf>
- Gitirana, V., & Lucena, R. (2021). Orquestração instrumental on-line. *Educação Matemática Pesquisa: Revista Do Programa de Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, 23(3), 362-398. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p362-398>
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Taylor & Francis Group.
- Johnson, H. L., & McClintock, E. (2018). A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 97(3), 299-316. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9799-7>
- Kujala, S., & Mäntylä, M. (2000). Studying users for developing usable and useful products. In *Proceedings of 1st Nordic Conference on Computer-Human Interaction*. <https://www.nordichi.net/Proceedings2000/Papers/06Study.pdf>

- Lagrange, J-B. (2014) A functional perspective on the teaching of algebra: current challenges and the contribution of technology. *The International Journal For Technology in Mathematics Education*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01740456>.
- Lagrange, J., & Psycharis, G. (2014) Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: a double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning*, 19, 255–286 <https://doi.org/10.1007/s10758-013-9211-3>.
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2005). *A Matemática do Ensino Médio*. (8ª ed., Vol. 1). SBM.
- Malik, M. A. (1980) Historical and pedagogical aspects of the definition of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11, (4), 489-492. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739800110404>.
- Meira, L. (1994) Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. *Temas psicológicos*, 2(3), 59-71. http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-389X1994000300007&lng=pt&nrm=iso
- Moore, K. C. (2014) Quantitative reasoning and the sine function: the case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138. <https://doi.org/10.5951/jresmethedu.c.45.1.0102>
- Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015) Shape thinking and students' graphing activity. In *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education*. (pp. 782-789). <https://pat-thompson.net/PDFversions/2015MooreShapeThinking.pdf>
- Ndlovu, M., Wessels, D., & De Villiers, M. (2011) An instrumental approach to modelling the derivative in Sketchpad. *Pythagoras*, 32(2), 1-15. <http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i2.52>
- Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin
- Silva, C. T. J. (2022). *O uso de um artefato computacional como suporte ao raciocínio covariacional em função* (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
- Silva, C. T. J., & Gitirana, V. (2023). Abordagem covariacional de função: aspectos do ensino, aprendizagem e possibilidades das tecnologias digitais. *Zetetike*, 31, e023026–e023026. <https://doi.org/10.20396/zet.v31i00.8664258>
- Thompson, P. W. (1994) Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274. <https://doi.org/10.1007/BF01273664>
- Thompson, P. W., Hatfield, N., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017) Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 95-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001>.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics. <https://pat-thompson.net/PDFversions/2016ThompsonCarlsonCovariation.pdf>
- Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des Mathématiques*. 25 (1), 91-138. <https://revue-rdm.com/2005/construction-et-conduite-des-instruments-dans-les-apprentissages-mathematiques-necessite-des-orchestrations/>
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83-94. <https://doi.org/10.1159/000202727>.

Yin, R. K. (2015). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. (5ª ed). Bookman.

Zengin, Y. (2018) Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 311–333. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9832-5>.

Autores

César Thiago Silva. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil.
cesarthiago.silva@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-0203-8542>

Verônica Gitirana. Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru, Brasil.
veronica.gitirana@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0003-2594-4203>