Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Relime

ISSN 1665-2436 | eISSN 2007-6819

Vol. 28, e683

Artículo

https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

Epistemología del uso de la gráfica en contextos paramétricos desde la modelación de trayectorias

Epistemology of graph use in parametric contexts through trajectory modeling

José Iván, López-Flores
Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

Carolina, Carrillo García
Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

Resumen

Este estudio analiza cómo estudiantes universitarios utilizan la gráfica en la modelación de trayectorias cuando trabajan con funciones paramétricas sin disponer de expresiones analíticas. Desde la Socioepistemología, y particularmente desde el modelo Funcionamientos–Formas (Fu–Fo), se examina el tránsito por los tres momentos del uso de la gráfica. El estudio adopta un enfoque cualitativo y se basa en el análisis de producciones gráficas y registros discursivos generados por ocho estudiantes en dos actividades paralelas de modelación. Los resultados muestran que los estudiantes: (1) construyen representaciones iniciales mediante segmentaciones y numerizaciones espaciales; (2) justifican transformaciones del trazo, estiramientos horizontales por cambios de velocidad y segmentos constantes por detenciones, articulando la gráfica con el fenómeno; y (3) generalizan criterios construidos en una función componente para ajustar la otra sin reconstruir desde cero el razonamiento. A partir de estas evidencias, se propone una extensión del modelo Fu–Fo para contextos paramétricos.

Palabras clave:

- *Funciones paramétricas*
- *Modelación de trayectorias*
- *Uso de la gráfica*
- *Funcionamientos-Formas*
- *Socioepistemología*

Cómo citar:

López-Flores, J. I. y Carrillo García, C. (2025). Epistemología del uso de la gráfica en contextos paramétricos desde la modelación de trayectorias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *28*, e683. https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

Recepción: 30/06/2025 Aceptación: 01/12/2025 Publicación: 19/12/2025

Abstract	Keywords
This study examines how university students use graphs to model trajectories when working with parametric functions without analytic expressions. Drawing on Socioepistemology, and particularly on the Functionings–Forms (Fu–Fo) model, the analysis focuses on students' progression through the three moments of graph use. The study adopts a qualitative approach and is based on the analysis of graphical productions and discourse generated by eight students in two parallel modelling activities. Results show that students: (1) construct initial representations through spatial segmentations and numerizations; (2) justify transformations of the graph, horizontal stretches due to changes in speed and constant segments due to stops, by articulating graphical features with the phenomenon; and (3) generalize criteria constructed for one component function to adjust the other without rebuilding the reasoning from scratch. Based on this evidence, an extension of the Fu–Fo model is proposed for parametric contexts.	– *Parametric functions* – *Trajectory modelling* – *Graph use* – *Functionings–Forms* – *Socioepistemology*

Resumo	Palavras-chave
Este estudo analisa como estudantes universitários utilizam o gráfico na modelação de trajetórias ao trabalhar com funções paramétricas sem dispor de expressões analíticas. A partir da Socioepistemologia, e particularmente do modelo Funcionamentos–Formas (Fu–Fo), examina-se o trânsito pelos três momentos do uso do gráfico. O estudo adota uma abordagem qualitativa e baseia-se na análise de produções gráficas e registos discursivos gerados por oito estudantes em duas atividades paralelas de modelação. Os resultados mostram que os estudantes: (1) constroem representações iniciais por meio de segmentações e numerizações espaciais; (2) justificam transformações no traçado, alongamentos horizontais devido a mudanças de velocidade e segmentos constantes devido a pausas, articulando o gráfico com o fenômeno; e (3) generalizam critérios construídos para uma função componente a fim de ajustar a outra sem reconstruir o raciocínio desde o início. Com base nessas evidências, propõe-se uma extensão do modelo Fu–Fo para contextos paramétricos.	– *Funções paramétricas* – *Modelação de trajetórias* – *Uso do gráfico* – *Funcionamentos–Formas* – *Socioepistemologia*

Résumé	Most Clés
Cette étude analyse comment des étudiants universitaires utilisent le graphique pour modéliser des trajectoires lorsqu'ils travaillent avec des fonctions paramétriques sans disposer d'expressions analytiques. S'inscrivant dans la Socioépistémologie, et particulièrement dans le modèle Fonctionnements–Formes (Fu–Fo), l'analyse porte sur le passage par les trois moments de l'usage du graphique. L'étude adopte une approche qualitative et s'appuie sur l'analyse de productions graphiques et d'énoncés recueillis auprès de huit étudiants dans deux activités parallèles de modélisation. Les résultats montrent que les étudiants : (1) construisent des représentations initiales à partir de segmentations et de numérisations spatiales ; (2) justifient des transformations du tracé, étirements horizontaux dus aux changements de vitesse et segments constants associés aux arrêts, en articulant le graphique avec le phénomène ; et (3) généralisent des critères construits pour une fonction composante afin d'ajuster l'autre sans reconstruire le raisonnement depuis le début. À partir de ces données, une extension du modèle Fu–Fo est proposée pour les contextes paramétriques.	– *Fonctions paramétriques* – *Modélisation de trajectoires* – *Usage du graphique* – *Fonctionnements–Formes* – *Socioépistémologie*

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

1. Introducción

En la enseñanza universitaria de las matemáticas, las gráficas suelen ocupar un lugar secundario frente a las expresiones simbólicas, ya sea como productos visuales de un desarrollo algebraico o como ilustraciones de resultados previamente obtenidos (Suárez, 2014). Diversos autores han documentado esta subordinación del registro gráfico al algebraico y sus consecuencias en la construcción de conocimiento matemático (Dorko & Weber, 2014; Duval, 2006; Janvier, 1998). La situación es particularmente visible en la enseñanza de las funciones paramétricas, donde el tratamiento habitual enfatiza la manipulación de expresiones del tipo $x(t)$, $y(t)$, coordenadas cartesianas expresadas como funciones de un parámetro t, con escasa problematización del tiempo como entidad significativa y con un uso gráfico centrado en la verificación de resultados (Keene, 2007; Sokolowski & Capraro, 2013).

En línea con esta problemática, Bašić y Šipuš (2019) documentan cómo, en contextos de Cálculo multivariable, los estudiantes tienden a interpretar curvas y superficies desde procedimientos simbólicos automáticos –como el cálculo de torsión– sin apelar a propiedades geométricas fundamentales. Este comportamiento refleja una subordinación del registro gráfico al algebraico y se asocia a obstáculos epistemológicos y de contrato didáctico que dificultan una coordinación rica entre representaciones.

Numerosos estudios dan cuenta de las dificultades que este enfoque genera. Dorko y Weber (2014) y Trigueros (2007) han mostrado que, incluso en contextos avanzados, los estudiantes enfrentan obstáculos para interpretar trayectorias cuando no se les proporciona una fórmula explícita. Estos obstáculos incluyen la confusión entre curvas nulas (nullclines) y trayectorias reales, o la interpretación cartesiana de gráficas paramétricas. Asimismo, tanto Keene (2007) como Sokolowski y Capraro (2013) advierten que el parámetro tiempo suele ser concebido como un artefacto formal y no como organizador dinámico del fenómeno representado. Incluso en niveles avanzados, la parametrización requiere decisiones significativas sobre la trayectoria representada. Rabiei y Saleeby (2021) evidencian cómo distintas elecciones paramétricas inciden en el análisis geométrico de curvas y en la factibilidad del cálculo en integrales triples, reforzando el carácter constructivo de esta representación.

Como respuesta, diversas investigaciones han propuesto el uso de tecnología dinámica para explorar el comportamiento de curvas parametrizadas. Por ejemplo, Falsetti et al. (2015) y Williner et al. (2019) reportan experiencias con entornos hipermediales donde los estudiantes analizan el recorrido de trayectorias mediante deslizadores y simulaciones. Sin embargo, dichos enfoques no siempre logran promover la formalización de las observaciones visuales ni la construcción de argumentos gráficos. Otros estudios como los de Çekmez (2019), Merino y Cueva (2019) y Murphy et al. (s.f.) exploran herramientas como GeoGebra para representar simultáneamente en un plano cartesiano las funciones componentes $x(t)$, $y(t)$ y la curva resultante, observando la emergencia progresiva del razonamiento gráfico, aunque frecuentemente anclado aún en visualizaciones sin articulación conceptual plena.

En contraste con el enfoque tradicional, varias propuestas didácticas han situado la gráfica como punto de partida del trabajo matemático, aunque lo han hecho desde fenómenos y propósitos distintos. Drijvers y Doorman (1996) diseñaron actividades en las que los estudiantes analizan recorridos físicos de móviles, ajustando gráficas en función de cambios en la velocidad y utilizando la calculadora gráfica para explorar variaciones en la trayectoria. Herman (2006), en cambio, introdujo las ecuaciones paramétricas mediante exploraciones con calculadora, donde los estudiantes visualizan cómo un punto recorre una curva en el plano a partir de las funciones $x(t)$ y $y(t)$, enfatizando el papel del parámetro como generador del movimiento más que la modelación de un fenómeno real. Kabaca (2013) trabajó con un fenómeno completamente distinto: la construcción dinámica de cicloides y epicicloides mediante GeoGebra, guiando a los estudiantes en la coordinación entre rotación y traslación para inferir la estructura paramétrica de la curva. De forma complementaria, Körei y Szilágyi (2022) articularon recorridos corporales y manipulativos físicos (LEGO) con representaciones digitales en Desmos, promoviendo una transición desde la acción motriz hacia la formulación funcional. Estas investigaciones coinciden en reconocer el potencial de la gráfica, pero difieren en los tipos de trayectorias, en los fenómenos representados y en la naturaleza del trabajo gráfico que promueven. Este contraste permite situar con precisión el aporte del presente estudio.

Paoletti y Moore (2017, 2019) describen la emergencia de un pensamiento gráfico funcional en tareas centradas en la covariación, donde los estudiantes introducen coordenadas paramétricas como respuesta intelectual a la necesidad de distinguir distintos recorridos en una misma trayectoria. Zengin (2023), por su parte, analiza cómo estudiantes universitarios construyen gráficas dinámicas en GeoGebra antes de deducir expresiones simbólicas, en un entorno colaborativo estructurado mediante el método ACODESA. Esta inversión del orden habitual promueve la formulación de conjeturas, la argumentación estructurada y la reorganización de representaciones, lo que permite que tanto la gráfica como el parámetro emerjan como objetos de construcción. Aunque anclada en un enfoque socioconstructivista, su propuesta converge con principios de la Socioepistemología al situar la representación en el centro de la práctica argumentativa mediada por tecnología.

Con base en el enfoque APOS, Stalvey y Vidakovic (2015) muestran que, incluso sin expresiones simbólicas, los estudiantes pueden construir representaciones del tipo $x(t)$, $y(t)$, donde las coordenadas espaciales x y y se conciben como funciones de un parámetro t, a partir de situaciones reales, como el vaciado de recipientes. Identifican construcciones fundamentales que permiten conceptualizar el parámetro como variable organizadora, y destacan el rol epistémico de la gráfica en esta transición. En el campo de la modelación física, Sokolowski (2021) propone que la parametrización se enseñe como herramienta para construir significado –y no como mera técnica simbólica– al permitir establecer relaciones entre posición, velocidad y aceleración. Su propuesta parte del análisis de la trayectoria y refuerza la necesidad de invertir el enfoque tradicional para favorecer una comprensión más profunda del fenómeno representado.

Desde la Socioepistemología, se propone una resignificación de la gráfica, que tiene un carácter estructural. Según Suárez y Cordero (2010), la gráfica no debe entenderse como simple representación de la función simbólica, sino como una herramienta de modelación situada, cuyo uso se organiza en torno a tres momentos, que desarrollaremos en el apartado teórico. Esta perspectiva, aplicada recientemente a la enseñanza de las funciones paramétricas (López-Flores y Carrillo, 2025), permite diseñar tareas donde la gráfica se construye sin apoyo simbólico, a partir de la interpretación de una situación, y en las que el parámetro emerge como variable organizadora y no como un dato dado.

El presente estudio se inscribe en esa línea de trabajo. Tiene por objetivo analizar cómo estudiantes universitarios transitan por los tres momentos del uso de la gráfica –planteados desde la Socioepistemología– en tareas de modelación con funciones paramétricas sin apoyo simbólico, caracterizando los funcionamientos y formas que emergen en dicho tránsito. Para ello, se realiza un análisis cualitativo de sus producciones gráficas y registros discursivos en el marco de dos situaciones paralelas de modelación de fenómenos de movimiento en el plano (el giro de una rueda de la fortuna y un recorrido ascendente sobre un mapa), diseñadas para promover la construcción, justificación y generalización de comportamientos gráficos a partir de la interpretación de dichos fenómenos.

2. Marco teórico

La presente investigación se sustenta en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013; Cantoral & Farfán, 2003), que propone estudiar el conocimiento matemático como resultado de prácticas sociales históricamente situadas, más que como un conjunto de objetos abstractos universales. En esta perspectiva, las representaciones gráficas no son solo ilustraciones auxiliares, sino herramientas cuyo significado depende de los usos que los sujetos construyen en prácticas de modelación. La gráfica puede operar como objeto productor de conocimiento, capaz de organizar, anticipar, validar o contradecir hipótesis construidas a partir de una situación matemática (Suárez, 2014).

Para el estudio de dichos usos retomamos la categoría de *Modelación–Graficación* (Suárez y Cordero, 2010) como un eje teórico-metodológico para la reorganización del conocimiento matemático escolar, particularmente en torno al Cálculo. Estos autores plantean que el uso de la gráfica en procesos de modelación puede analizarse mediante tres momentos organizados mediante el binomio Funcionamiento–Forma (Fu–Fo). Este binomio permite caracterizar las razones que posibilitan la modelación de fenómenos de variación (los funcionamientos) y las configuraciones representacionales que los sostienen (las formas); esto constituye lo que Suárez (2014) define como una epistemología del desarrollo del uso de las gráficas en la modelación.

Suárez (2014), a través del estudio del *Tratado* de Oresme, identifica estos dos elementos intrínsecos al uso de la gráfica y los formaliza mediante el binomio Fu–Fo. A continuación, se describen los tres momentos, conservando los Fu–Fo planteados por Suárez (2014) y articulando su interpretación para situaciones cuya representación requiere una parametrización.

Momento I. *Establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento de las gráficas*.

Se caracteriza por la construcción inicial del objeto gráfico. El *primer uso de la gráfica en el Tratado se refiere a comprender fenómenos de variación a través de figuras (Uso-1)*. Este uso determina una ruptura con la forma tradicional de estudiar el movimiento y da lugar a una forma inicial (Fo-1) basada en figuras geométricas que permiten organizar el fenómeno aun sin una estructura algebraica explícita.

Esta reorganización introduce *un funcionamiento alternativo para comprender fenómenos (Fu-1)*: las figuras dejan de operar como simples ilustraciones y se convierten en instrumentos para analizar la variación. Para ello, se establece *una nueva forma que consistía en asignar medidas a las variables físicas por medio de segmentos (Fo-2)*, lo cual resignifica prácticas preexistentes y abre un nuevo modo de razonar sobre el cambio.

Esta reorganización conceptual constituye el punto de partida para el desarrollo posterior del uso de la gráfica en el *Tratado*.

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

Extensión del Momento I al contexto paramétrico

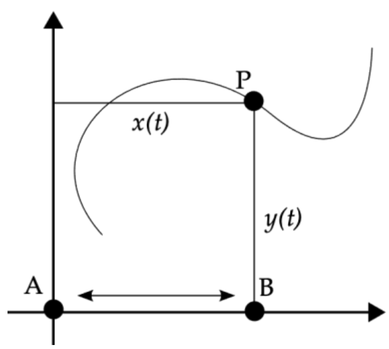
Si bien los momentos fueron propuestos para situaciones de movimiento rectilíneo, su estructura se adapta de manera natural a fenómenos representados mediante una parametrización. La situación que analizamos puede entenderse como un fenómeno de variación en el sentido del Uso-1: un objeto se desplaza siguiendo una trayectoria. La ruptura aparece en que dicho movimiento ya no es rectilíneo, sino curvilíneo, pudiendo incluso autointersectarse.

Desde esta perspectiva no es posible modelar el fenómeno con una sola figura o gráfica: la distancia del objeto al origen no captura toda la variación involucrada. Es necesario descomponer el fenómeno en dos relaciones de variación, cada una expresada mediante un segmento variable: la distancia horizontal $x(t)$ y la distancia vertical $y(t)$.

En la Figura 1 se ilustra el caso de $x(t)$. El punto B es la proyección de P sobre el eje X; al desplazarse P la distancia entre A y B cambia, constituyendo un fenómeno rectilíneo de variación entre dos puntos. La misma lectura puede hacerse para $y(t)$.

Figura 1

Trayectoria de objeto en un plano



Nota. Explicación de $x(t)$ como un movimiento rectilíneo.

De este modo, en una trayectoria paramétrica, comprender fenómenos (Fu-1) y asignar medidas por medio de segmentos (Fo-2) se traduce en caracterizar simultáneamente cómo cambian dichas distancias a los ejes. En términos funcionales, ello implica analizar de manera sincronizada $x(t)$ y $y(t)$ como funciones del tiempo, dando lugar a un primer uso de la gráfica, adecuado para modelar el movimiento del punto P sobre la trayectoria. Aquí el parámetro tiempo adquiere un papel organizador del fenómeno, pues provee una estructura común para coordinar simultáneamente las variaciones de $x(t)$ y $y(t)$, sirve de puente para el análisis coordinado de la situación de movimiento a través de sus gráficas componentes y esta función se mantiene a lo largo de los tres momentos. Actúa como un eje articulador de la extensión del modelo.

Momento II. *Construcción de argumentos en el uso de la gráfica*.

Una vez establecido el nuevo uso del momento anterior (Fu-1) mediante la forma correspondiente (Fo-2), las figuras comienzan a emplearse para establecer relaciones entre dichas configuraciones geométricas y las situaciones de variación que representan. Esto da lugar a un nuevo funcionamiento (Fu-2) orientado *a establecer relaciones entre las figuras geométricas y las situaciones de variación* que modelan.

Para que este funcionamiento sea posible, emerge una nueva forma (Fo-3) que permite *discriminar las figuras que representan situaciones de movimiento de aquellas que no lo representan*. Con esta forma se consolida una notación gráfica que distingue las configuraciones pertinentes para el análisis del cambio.

En este momento aparece un nuevo uso de la gráfica (Uso-2), caracterizado por la *construcción de argumentos* basados en la estructura de la gráfica y en su correspondencia con el fenómeno modelado.

Extensión del Momento II al contexto paramétrico

En representaciones paramétricas, este funcionamiento adquiere un carácter distintivo. El Fu-2 establece relaciones entre la figura y la situación de variación, requiere ahora vincular dos gráficos simultáneamente: las funciones componentes $x(t)$ y $y(t)$. La correspondencia argumento–fenómeno ya no se da en una sola gráfica, sino en la coordinación entre ambas, lo que amplía el dominio del Momento II hacia un escenario bidimensional no considerado originalmente, donde el parámetro tiempo permite el análisis sincronizado de las componentes.

La forma discriminativa (Fo-3) se vuelve doble: los estudiantes deben determinar qué tramos de $x(t)$ y qué tramos de $y(t)$ representan eventos específicos del recorrido. En consecuencia, el Uso-2 en este contexto consiste en construir argumentos que explican el comportamiento de la trayectoria a partir de la relación funcional y temporal entre ambas gráficas.

Momento III. *Puesta en funcionamiento de la gráfica en la modelación*.

En este momento se observa un avance en la capacidad de distinguir entre cantidad y cualidad de movimiento, lo cual da lugar a un nuevo funcionamiento (Fu-3) orientado a caracterizar variaciones complejas del fenómeno a partir de la gráfica. Este funcionamiento permite desarrollar generalizaciones del uso de la gráfica, sustentadas en una nueva forma

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

(Fo-4) que posibilita la identificación de puntos extremos de variación, la asignación de áreas o la transición hacia relaciones numéricas o analíticas derivadas de la representación gráfica.

Estas generalizaciones permiten que la gráfica se emplee para construir representaciones nuevas o para adaptar modelos previamente elaborados. Con ello emerge un nuevo uso (Uso-3), en el que la gráfica opera como herramienta para generalizar comportamientos del fenómeno, extender criterios construidos en situaciones anteriores y anticipar dinámicas no observadas directamente.

Extensión del Momento III al contexto paramétrico

En este contexto este momento se manifiesta cuando los estudiantes utilizan las gráficas componentes $x(t)$ y $y(t)$ para interpretar y generalizar el comportamiento global de la trayectoria, más allá de la descripción o justificación local propia de los momentos anteriores. En este marco, el Fu-3 se orienta a identificar patrones de variación que se repiten, como tramos rectos, paradas o cambios de velocidad y a transferir criterios construidos previamente para anticipar comportamientos bajo nuevas condiciones del movimiento. En este nivel, el parámetro tiempo actúa como un eje de coordinación que permite transferir criterios entre $x(t)$ y $y(t)$, posibilitando la generalización de patrones de manera coherente entre ambas gráficas.

La Fo-4 implica el uso de representaciones gráficas que permiten reconocer configuraciones globales del fenómeno y establecer criterios de generalización a partir del análisis de las dos variaciones simultáneas. Esta forma no se refiere a la coordinación funcional de las componentes, sino a la capacidad de emplear la gráfica para extender y reinterpretar modelos construidos con anterioridad.

En consecuencia, el Uso-3 se expresa cuando se recurre al par de gráficas para generalizar comportamientos del fenómeno, comparar situaciones y anticipar efectos de modificaciones en la trayectoria, ya sea dentro de una misma situación o entre situaciones distintas.

2.2. Las funciones paramétricas y su enseñanza tradicional

Una función paramétrica permite representar trayectorias en el plano o el espacio mediante un par de funciones que dependen de una misma variable. Formalmente:

> Trayectorias y curvas. Una trayectoria en R^n es una aplicación $c: [a, b] \to R^n$, es una trayectoria en el plano si n=2 y una trayectoria en el espacio si n=3. La colección C de los puntos c(t) cuando t recorre [a, b] se llama curva, c(a) y c(b) son sus extremos. Se dice que c parametriza la curva C. Decimos también que c(t) traza C al variar t.
>
> Si c es un camino en R^3, podemos escribir $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t), y(t) y\ z(t)$, las funciones componentes de c. (Marsden & Tromba, 2004, p. 136)

En este marco, es común interpretar al parámetro t como el tiempo, y a $c(t)$ como la posición de una partícula en dicho instante, lo que permite concebir la curva como una trayectoria generada dinámicamente.

Este enfoque, frecuentemente adoptado en cursos universitarios de Cálculo Vectorial y Geometría Analítica, enfatiza el carácter técnico y utilitario de la parametrización. Las actividades típicas implican hallar una parametrización conveniente para una curva dada, eliminar el parámetro para obtener una expresión cartesiana, o seleccionar entre distintas parametrizaciones según la facilidad de integración en problemas físicos o geométricos (López-Flores & Carrillo, 2025), así como por su interpretación a partir de algún software de graficación (Borji & Alamolhodaei, 2020; Williner et al., 2019). Marsden y Tromba (2004) afirman, por ejemplo, que es conveniente elegir una parametrización adecuada para simplificar cálculos o asegurar que las integrales sobre trayectorias dependan únicamente de la curva imagen y no de la forma particular en que se recorre. Este tipo de justificaciones refuerzan una visión instrumental de la parametrización y subordina la gráfica a la expresión simbólica.

Esta visión instrumental tiene también implicaciones epistémicas; Janvier (1998) advierte que concebir la gráfica como una "crónica" de un evento puede limitar su comprensión como objeto funcional. En el caso de las funciones paramétricas ocurre lo inverso: al no representarse el parámetro en el plano, se corre el riesgo de interpretar la curva solo como figura geométrica, sin reconocer que surge de dos relaciones funcionales coordinadas. Así, la ausencia del tiempo puede invisibilizar su papel estructurante en la representación del fenómeno.

Uno de los principales obstáculos documentados en la literatura es la dificultad de los estudiantes para interpretar el recorrido de una curva parametrizada, especialmente cuando deben vincular el trazo con una progresión temporal implícita (Borji & Alamolhodaei, 2020). Asimismo, se ha observado que los estudiantes tienden a considerar una única forma de parametrizar una trayectoria, sin advertir que diferentes formas de recorrerla –con pausas, aceleraciones o cambios de dirección– producen pares distintos de funciones componentes, lo cual rara vez es abordado en la enseñanza tradicional. Esta es otra de las ideas que se rescatan para el diseño de las dos actividades que se aplicaron, cambios en la forma de recorrer la trayectoria implican cambios en las gráficas que los modelan.

Estos ajustes representan una parte intrínseca del significado de modelar usando una parametrización, para el caso de nuestro diseño, asume cambios de velocidad y paradas en el trayecto, lo que implica estiramientos o encogimientos horizontales o la presencia de rectas horizontales respectivamente.

En síntesis, una representación paramétrica no sólo describe una trayectoria mediante dos funciones componentes, sino que introduce una forma particular de variación doble y simultánea que no aparece en las funciones cartesianas. Esta estructura obliga a que la interpretación del fenómeno dependa de la coordinación entre $x(t)$ y $y(t)$, y no de cada gráfica por separado. Por ello, la parametrización reorganiza el papel de la gráfica en la modelación, exige distinguir qué aspectos del recorrido se expresan en cada componente, cómo se articulan temporalmente y de qué manera esa articulación permite anticipar, comparar o generalizar comportamientos del movimiento. Estas exigencias, propias de la representación paramétrica, abren la necesidad de analizar su uso mediante el binomio Funcionamiento–Forma y justifican la extensión del modelo de Suárez y Cordero (2010) a contextos donde la variación es intrínsecamente bidimensional.

3. Metodología

3.1. Enfoque metodológico

Este estudio se enmarca en una perspectiva cualitativa de carácter interpretativo, centrada en el análisis de las producciones de los estudiantes al resolver tareas de modelación con funciones paramétricas. El propósito fue identificar la emergencia de distintos usos de la gráfica durante el desarrollo de las actividades.

3.2. Participantes

Participaron ocho estudiantes universitarios inscritos en el curso Laboratorio de Estadística y Cálculo de Varias Variables de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. De forma paralela, todos cursaban la asignatura de Cálculo Multivariado, lo que garantiza que habían tenido contacto reciente con nociones de variación, representación gráfica y análisis funcional, aspectos relevantes para el estudio del uso de la gráfica en contextos de modelación.

La selección del grupo obedeció a criterios de pertinencia teórica: se buscó contar con estudiantes que, aun disponiendo de conocimientos formales sobre funciones y gráficas, no hubieran trabajado previamente con representaciones paramétricas desde una perspectiva de modelación. Esto permite observar la construcción y reorganización de usos de la gráfica en un contexto donde los conocimientos previos no determinan por completo las producciones, pero sí posibilitan que emerjan funcionamientos y formas propios del modelo Fu–Fo.

Todos los participantes eran mayores de edad y aceptaron voluntariamente colaborar en el estudio. Desde el inicio del curso se les informó que sus actividades serían documentadas con fines de investigación, resguardando su anonimato y la confidencialidad de sus producciones.

3.3. Diseño de actividades

Se diseñaron dos activades bajo una misma lógica didáctica, orientada a promover el tránsito de los estudiantes por los distintos usos de la gráfica, particularmente, su construcción, su empleo para argumentar y su utilización para generalizar comportamientos, en contextos de modelación con funciones paramétricas. El diseño se fundamentó en el principio socioepistemológico de que el uso de la gráfica emerge de las condiciones que la situación hace posibles; por ello, las actividades fueron construidas como situaciones de variación que permiten la aparición y reorganización de funcionamientos y formas del modelo Fu–Fo.

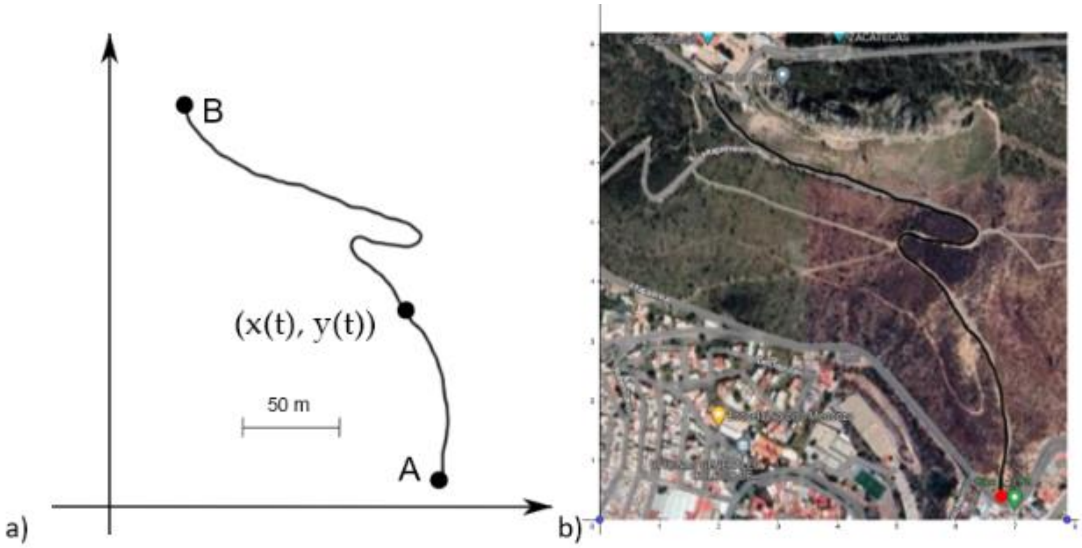
- **Actividad 1. La rueda de la fortuna**. Los estudiantes analizaron el movimiento de una canasta en una rueda de la fortuna de 60 m de diámetro, ubicada a 3 m del piso y a 45 m de un edificio. Se solicitó construir dos gráficas: la altura de la canasta respecto al piso y la distancia al edificio, ambas en función del tiempo. La elección de esta situación responde a que la circunferencia constituye un objeto matemático previamente trabajado por los estudiantes, lo que ofrece un referente familiar para la construcción inicial de funcionamientos y formas asociados al uso de la gráfica. En una segunda fase, la tarea incorporó una detención breve de la rueda, lo que requería ajustar las gráficas iniciales para integrar este nuevo evento dentro del modelo.
- **Actividad 2. Paseo por la Bufa**. Los estudiantes modelaron el movimiento de una persona que recorre un trayecto en un plano, construyendo las funciones $x(t)$ y $y(t)$ que representan su distancia a los ejes en función del tiempo. Posteriormente, se introdujo una fase adicional que incluía un ascenso al Cerro de la Bufa, con pendientes, cambios de ritmo y una detención intermedia, como se ilustra en la Figura 2. Esta modificación exigía reconfigurar las gráficas previamente construidas,

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

favoreciendo la aparición de funcionamientos asociados a la coordinación de dos variaciones simultáneas.

Figura 2

Trayectoria con y sin contexto



Nota. Representación del recorrido del Paseo por la Bufa. a) Diagrama esquemático del recorrido. b) Trayecto marcado sobre imagen satelital, adaptada de Google (2025).

Durante las actividades, el profesor intervino mediante preguntas de acompañamiento destinadas a mantener el foco en el fenómeno y a favorecer la explicitación de los criterios que los estudiantes ponían en juego. Estas intervenciones no introdujeron procedimientos matemáticos adicionales y formaron parte del dispositivo previsto en el diseño de la actividad.

Como parte integral del diseño, ambas actividades incluyeron una fase final de contraste mediante simulaciones en GeoGebra, cuyo propósito era ofrecer un marco de comparación que permitiera a los estudiantes validar o ajustar sus modelos gráficos. Aunque esta herramienta formó parte del diseño, su papel se limita en esta sección a la descripción metodológica, sin derivaciones analíticas.

3.4. Procedimiento de implementación y recolección de datos

Antes de implementar las actividades con los estudiantes participantes, se realizó un pilotaje con profesoras de matemáticas en formación de posgrado, en el marco de un seminario sobre modelación con tecnología (López-Flores & Carrillo, 2024). Esta fase permitió evaluar la claridad de las consignas y ajustar el uso de simulaciones digitales, fortaleciendo la validez del diseño, previo a su aplicación en el presente estudio.

Las actividades se implementaron en tres sesiones presenciales de aproximadamente 90 minutos cada una. Los estudiantes se organizaron en tres equipos autoconformados (uno de dos integrantes y dos de tres), que resolvieron de manera colaborativa las dos actividades diseñadas. El anonimato de los participantes se resguardó en todo momento.

Las producciones gráficas se realizaron de forma manuscrita; en algunos casos, cada integrante generó su propia representación. Al finalizar las sesiones, todas las producciones se digitalizaron para su posterior análisis. La interacción fue registrada mediante audio y video, combinando grabaciones fijas y tomas móviles para documentar los procesos de argumentación asociados a la construcción de las gráficas.

3.5. Estrategia de análisis

El análisis siguió un enfoque cualitativo socioepistemológico. La unidad de análisis fue cada realización gráfica junto con los enunciados empleados por los estudiantes para describir, justificar o ajustar su construcción. El modelo Funcionamiento–Forma (Fu–Fo) y los tres momentos del uso de la gráfica guiaron la identificación de evidencias de construcción, argumentación y generalización.

Las producciones gráficas y los registros discursivos se organizaron por equipos, privilegiando los funcionamientos colectivos más allá de las trayectorias individuales. Para la presentación de resultados se seleccionó un equipo como caso ejemplar, criterio fundamentado en la claridad y completitud de las articulaciones Fu–Fo observadas, sin excluir que los restantes equipos mostraron patrones equivalentes.

Las transcripciones se realizaron con *Whisper* en Google Colab y la diarización de hablantes se efectuó manualmente para asegurar precisión. Los fragmentos incluidos corresponden a episodios en los que los estudiantes expresan explícitamente criterios que vinculan la gráfica con el fenómeno modelado.

4. Resultados

Los análisis se presentan a partir del modelo Funcionamiento–Forma y de los tres momentos del uso de la gráfica. En la Actividad 1, la trayectoria conocida facilitó la construcción inicial de las gráficas componente y la identificación de variaciones fundamentales. En la Actividad 2, la ausencia de una expresión analítica obligó a reorganizar criterios gráficos previamente construidos, especialmente ante cambios de ritmo, tramos horizontales y variaciones en la pendiente.

En conjunto, las evidencias muestran que los estudiantes movilizaron funcionamientos y formas coherentes con el modelo original, adaptándolos a la coordinación simultánea de dos variaciones, propia de las representaciones paramétricas.

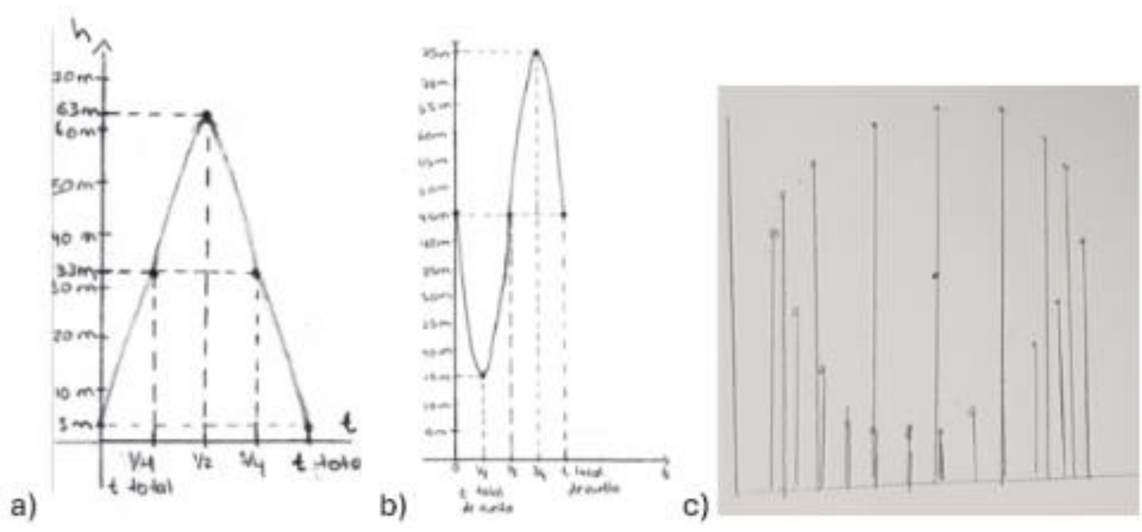
4.1. Actividad 1. Momento I. Establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento de las gráficas en la modelación

En este primer momento se observa la construcción inicial del objeto gráfico a partir de elementos geométricos básicos, estimaciones del fenómeno y una primera numerización del tiempo. De acuerdo con el modelo Fu–Fo, esta fase se caracteriza por el establecimiento de una forma inicial (Fo-1) basada en figuras que permiten organizar el fenómeno sin una estructura algebraica explícita, y por la emergencia de un funcionamiento inicial (Fu-1) orientado a comprender la variación mediante configuraciones gráficas.

En la actividad de la rueda de la fortuna, los estudiantes delimitaron los valores extremos de las funciones componente, $y(t)$, entre 3 y 63 metros; para $x(t)$, entre 15 y 75 metros y asignaron explícitamente las variables a los ejes. En las Figuras 3-a, 3-b y 3-c se aprecia este proceso temprano de estructuración: marcas en los ejes, intervalos temporales estimados y trazos geométricos que sugieren comportamientos crecientes y decrecientes. Estos elementos constituyen indicadores claros de Fo-2: la asignación de magnitudes mediante segmentos para organizar la variación.

Figura 3

Modelado gráfico creado por los estudiantes



Nota. Producciones gráficas en el modelado de $x(t)$ y $y(t)$.

A continuación, se presentan fragmentos representativos que ilustran este funcionamiento, las frases entre corchetes son señalamientos nuestros, con el propósito de facilitar la comprensión del lector, contextualizar o añadir precisión:

> Estudiante 1: Dice que sube 3 metros, por así decirlo sube a 63 en su punto más alto, en el punto medio de la rueda, por lo tanto, esto sería 33 metros [*señala el 33 en el eje y*].
>
> Estudiante 2: Pero el chiste es la gráfica. Se me ocurren segmentos que vayan de aquí hasta aquí [*el estudiante 2 señala con el lápiz, segmentos de recta que van del eje X a la rueda, en distintos puntos de ese eje, considerando intervalos con una misma tendencia*].

Posteriormente, los estudiantes avanzan hacia la construcción geométrica de la variación, identificando mediante comparaciones figurales cuándo la magnitud aumenta, alcanza un valor máximo y luego disminuye:

> Estudiante 2: Vas a empezar en tiempo cero segundos, porque ahí todavía no comienza y estará a una altura de 3 metros, aquí, después va a avanzar acá y va a ser, no sé cuánto se tarde, digamos dos segundos y después otros segundos y va a aumentar.
>
> Estudiante 1: ¿Es como una creciente? Va a llegar a un punto máximo y va a bajar creo...

En conjunto, el análisis de esta fase muestra que los estudiantes lograron:

- Fo-1: Establecer una forma inicial de representación basada en figuras geométricas.
- Fo-2: Asignar la variación a segmentos que representan magnitudes físicas.
- Fu-1: Comprender el fenómeno de variación a través de relaciones espaciales y figurales, sin requerir expresiones analíticas.

Este comportamiento es congruente con el Momento I del modelo original y confirma que, aun tratándose de una situación paramétrica, los estudiantes reproducen el proceso socioepistemológico de construcción inicial del objeto gráfico antes de cualquier formalización o argumentación.

4.2. Actividad 1. Momento II. Construcción de argumentos en el uso de las gráficas en la modelación

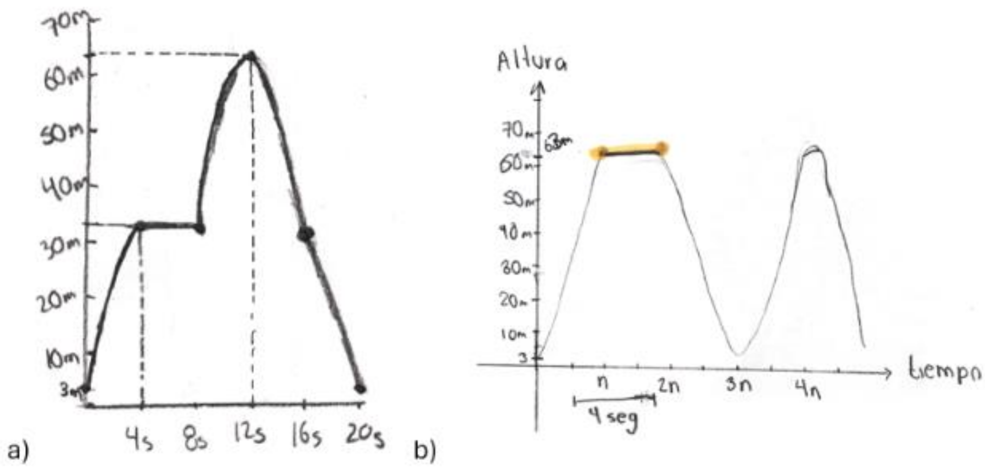
En este segundo momento, las representaciones comienzan a emplearse para explicar, justificar y ajustar el modelo, superando su función organizadora inicial. De acuerdo con el modelo Fu–Fo, esto corresponde al tránsito hacia un nuevo funcionamiento (Fu-2), orientado a establecer relaciones entre las configuraciones gráficas y los eventos del fenómeno, sostenido por una forma discriminativa (Fo-3) que permite distinguir qué tramos representan efectivamente el movimiento y cuáles requieren modificación.

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

En la actividad de la rueda de la fortuna, esta transición se hace visible cuando los estudiantes interpretan la detención de la cabina y ajustan la gráfica para incorporar un tramo horizontal, como se observa en la Figura 4. Este segmento de pendiente nula surge como resultado de reconocer que, durante el reposo, la magnitud se mantiene constante mientras el tiempo avanza.

Figura 4

Ajustes de las gráficas



Nota. Los estudiantes ajustan el modelo gráfico ante la incorporación de una parada en el recorrido.

En este momento los estudiantes articulan lo que ocurre en el mundo representado con la forma de la gráfica, y comienzan a usar la gráfica como medio para construir sentido, más allá de su función ilustrativa inicial. El siguiente fragmento ilustra este proceso:

> Estudiante 2: Supongamos que se para en el punto máximo [*señala una cabina de la rueda de la fortuna, relaciona el punto en que se detiene con el punto máximo*].
> Estudiante 1: Se para 4 segundos.
> Estudiante 2: Solo hazla hasta aquí [*señala el punto más alto de la rueda*], y que se para 4 segundos. y voy a poner una recta así, va a ser constante en ese momento y después ya podemos decir que va a bajar [*hacen el ajuste de la gráfica inicial, como respuesta al cambio de la situación, señalan la Figura 4-a*].
> …
> Estudiante 2: En ese momento el tiempo va a seguir corriendo, pero la distancia va a ser la misma [*la distancia de la cabina al piso*], y por eso se forma la recta.

Este intercambio revela tres elementos característicos del Momento II:

- Fo-3: los estudiantes reconocen que la gráfica original ya no representa el fenómeno e introducen un tramo horizontal para incorporar el reposo.

- Fu-2: justifican que “el tiempo sigue corriendo, pero la distancia es la misma”, articulando la recta horizontal con el comportamiento físico.
- Uso-2: emplean la gráfica como un medio argumentativo, utilizando el trazo para explicar y no solo para ilustrar.

Las producciones de las Figuras 4-a y 4-b refuerzan estas características, pues en ambas el tramo horizontal aparece como una decisión deliberada y justificada. Si bien la evidencia más clara proviene de la función $y(t)$, el procedimiento evidencia la estructura completa del Momento II en contextos paramétricos: discriminar tramos relevantes y justificarlos en cada componente. En conjunto, estos elementos confirman que los estudiantes ajustan y argumentan sus gráficas en correspondencia con el fenómeno modelado.

4.3. Actividad 1. Momento III. Puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación

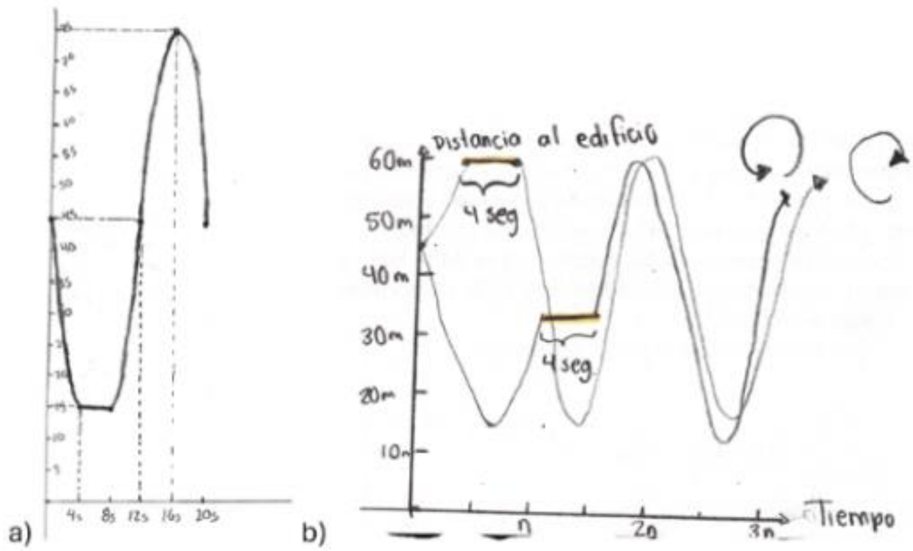
En este tercer momento, las gráficas dejan de operar únicamente como herramientas descriptivas o justificativas y comienzan a funcionar como instrumentos de generalización y producción de nuevas representaciones. En términos del modelo Fu–Fo, esto corresponde a la emergencia de un nuevo funcionamiento (Fu-3), orientado a extender criterios construidos previamente, sostenido por una forma (Fo-4) que permite trabajar con configuraciones aplicables a distintas magnitudes del fenómeno.

En la Actividad 1, esta transición se manifiesta cuando los estudiantes construyen primero el ajuste gráfico de una de las componentes ($x(t)$), incorporando el tramo horizontal correspondiente a la detención, y posteriormente trasladan ese mismo criterio a la otra función, $y(t)$, sin requerir un análisis desde cero. Esta transferencia funcional se aprecia en la Figura 5.

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

Figura 5

Generalización de criterios de ajuste de $x(t)$ y $y(t)$



Nota. a) Ajuste en función $x(t)$; b) Ajuste en función $y(t)$.

Este comportamiento revela tres rasgos centrales del Momento III:

- Fu-3: los estudiantes generalizan el funcionamiento gráfico transfiriendo criterios construidos en una componente hacia la otra, como la representación del reposo mediante un tramo horizontal, asumiendo que ambas dependen del mismo parámetro temporal. Esta generalización entre componentes es distintiva de situaciones paramétricas.
- Fo-4: las configuraciones elaboradas, como el tramo horizontal, dejan de ser soluciones puntuales y se convierten en formas estables que pueden aplicarse a cualquier magnitud que modele el movimiento, otorgando a la gráfica un funcionamiento que trasciende la tarea específica.
- Uso-3: los estudiantes producen nuevas representaciones, $y(t)$ a partir de $x(t)$, o viceversa, mediante la transferencia coherente de criterios gráficos, consolidando un sistema coordinado de representaciones.

Este momento confirma la extensión paramétrica del modelo: en contextos bivariados, la generalización no solo se realiza dentro de una gráfica, sino entre las funciones componente, lo que constituye una puesta en funcionamiento plena de la representación gráfica en la modelación.

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

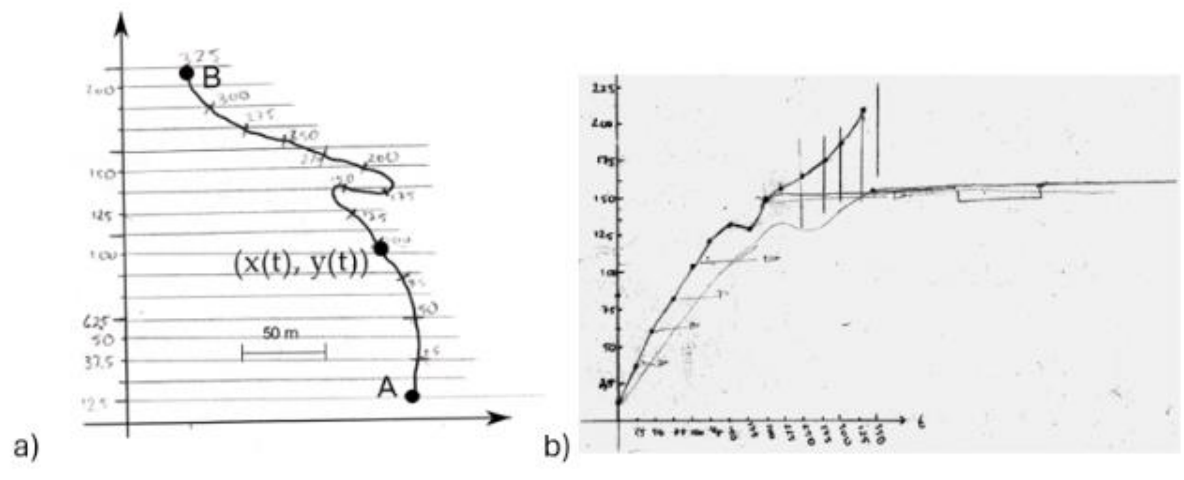
4.4. Actividad 2. Momento I. Establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento de las gráficas en la modelación

En la segunda actividad, centrada en un recorrido ascendente representado sobre un mapa, los estudiantes abordan una situación sin una expresión simbólica disponible. Como en la Actividad 1, los estudiantes inician delimitando valores mínimos y máximos y asignando variables a los ejes, lo cual constituye nuevamente Fo-1: la configuración inicial que permite organizar el fenómeno sin apoyo simbólico. Acto seguido, pasan a Fo-2, asignando magnitudes mediante segmentos para estructurar la variación. En esta actividad, dicha asignación se realiza a través de la partición equidistante del trayecto y su traslado al eje temporal, lo que introduce una novedad propia del trabajo paramétrico: la construcción simultánea de la variación espacial y temporal.

El equipo ejemplar segmentó la trayectoria en marcas de 25 m –asumiendo velocidad constante según la consigna– y proyectó esas referencias hacia el eje vertical, transfiriendo directamente las longitudes resultantes al bosquejo de $x(t)$ (Figuras 6-a y 6-b). Este procedimiento, coherente con Fu-1, muestra que la variación se comprende inicialmente como una transformación geométrica del trayecto que luego se temporaliza.

Figura 6

Segmentación y numerización del recorrido a velocidad constante



Nota. a) Trayectoria con marcas de referencia; b) Construcción progresiva del gráfico de tipo $x(t)$.

El siguiente fragmento ilustra el criterio empleado:

Profesor: ¿Qué son esas marcas que pusiste sobre la trayectoria?
Estudiante 1: Traté de aproximar un poco sobre la misma trayectoria marcas de 25 metros, por así decirlo, considerando esta escala de aquí [*señala las marcas sobre la trayectoria, Figura* 6-*a*].

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

Profesor: Ok. ¿Para que puedas ver qué cosa?

Estudiante 1: Para medir la distancia total de toda la línea y considerar un tiempo, si son un metro por segundo, serían aquí 25 segundos, aquí serían 50 segundos, y así de 25 en 25 hasta el final [*para la gráfica de* $x(t)$ *no tiene el total del recorrido, lo aproxima con estos valores*].

En el bosquejo preliminar, el mismo estudiante comenta:

Estudiante 1: Me parece un poco más sencillo, ya simplemente ir con un tiempo definido, qué altura va a ir teniendo, aproximada en ese momento, por ejemplo, en la marca de 100 metros [*procede a trazar los valores de 25 en 25 en el eje* $x(t)$, *y a bosquejar la gráfica* 6-*b*], quedarían más o menos 125.

Este fragmento muestra cómo el parámetro tiempo funciona como organizador de la construcción gráfica. El estudiante traduce marcas espaciales en intervalos temporales y utiliza esa estructura para anticipar la variación en ambas funciones componente. Esto confirma que los funcionamientos iniciales (Fu-1) y las formas asociadas (Fo-1/Fo-2) emergen de la articulación entre recorrido y ritmo temporal.

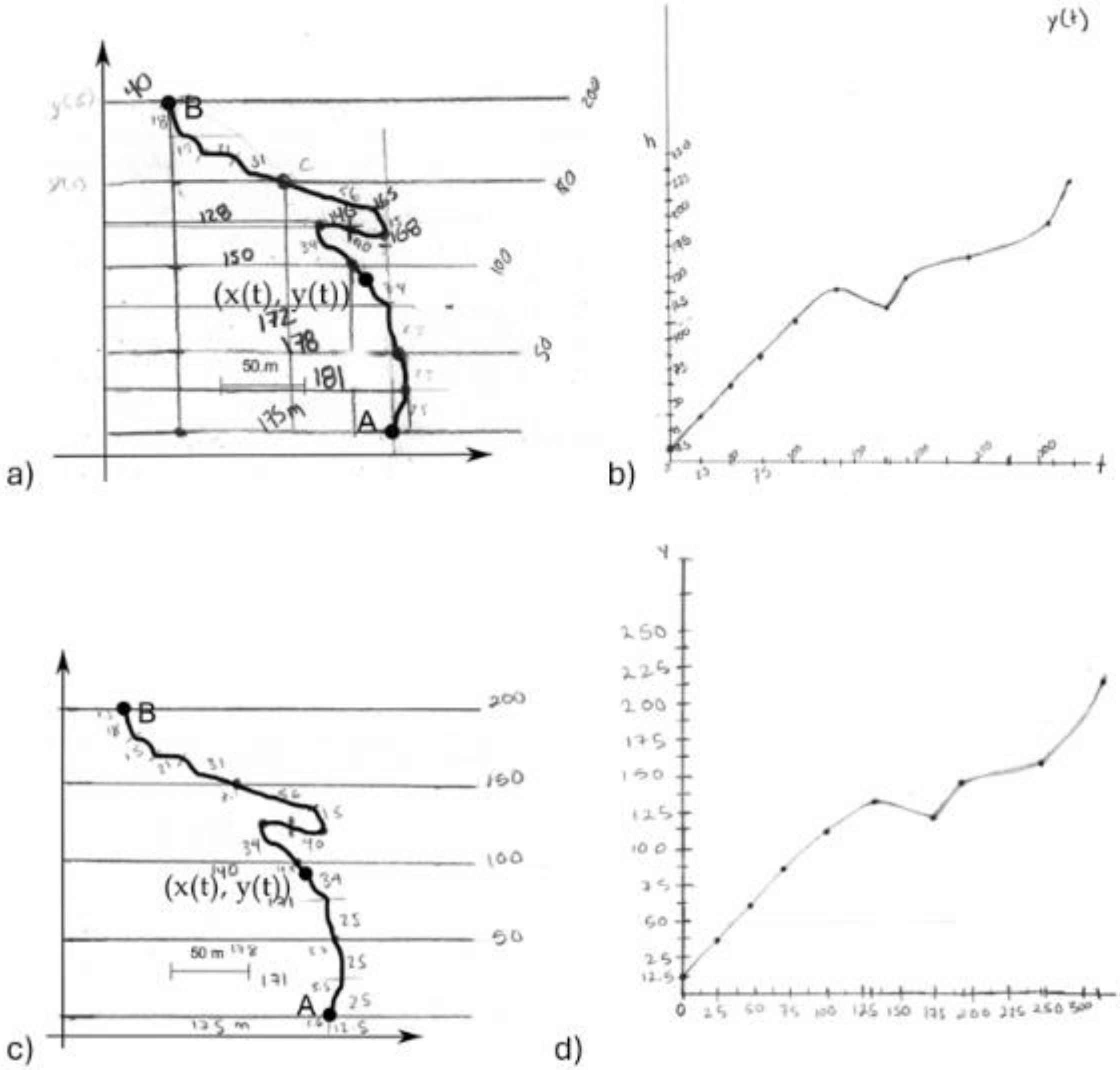
Este procedimiento revela tres rasgos característicos del Momento I:

- Fo-1: delimitación inicial, marcando mínimos, máximos, variables en los ejes;
- Fo-2: asignación de magnitudes mediante segmentación y transferencia;
- Fu-1: comprensión geométrica de la variación y su traducción al tiempo.

El mismo tipo de análisis apareció en los demás equipos. La Figura 7 muestra cómo, con variaciones en la estrategia, marcar primero referencias verticales o trabajar simultáneamente con ambas coordenadas, recurrieron a segmentación, proyección y transferencia para construir las gráficas iniciales de $x(t)$ y $y(t)$. Las gráficas resultantes (Figuras 7-b y 7-d) exhiben la misma lógica de construcción por tramos, confirmando la generalidad del funcionamiento identificado.

Figura 7

Producciones de estudiantes sobre el recorrido, con enfoque en la construcción inicial



Nota. a–c) Representaciones espaciales con marcas; b–d) Gráficas correspondientes obtenidas por segmentación y transferencia.

En conjunto, estas realizaciones muestran que la actividad provocó un funcionamiento inicial consistente, organizar la variación del recorrido mediante configuraciones geométricas, asignar medidas a los segmentos relevantes (Fo-2) y establecer las condiciones de la futura coordinación entre $x(t)$ y $y(t)$.

4.5. Actividad 2. Momento II. Construcción de argumentos en el uso de las gráficas en la modelación

Tras el bosquejo inicial de $x(t)$, la situación incorpora dos nuevas condiciones del recorrido: una subida (que modifica la velocidad) y una detención. En este punto la gráfica deja de funcionar como simple registro (Fu-1) y comienza a operar como herramienta de argumentación (Fu-2), mediante la discriminación de tramos relevantes (Fo-3).

La primera transformación se originó en la discusión sobre el efecto de la subida. Ante la pregunta del profesor acerca de cómo se representa una disminución de velocidad, los estudiantes concluyeron que *tardar más en recorrer la misma distancia* implica un estiramiento horizontal. Esta interpretación se materializa en la Figura 6-b, donde la versión ajustada del trazo aparece desplazada hacia la derecha mediante flechas que indican la dilatación temporal.

Previo al intercambio transcrito, el profesor orientó a localizar el tramo donde cambia la pendiente del recorrido y a anticipar que un aumento en el tiempo debe reflejarse en la gráfica. El siguiente fragmento muestra la articulación explícita del ajuste:

> Estudiante 3: Tardaría más en crecer [*establece el comportamiento gráfico*].
> Profesor: ¿Qué cosa?
> Estudiante 3: Tardaría más en crecer. En la gráfica.
> Profesor: ¿Cómo traduciríamos eso en la gráfica?
> Estudiante 2: Bueno, la altura sería así, pero el punto se recorrería más a la derecha, ¿no? Porque tarda más [*justifica el estiramiento horizontal*].
> Profesor: Haz el bosquejo.
> Estudiante 2: Estos puntos se trasladan un poco hacia la derecha, hasta que llegue a esta misma altura, aparte de cuando llegue a esa altura, pues ya se mantiene [*En la Figura 6-b traza unas flechas horizontales, indicando el estiramiento de la gráfica, establece el nuevo comportamiento*].

Este intercambio evidencia el paso de la lectura geométrica inicial (Momento I) a una interpretación funcional de la variación. El estudiante distingue qué tramo debe modificarse (Fo-3) y por qué (Fu-2), justificando la transformación mediante la relación entre distancia y tiempo.

La segunda modificación del recorrido, la detención en un punto específico, profundiza esta transición hacia el uso argumentativo de la gráfica. La siguiente intervención ilustra cómo interpretan la pausa:

Estudiante 2: Cuando se quedó fijo llegó a esta altura, pasó un tiempo caminando y luego aquí es donde se queda fijo. Y en este lapso sigue teniendo la misma altura [*señala la Figura 6-b, en donde traza una recta horizontal*], nada más lo que avanza es el tiempo.

Aquí aparece de forma nítida la pendiente nula como representación de la detención, justificada directamente en términos del fenómeno: la magnitud permanece constante mientras el tiempo continúa avanzando.

En conjunto, estos pasajes muestran que los estudiantes:

- Fo-3: discriminan qué tramos deben modificarse para reflejar los cambios del recorrido,
- Fu-2: establecen correspondencias explícitas entre tiempo, distancia y movimiento,
- Uso-2: emplean la gráfica como un instrumento argumentativo para interpretar variaciones en velocidad y pausas.

La gráfica ajustada representada en la Figura 6-b constituye evidencia directa de la consolidación del Momento II en el uso de la gráfica para modelar el recorrido.

4.6. Actividad 2. Momento III. Puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación

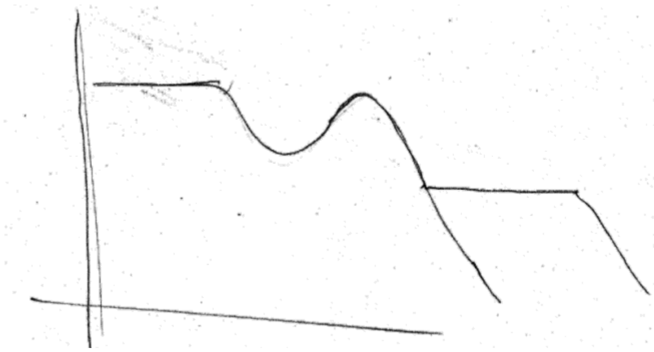
Tras haber construido y justificado los ajustes en la gráfica de $x(t)$, los estudiantes trasladan estos mismos criterios a la construcción de $y(t)$. La transición entre ambas gráficas ocurre de manera casi inmediata, lo cual sugiere una generalización del funcionamiento gráfico previamente elaborado: no es necesario reconstruir la situación desde cero, sino aplicar un criterio ya operativizado en una primera gráfica a una segunda relación de variación. Así, las transformaciones construidas para $x(t)$ funcionan como criterio reutilizable, puesto en operación sin una mediación discursiva extensa durante la elaboración de $y(t)$.

La Figura 8 muestra uno de los bosquejos de $y(t)$ producidos por el equipo ejemplar. En él se distinguen tramos ascendentes y descendentes relacionados con la topografía del recorrido, junto con segmentos horizontales que representan la pausa. El trazo se genera de manera rápida, y la argumentación posterior se limita a justificar los rasgos ya incorporados, lo cual es consistente con el Uso-3, donde la gráfica se usa para extender criterios previamente establecidos.

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

Figura 8

Ajuste de $y(t)$ a partir del criterio usado en $x(t)$



Nota. La gráfica refleja subidas, bajadas y detenciones mediante curvaturas y tramos horizontales.

El siguiente diálogo muestra cómo la forma básica de la gráfica se asume ya consensuada, y la discusión se dirige únicamente a ajustar tramos conforme a la situación:

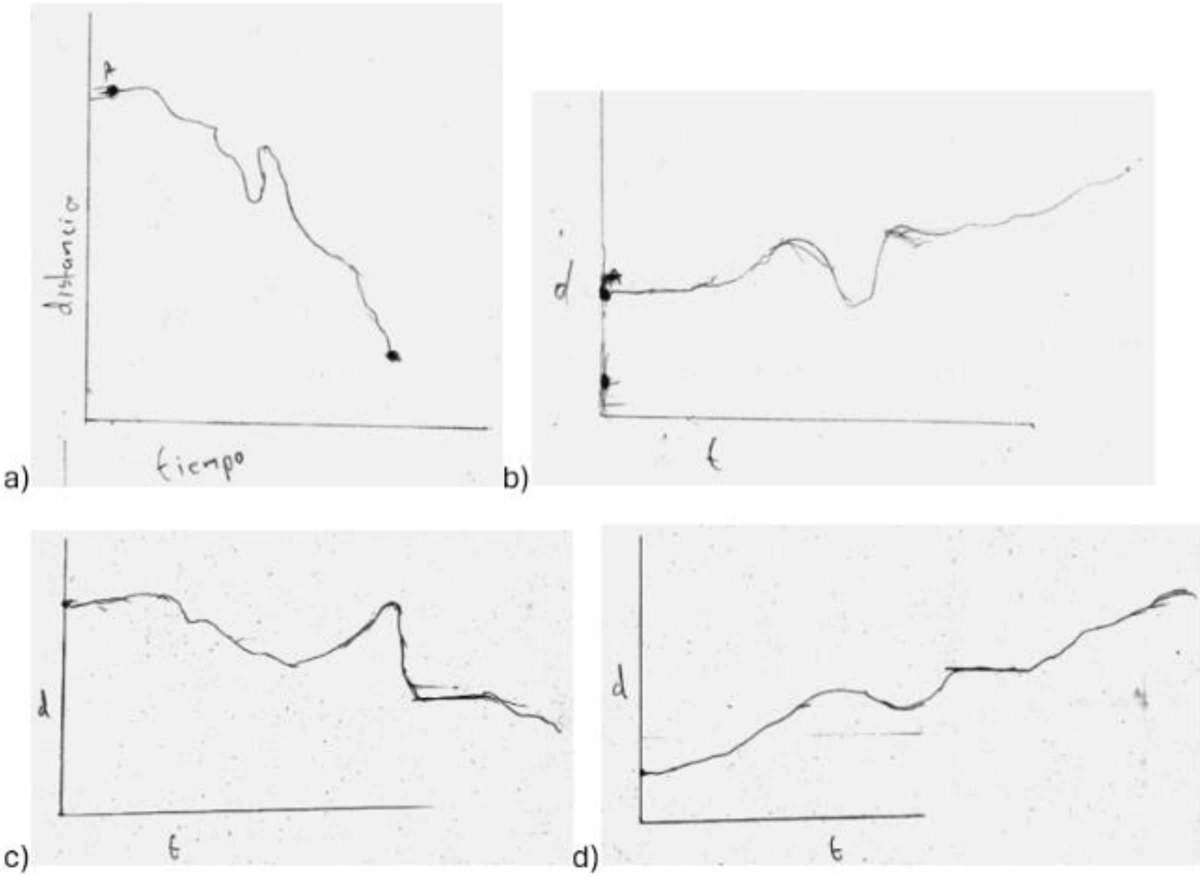
> Profesor: Ok, la otra gráfica, ¿cómo queda ahí entonces?
>
> Estudiante 2: En este tramo sería... Esta subida de aquí. Baja, sube, que sería hacer esto de aquí, estas curvitas. Y luego ya de aquí hacia acá se vuelve a bajar [*procede a trazar rápidamente un bosquejo de $y(t)$, que vemos en la Figura 8]*. Lo que pasaría es que, si aquí se detuviera, mantendría esta misma... durante un tiempo y cuando se vuelve a poner en movimiento, vuelve a bajar la gráfica [*traza el bosquejo modificado de $y(t)$, poniendo un segmento horizontal*].

En los demás equipos se observaron patrones similares. Como ilustra la Figura 9, todos incorporaron modificaciones asociadas a estiramientos horizontales ante cambios de velocidad; segmentos constantes asociados con pausas; curvaturas ascendentes o descendentes según la pendiente del recorrido.

Aunque variaron en suavidad o nivel de numerización, en todos los casos se aprecia que los estudiantes reutilizan criterios construidos en una gráfica para ajustar la otra, sin requerir reconstruir el razonamiento desde cero.

Figura 9

Variaciones gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ en respuesta a cambios de velocidad y detención



Nota. a) Bosquejo de $x(t)$; b) $x(t)$ modificado; c) bosquejo de $y(t)$; d) $y(t)$ modificado.

En conjunto, estas producciones constituyen evidencia clara del Momento III. En términos del modelo Fu-Fo:

- Fu-3: los estudiantes identifican y generalizan patrones globales del movimiento, estiramientos horizontales, tramos constantes y variaciones en el ascenso o descenso y los transfieren de manera coherente de $x(t)$ a $y(t)$.
- Fo-4: se apoyan en configuraciones gráficas suficientemente estables para permitir la reutilización de criterios entre dos variaciones simultáneas, propias del escenario paramétrico.
- Uso-3: emplean la gráfica como herramienta para extender y adaptar criterios previamente construidos, poniendo en funcionamiento elementos desarrollados en los momentos anteriores y articulándolos en un contexto bidimensional.

Vol. 28, e683 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e683

Este cierre confirma que, incluso sin un modelo analítico disponible, los estudiantes son capaces de construir una generalización gráfica coherente y consistente con la estructura teórica del momento.

5. Discusión y conclusiones

Los resultados permiten sostener que los estudiantes, al trabajar con funciones paramétricas sin una expresión algebraica preexistente, reproducen los tres momentos del modelo Fu–Fo de Suárez, pero al mismo tiempo introducen usos, funcionamientos y formas que no aparecen en el escenario unidimensional. Estas regularidades emergentes –visibles en la construcción, el ajuste y la generalización gráfica– muestran que el uso de la gráfica en contextos paramétricos no es una simple extensión técnica, sino una reorganización que requiere coordinar dos variaciones simultáneas a partir de un único fenómeno.

A partir de esta evidencia, proponemos tres descriptores nuevos, que constituyen una extensión paramétrica del modelo Fu–Fo. Cada descriptor sintetiza las acciones observadas en los estudiantes y delimita las exigencias epistémicas propias de la modelación gráfica con funciones paramétricas.

5.1. Forma Paramétrica Inicial (Fo-P1)

Los estudiantes construyeron las primeras representaciones asignando magnitudes mediante segmentos, proyectando distancias y delimitando intervalos temporales sin apoyo algebraico. Este comportamiento reproduce Fo-1 y Fo-2, pero simultáneamente introduce una característica inexistente en el escenario unidimensional, para poder organizar la variación temporal, los estudiantes debieron construir primero la estructura espacial bidimensional del fenómeno.

Esta forma emergente se caracteriza por la necesidad de (1) leer la trayectoria como un objeto geométrico que gobierna ambas funciones componente, (2) la construcción de dos magnitudes coordenadas que deberán ser relacionadas posteriormente, (3) la numerización simultánea de tiempo y espacio, indispensable para que el fenómeno adquiera coherencia paramétrica. Denominamos este rasgo Forma Paramétrica Inicial (Fo-P1), pues constituye la base gráfica sobre la cual se desplegarán los funcionamientos posteriores.

5.2. Funcionamiento Paramétrico Argumentativo (Fu-P2)

Cuando la situación se modifica (cambios de velocidad, detenciones), los estudiantes ajustan las gráficas introduciendo estiramientos horizontales y tramos constantes. Este uso corresponde al segundo momento del modelo original (Fu-2), pero en el caso paramétrico adquiere una exigencia adicional, los argumentos construidos para una gráfica deben preservarse simultáneamente en la otra, pues ambas representan variaciones distintas de un mismo fenómeno.

Los estudiantes no ajustan $x(t)$ de manera aislada, reconocen que todo cambio en el recorrido debe tener una correspondencia necesaria en $y(t)$.

Esto da lugar a un funcionamiento argumentativo nuevo, caracterizado por (1) la coordinación obligada entre dos narrativas de variación, (2) la construcción de criterios gráficos que deben ser consistentes para ambas funciones, (3) la comprensión de que todo ajuste formal responde a una condición física del movimiento compartida por $x(t)$ y $y(t)$. Llamamos a este rasgo Funcionamiento Paramétrico Argumentativo (Fu-P2).

5.3. Funcionamiento Paramétrico de Generalización (Fu-P3)

Una vez establecidos los criterios para ajustar $x(t)$, los estudiantes los transfieren directamente a $y(t)$ sin necesidad de reconstruir el razonamiento. No discuten nuevamente la forma del trazo, asumen la generalización como obligatoria.

Este comportamiento corresponde al Uso-3 del modelo original, pero en el contexto paramétrico introduce un funcionamiento más sofisticado, el criterio gráfico deja de ser atributo de una sola función y pasa a operar como un regulador transversal del sistema paramétrico.

Este funcionamiento se caracteriza por (1) la reutilización estructurada de criterios previamente elaborados, (2) la transferencia automática del razonamiento entre funciones componente, (3) la comprensión de la gráfica como modelo capaz de coordinar variaciones simultáneas. A este patrón le damos el nombre de Funcionamiento Paramétrico de Generalización (Fu-P3).

5.4. Aporte teórico consolidado

En conjunto, Fo-P1, Fu-P2 y Fu-P3 configuran una extensión explícita del modelo Fu–Fo para funciones paramétricas, sustentada empíricamente en dos actividades de modelación sin apoyo algebraico. La extensión no modifica los momentos originales, pero introduce descriptores propios del trabajo bidimensional, necesarios para comprender cómo se construye, se argumenta y se generaliza en un escenario donde las dos funciones componente deben ser coherentes con un mismo fenómeno.

Estos resultados constituyen el aporte central del estudio, la formulación de un modelo Fu–Fo paramétrico, basado en evidencia, que permite explicar la reorganización del uso de la gráfica cuando se modelan trayectorias con funciones paramétricas.

5.5. Diálogo con investigaciones previas y aportaciones del estudio

Estos hallazgos dialogan de manera directa con investigaciones como las de Drijvers y Doorman (1996), Herman (2006), Kabaca (2013) y Körei y Szilágyi (2022), quienes destacan el papel de las gráficas en la exploración visual, la acción corporal o la manipulación de artefactos para comprender fenómenos. A diferencia de estos trabajos, centrados en el uso de gráficas como mediadores perceptuales o experimentales, el presente estudio muestra que, en contextos paramétricos, la gráfica asume un papel estructurante, permite inferir magnitudes no visibles, construir el tiempo a partir del espacio, identificar efectos funcionales de cambios de velocidad y generalizar criterios entre dos coordenadas. Esta aportación teórica, formalizada en las categorías Fo-P1, Fu-P2 y Fu-P3, no había sido descrita en estudios previos y ofrece una caracterización más precisa de los usos de la gráfica en modelación paramétrica.

Asimismo, los resultados amplían discusiones recientes (Borji & Alamolhodaei, 2020; Williner et al., 2019) sobre las dificultades de los estudiantes para situar el tiempo en una curva parametrizada sin fórmula explícita. En nuestro estudio, el parámetro tiempo desempeña un papel organizador del análisis: estructura la segmentación del recorrido, orienta la construcción de $x(t)$ y $y(t)$ y permite justificar transformaciones asociadas a cambios de velocidad o pausas. A partir de esta organización temporal, los estudiantes resolvieron la dificultad reportada en la literatura mediante la gráfica misma: las segmentaciones, marcas espaciales y proyecciones horizontales funcionaron como herramientas para construir temporalidad y modelar variación. Esto muestra que, incluso en ausencia de lenguaje algebraico, es posible producir modelos gráficos robustos que articulen tiempo, espacio y cambio.

Desde el punto de vista del diseño, uno de los objetivos del estudio fue incorporar simuladores digitales para ampliar las posibilidades de validación y análisis gráfico. Sin embargo, su impacto fue limitado: aunque los estudiantes reconocieron semejanzas formales con sus construcciones, no generaron argumentos adicionales ni realizaron ajustes significativos. Esto sugiere que el uso de la tecnología requiere condiciones didácticas adicionales para activar su potencial argumentativo, lo que abre una línea futura de investigación.

En conjunto, los hallazgos muestran que es posible diseñar tareas de modelación gráfica que, en contextos paramétricos, propicien la emergencia de formas y funcionamientos específicos del uso de la gráfica. El estudio aporta, además, una extensión operativa del modelo Fu–Fo para funciones paramétricas, proponiendo las categorías Fo-P1, Fu-P2 y Fu-P3 como descriptores de los usos observados en escenarios donde deben coordinarse dos relaciones de variación. Futuras investigaciones podrían explorar cómo estos funcionamientos se integran con recursos digitales más interactivos o cómo evolucionan en niveles avanzados del currículo donde el estudiante debe transitar entre modelos gráficos, algebraicos y computacionales.

Declaración de contribución y autoría

José Iván López-Flores: Conceptualización, Curación de datos, Análisis Formal, Investigación, Metodología, Administración del proyecto, Supervisión, Validación, Visualización, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición.

Carolina Carrillo García: Conceptualización, Curación de datos, Análisis Formal, Investigación, Metodología, Administración del proyecto, Supervisión, Validación, Visualización, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición.

Declaración de uso de Inteligencia Artificial

Se utilizó ChatGPT (versión 5.3) con el propósito de parafrasear y sintetizar algunos párrafos de la revisión de literatura y no exceder la extensión solicitada en las normas de publicación. La y el autores revisaron y editaron el contenido generado por la herramienta, y asumen toda la responsabilidad por la versión final enviada a la Relime.

Agradecimientos

A la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México, por las facilidades para la realización de esta investigación y a las y los estudiantes que muy amablemente aceptaron participar en la misma.

Referencias

Bašić, M., & Šipuš, Ž. (2019). Students' understanding of the interplay between geometry and algebra in multidimensional analysis: Representations of curves and surfaces. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*. Utrecht University. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02422575

Borji, V., & Alamolhodaei, H. (2020). Complexities in university students' understanding of parametric equations and curves. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1788187

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A Vision of Its Evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 255–270. https://doi.org/10.1023/A:1026008829822

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Çekmez, E. (2019). Establishing the link between the graph of a parametric curve and the derivatives of its component functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(1), 115–130. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1663950

Dorko, A., & Weber, E. (2014). Generalising calculus ideas from two dimensions to three: how multivariable calculus students think about domain and range. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 269–287. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.919873

Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(5), 425–440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90027-9

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Falsetti, M. C., Favieri, A. G., Scorzo, R., & Williner, B. S. (2015). *Habilidades matemáticas y digitales en un hipertexto sobre parametrización* [Archivo PDF]. Universidad Nacional de La Matanza. http://repositoriocyt.unlam.edu.ar/handle/123456789/587

Google. (2025). *Google Maps* [imagen satelital del Paseo a la Bufa, Zacatecas]. https://maps.app.goo.gl/V4JpRYyALmd9CTuEA

Herman, M. (2006). Activities for Students: Introducing parametric equations through graphing calculator explorations. *Mathematics Teacher*, *99*(9), 637–640. https://doi.org/10.5951/MT.99.9.0637

Janvier, C. (1998). Comparison of teaching practices: An obstacle to the integration of graphic representation. En C. Janvier, N. Bednarz, & M. Belanger (Eds.), *Cultural aspects of the transition from arithmetic to algebra* (pp. 173–182). National Council of Teachers of Mathematics.

Kabaca, T. (2013). A model teaching for the cycloid curves by the use of dynamic software with multiple representations approach. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, *6*(3), 40–50. https://doi.org/10.5897/AJMCSR2013.0467

Keene, K. A. (2007). A characterization of dynamic reasoning: Reasoning with time as parameter. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(3), 230–246. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.003

Körei, A., & Szilágyi, S. (2022). Parametric graph project: Using LEGO gears for drawing curves. En T. Guarda, F. Portela, & M. F. Augusto (Eds.), *Advanced Research in Technologies, Information, Innovation and Sustainability* (pp. 101–114). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20319-0_8

López-Flores, J. I., & Carrillo, C. (2025). Modelación y GeoGebra. Una propuesta para la enseñanza de ecuaciones paramétricas en el nivel superior. En C. Sotelo Pichardo, J. E. Ortiz Delgado, J. A. del Río Ramírez, A. Cabral Valdez, D. Rodríguez Lemus & L. L. Hadechini Meza (Coords.), *Investigaciones educativas en torno de las Ciencias Exactas y su didáctica* (pp. 45–61). Paradoja Editores y Centro de Actualización del Magisterio. https://sites.google.com/camzac.edu.mx/publicaciones/p%C3%A1gina-principal/libros

López-Flores, J. I., & Carrillo, C. (2024). GeoGebra y modelación para clases online: Experiencias en un curso de Maestría en Matemática Educativa. En M. M. Ibarra Núñez, J. Rodríguez González, & I. F. Castillo Ruíz (Coords.), *Perspectivas en educación: Cultura, comunicación y tecnología* (pp. 65–79). InfoBroker Editorial. https://doi.org/10.5281/zenodo.12520375

Marsden, J. E., & Tromba, A. (2004). *Cálculo Vectorial* [Quinta Edición]. Pearson.

Merino, A. E., & Cueva, M. E. (2019). Elaboración de animaciones en GeoGebra para motivar el estudio de Geometría Analítica. En *Memorias del Congreso Internacional de Matemáticas, Computación y Formación Docente (CIMCFOD)* (pp. 75–82). Pontificia Universidad Católica del Ecuador.

Murphy, T. J., White, J. J., Stone, A. D., & Beauchamp, A. M. (s.f.). *Using web-based interactive graphics to enhance understanding of parametric equations: Lessons learned*. University of Oklahoma. https://www.math.ou.edu/~tjmurphy

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 137–151. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2019). Covariational and parametric reasoning. En *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)*. SIGMAA on RUME.

Rabiei, N., & Saleeby, E. G. (2021). Curve parametrization and triple integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–8. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1903592

Sokolowski, A., & Capraro, R. M. (2013). Students' understanding of the concept of parametric equations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(7), 420–426.

Sokolowski, A. (2021). Parametrization of Projectile Motion. En A. Sokolowski (Coord.), *Understanding Physics Using Mathematical Reasoning* (pp. 101-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80205-9_8

Stalvey, H. E., & Vidakovic, D. (2015). Students' reasoning about relationships between variables in a real-world problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 192–210. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.002

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Díaz de Santos.

Suárez, L., & Cordero, F. (2010). Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 319–333. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33558827006

Trigueros, M. (2007). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. En *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)* (pp. 127–134). https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/

Williner, B., Scorzo, R., & Favieri, A. (2019). Parametrizando curvas mediante un hipermedio: Una experiencia de cátedra. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *19*(2), 1–21. https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

Zengin, Y. (2023). Students' understanding of parametric equations in a collaborative technology-enhanced learning environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *54*(5), 740–766. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1966848