



## O ensino da Combinatória e sua razão de ser: trajetórias de uma formação de professores de Matemática

### The teaching of Combinatorics and its reason for being: trajectories in mathematics teacher education

Alan, Gustavo Ferreira

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.  

Paula, Moreira Baltar Bellemain

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.  

Cristiane, de Arimatéa Rocha

Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.  

#### Resumo

Este trabalho busca (re)significar o ensino da Combinatória, mobilizando suas razões de ser em um processo de estudo apoiado em um dispositivo didático, e articulando tais elementos à formação de professores, integrando saberes matemáticos e didáticos desse campo. O referencial teórico-metodológico desta pesquisa apoia-se na Teoria Antropológica do Didático e nos princípios da Engenharia Didática, estruturada em suas quatro fases: análise preliminar, análise *a priori*, análise *in vivo* e análise *a posteriori*. Um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) foi desenvolvido com um grupo de professores de Matemática no âmbito de um processo formativo. Os resultados indicam que o PEP ultrapassou os limites da Combinatória e da própria Matemática, assumindo um caráter interdisciplinar e possibilitando o estudo articulado de diferentes problemas de contagem, em contraste com o ensino tradicional segmentado. Além disso, sugere-se que o PEP produzido nessa pesquisa seja experimentado em turmas de Ensino Médio.

#### Palavras-chave:

- Combinatória
- Percurso de Estudo e Pesquisa
- Formação de Professores

#### Cómo citar:

Gustavo Ferreira, A., Moreira Baltar Bellemain, P., & de Arimatéa Rocha, C. (2025). O ensino da Combinatória e sua razão de ser: trajetórias de uma formação de professores de Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 28, e715. <https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e715>

---

**Abstract**

This study seeks to (re)define the teaching of combinatorics, mobilizing its rationale in a study process supported by a teaching device, and articulating these elements with teacher training, integrating mathematical and didactic knowledge in this field. The theoretical and methodological framework of this study is based on the Anthropological Theory of Didactics and is methodologically guided by the principles of Didactic Engineering, which encompassed its four phases: preliminary analysis, *a priori* analysis, *in vivo* analysis, and *a posteriori* analysis. A Study and Research Path was developed with a group of mathematics teachers as part of a training process. The results indicate that the SRP went beyond the limits of combinatorics and mathematics itself, taking on an interdisciplinary character and enabling the coordinated study of different counting problems, in contrast to traditional segmented teaching. In addition, the study highlighted the need for and importance of experiencing this SRP in high school classes.

**Keywords**

- *Combinatorics*
- *Study and Research Path*
- *Teacher Training*

---

**Resumen**

Este trabajo busca (re)significar la enseñanza de la Combinatoria, movilizándolo sus razones de ser en un proceso de estudio apoyado en un dispositivo didáctico, y articulando dichos elementos con la formación de profesores, integrando conocimientos matemáticos y didácticos de este campo. El marco teórico-metodológico de este estudio se basa en la Teoría Antropológica de la Didáctica y se orienta metodológicamente por los principios de la Ingeniería Didáctica, que abarcó sus cuatro fases: análisis preliminar, análisis *a priori*, análisis *in vivo* y análisis *a posteriori*. Se desarrolló un Recorrido de Estudio e Investigación con un grupo de profesores de Matemáticas en el ámbito de un proceso formativo. Los resultados indican que el REI superó los límites de la Combinatoria y de las propias Matemáticas, asumiendo un carácter interdisciplinario y permitiendo el estudio articulado de diferentes problemas de conteo, en contraste con la enseñanza tradicional segmentada. Además, el estudio evidenció la necesidad y la importancia de experimentar este REI en clases de Educación Secundaria.

**Palabras clave**

- *Combinatoria*
- *Recorrido de Estudio e Investigación*
- *Formación de Profesores*

---

**Résumé**

Ce travail vise à (re)signifier l'enseignement de la combinatoire, par la mise en évidence de ses raisons d'être, dans une démarche d'étude soutenue par un dispositif didactique, et par l'articulation de ces éléments avec la formation des enseignants, intégrant aussi bien des savoirs mathématiques que didactiques. Le cadre théorique et méthodologique de cette recherche repose sur la théorie anthropologique du didactique et sur les principes de l'ingénierie didactique, structurée en quatre phases: analyse préliminaire, analyse *a priori*, analyse *in vivo* et analyse *a posteriori*. Un parcours d'étude et de recherche (PER) a été élaboré avec un groupe d'enseignants de mathématiques dans le cadre d'une formation. Les résultats indiquent que le PER a dépassé les limites de la combinatoire et des mathématiques elles-mêmes, en adoptant un caractère interdisciplinaire et en permettant l'étude articulée de différents problèmes de dénombrement, contrairement à l'enseignement segmenté traditionnel. De plus, il est recommandé que le PER produit dans cette recherche soit expérimenté dans des classes de lycée.

**Most Clés**

- *Combinatoire*
- *Parcours d'études et de recherche*
- *Formation des enseignants*



## 1. Contextos e proposições

Na década de 1990, o Brasil vivenciou o início de uma série de reformas educacionais, com destaque para aquelas voltadas aos currículos da educação básica. Nesse contexto, destaca-se o advento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997), que representou um marco importante ao oferecer diretrizes para o ensino no país. No campo da Matemática, a publicação dos PCN trouxe contribuições significativas, entre as quais se ressalta a orientação para que os elementos da Combinatória fossem trabalhados desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Além disso, o documento repercutiu no modo de conceber e desenvolver o ensino desse ramo da Matemática na escolarização obrigatória, com a intenção de influenciar práticas pedagógicas e perspectivas curriculares.

Todavia, tais esforços de reforma curricular não se mostraram suficientes para promover mudanças substanciais nos processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos combinatórios. Estudos como os de Ferreira et al. (2016) e Esteves (2001) evidenciam a dificuldade de alunos de diferentes níveis na compreensão dos problemas e na aquisição dos conceitos concernentes a esse campo matemático. Em consonância com esse contexto, as pesquisas desenvolvidas por Martins (2018) e Campos e Iglioni (2021) comungam da ideia de que, ainda nos dias de hoje, o ensino da Combinatória está centrado em definições e fórmulas, em detrimento do desenvolvimento do raciocínio estratégico, o que torna o ensino pouco eficaz e distante de sua(s) razão(ões) de ser.

No âmbito internacional, estudos desenvolvidos em diferentes contextos também evidenciam a persistência de dificuldades na aprendizagem da Combinatória. Pesquisas realizadas na Indonésia (Desfitri, 2024), em Cuba (Quintana Álvarez et al., 2020), na Colômbia (Agudelo Zuluaga, 2018) e na Espanha (Roa et al., 1997) apontam que, embora situados em sistemas educacionais distintos e envolvendo diferentes níveis de ensino, os estudantes apresentam dificuldades convergentes. Entre essas, destacam-se o uso mecânico de fórmulas, frequentemente dissociado da compreensão dos problemas; a não compreensão dos enunciados e das condições combinatórias envolvidas; a realização de enumerações não sistemáticas, que resultam em omissões ou repetições; e a ausência ou fragilidade de estratégias heurísticas. Tal convergência sugere que essas dificuldades não são meramente locais ou contingentes, mas refletem aspectos estruturais do ensino e da aprendizagem da Combinatória, reforçando a necessidade de abordagens didáticas que privilegiem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão das situações-problema.



Por outro lado, a formação de professores de Matemática, tanto inicial quanto continuada, para o ensino desse campo, tem sido negligenciada e se mostrado pouco eficaz em municiar professores de saberes matemáticos e didáticos, a fim de que possam atuar de forma pertinente em suas classes. Tal cenário ratifica a necessidade de um desenvolvimento profissional suficiente na área de Combinatória (Ferreira et al., 2024; Lockwood et al., 2020).

É nesse contexto que este trabalho emerge, buscando atuar em três frentes principais. A primeira consiste em suscitar o (re)aparecimento das razões de ser da Combinatória e de suas funcionalidades. Em seguida, propõe-se colocá-las em jogo em um processo de estudo fundamentado num dispositivo didático capaz de contemplar esse tipo de atividade matemática. Por fim, objetiva-se articular esses elementos em um processo formativo de professores, de modo a municiá-los, articuladamente, com saberes matemáticos e didáticos específicos desse campo. Importa destacar, contudo, que, embora tais ações sejam apresentadas em sequência, elas ocorrem de forma simultânea e integrada, compondo um movimento articulado de investigação e formação.

É nesse horizonte que elegemos, entre os quadros teóricos da Didática da Matemática, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Chevallard (1999; 2013) e colaboradores, que tem despontado como um importante referencial teórico-metodológico. Um postulado básico da TAD, adotado neste trabalho, é que toda atividade humana regularmente realizada pode ser descrita por meio de um modelo, denominado praxeologia<sup>1</sup>.

No seio da TAD surge também um importante dispositivo didático, chamado de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), que busca suscitar o (re)aparecimento do(s) sentido(s) e funcionalidade(s) dos saberes estudados a partir da articulação de um questionamento teórico e prático da atividade matemática escolar.

O PEP tem se destacado como um dispositivo teórico-metodológico capaz de articular ensino, pesquisa e formação profissional em diferentes cenários. Evidencia-se sua viabilidade para reorganizar os processos de estudo a partir de questões geradoras (Florensa et al., 2019), enquanto, no ensino de conteúdos específicos, contribui para superar abordagens centradas na aplicação mecânica de fórmulas (Santos Júnior; Dias; Bosch, 2019). No âmbito da formação de professores, configura-se como um dispositivo potente para a investigação e o desenvolvimento profissional (Freitas; Almouloud, 2023), indicando, de modo mais amplo, seu potencial para enfrentar a fragmentação dos saberes por meio de práticas baseadas na investigação e na modelização (Sánchez Ordóñez, 2013).



Desse modo, o presente estudo, constituído por um extrato da tese de doutorado do primeiro autor, tem como objetivo principal analisar um PEP capaz de suscitar uma possível razão de ser da Combinatória e que foi vivenciado por um grupo de professores de Matemática que participaram de um processo formativo.

## 2. O paradigma de questionamento do mundo frente ao paradigma de visita às obras

Entre as teorizações da TAD, Chevallard (2005; 2013) identifica e caracteriza um fenômeno didático presente nos sistemas de ensino, denominado monumentalização dos saberes. Esse fenômeno pode ser compreendido a partir de uma analogia com uma visita a um museu, na qual um guia conduz uma pessoa ou um grupo a admirar os monumentos expostos. Nessa situação, as obras só podem ser observadas e admiradas, sem que seja permitido tocá-las, manipulá-las ou aproximar-se demasiado. De forma análoga, nas instituições de ensino, a Matemática é frequentemente apresentada como um monumento a ser honrado e admirado, cujas utilidades, atuais ou passadas, são raramente exploradas. Os professores convidam os estudantes a “visitar” o conhecimento, sem alterá-lo, transformá-lo ou desconstruí-lo.

Esse fenômeno do monumentalismo está inscrito em um paradigma didático denominado por Chevallard (2013) de Paradigma de Visita às Obras, no qual uma situação de ensino produz um sistema didático  $S(X, Y, O)$ . Nesse sistema,  $O$  representa uma obra ou praxeologia que um conjunto de estudantes  $X$  deve estudar com a ajuda de um ou mais professores  $Y$ .

Nesse contexto, o saber matemático é tratado como imutável, bastando apresentá-lo, o que reduz a autonomia dos estudantes e transforma-os, muitas vezes, em meros espectadores. Ao professor cabe uma apresentação discursiva e, em casos mais extremos, autoritária, silenciando questionamentos. Características desse modelo, como rigidez, isolamento temático, algoritmização e autossuficiência da matemática escolar, dialogam com a forma como o ensino de Combinatória ainda é conduzido no Brasil.

Apesar de sua dominância histórica, Chevallard (2013) aponta que esse paradigma se encontra em decadência. O autor argumenta que isso acontece porque esse paradigma tende a dar pouco sentido às obras visitadas, levantando questionamentos como “Por que isso aparece aqui?”, “Qual é a sua utilidade?”, cujas respostas nem sempre são claras ou podem mesmo ser inexistentes.



Opondo-se ao paradigma monumentalista, o enfoque antropológico propõe o paradigma da investigação e do questionamento de mundo, que ainda não é dominante. A atividade de questionamento é o motor do processo de estudos, buscando resgatar o sentido e a utilidade dos saberes. Chevallard (2007) considera que um programa escolar deveria ser composto por perguntas  $Q$  cuja resposta  $R$  seja construída e validada pela classe, pela cultura, pela sociedade e pela escola.

Nesse novo paradigma, o sistema adota a forma  $S(X, Y, Q)$ . Os estudantes  $X$  investigam e estudam uma pergunta  $Q$  sob a direção de um ou mais professores  $Y$ , com o objetivo de elaborar e desenvolver uma resposta  $R^\heartsuit$  à pergunta  $Q$ . O expoente  $\heartsuit$  indica que a resposta à pergunta  $Q$  se produz sob determinadas restrições às quais está sujeita, ou seja, não existe uma resposta universalmente efetiva à pergunta  $Q$  (Chevallard, 2009).

A questão que marca o início dos processos de estudo nesse paradigma é problemática, no sentido de que a princípio não pode ser resolvida diretamente com os elementos pertencentes ao sistema em que foi gerada. Ela exige a criação de diferentes tipos de modelos (conceituais, analógicos, gráficos, físicos ou matemáticos) do sistema em questão (ou de parte dele), a fim de reformular e simplificar a questão inicial e avançar em direção a uma possível resposta (Gáscon & Nicolás, 2021).

Segundo Chevallard (2013), esse novo paradigma se sustenta em três atitudes inter-relacionadas: herbartiana, procognitiva e exotérica. A atitude herbartiana remete à postura do cientista, que busca responder perguntas ainda não resolvidas, aplicável a qualquer cidadão. A atitude procognitiva consiste em pensar como se o conhecimento ainda estivesse para ser descoberto ou conquistado, em contraste com a retrocognitiva, que privilegia apenas o que já é conhecido. Já a atitude exotérica remete à disposição de aprender indefinidamente, mantendo-se na posição de aprendiz, em oposição ao status de esotérico, que já domina o saber. Essas atitudes orientam o estudo contínuo e crítico, central no paradigma de investigação e questionamento.

No âmago do paradigma da investigação e do questionamento de mundo, surge O PEP, um dispositivo didático que coloca as perguntas como ponto de partida dos estudos. Segundo Chevallard (1999), trata-se de perguntas em sentido forte, cujas respostas exigem a construção ou reconstrução de uma obra matemática, e não apenas a busca de informações. Apresentaremos, a seguir, os principais elementos teóricos que embasam o construto PEP.



### 3. Algumas considerações sobre o percurso de estudo e pesquisa

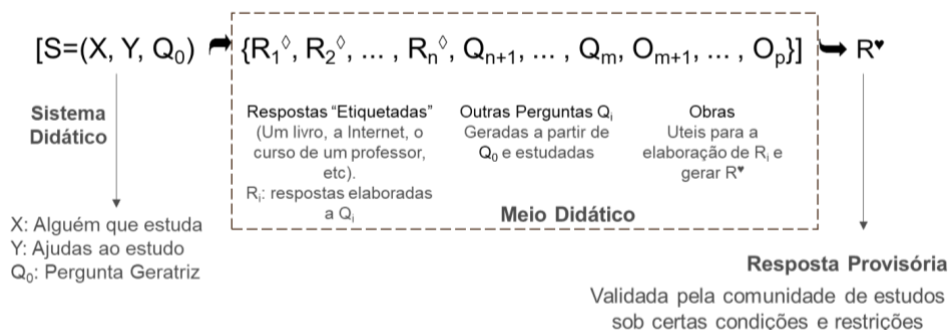
Chevallard (2009) destaca que o principal objetivo dos PEP é introduzir uma nova epistemologia, conferindo sentido e funcionalidade ao estudo escolar da matemática e rompendo, em certa medida, com o paradigma de Visita às Obras. Nesse sentido, é importante esclarecer que a configuração do sistema didático adotada no marco do novo paradigma coincide com aquela prevista nos PEP.

No desenvolvimento de um PEP, com a finalidade de produzir  $R^\heartsuit$ , o sistema didático  $S$  necessita de instrumentos, recursos, obras, ou seja, faz-se necessário criar um meio didático  $M$ . É esse sistema que fabrica e organiza o meio  $M$ , com o qual produzirá uma resposta  $R^\heartsuit$ . O meio  $M$  contém as perguntas geradas a partir de  $Q$  e as respostas já existentes e acessíveis à comunidade de estudo, que se denotam por  $R_i^\diamond$ , para  $i = 1, \dots, n$ . As respostas prontas são aquelas apresentadas, por exemplo, em um livro, na Web, em um curso ou fornecidas por um professor. O autor acrescenta que uma resposta  $R^\diamond$  não precisa ser “verdadeira” ou “válida”, pois cabe a  $X$  avaliar se essas respostas são relevantes e se são adequadas e pertinentes para a construção de  $R^\heartsuit$ . Esse aspecto também difere do gesto monumentalista, no qual as respostas fornecidas pelo professor são sempre garantidas pelo próprio professor.

Para elaborar a resposta  $R^\heartsuit$  apropriada, também são pertencentes a  $M$  entidades  $O_j$ , com  $j = n + 1, \dots, m$ , potencialmente úteis, como, por exemplo, teorias, praxeologias matemáticas ou não, isto é, obras de diferentes naturezas. Sendo assim, a partir do estudo combinado das respostas  $R^\diamond$  e das obras  $O$ , dá-se origem ao esquema herbartiano:

**Figura 1**

*Esquema herbartiano*



Nota. Traduzido de Otero (2021)



Para que o ensino por PEP ocorra, Chevallard (2009) afirma que a organização didática deve atender a três condições: mesogênese, topogênese e cronogênese. Na mesogênese, o meio didático  $M$  não é construído *a priori*, mas elaborado pela classe a partir de produções internas e externas, incluindo respostas dos alunos, incorporando recursos validados pela comunidade de estudo. A topogênese complementa a mesogênese, pois a construção de  $M$  é compartilhada entre professor(es) e estudantes; o professor orienta, mas não domina o processo, decidindo apenas sobre a incorporação final de certas obras. Já a cronogênese implica uma dilatação do tempo didático e do tempo de relógio, permitindo que a construção e o trabalho sobre  $M$  ocorram de forma expandida.

Realizar um ensino por meio de um PEP implica implementar gestos de estudo e investigação que se organizam segundo dialéticas, ou seja, processos opostos e complementares que orientam a interação entre os atores e o meio de estudo.

Chevallard (2007) identifica várias dialéticas centrais para o desenvolvimento de um PEP: a do estudo e da investigação, que combina estudo de perguntas e respostas com investigação; a análise e síntese praxeológica e didática, que orienta a construção de respostas a partir de saberes úteis; a do paraquedista e das trufas, que alterna visão panorâmica e análise detalhada; a de entrar e sair do tema, que permite expandir a investigação além do foco inicial; a das caixas negras e caixas claras, que seleciona o conhecimento relevante; a da leitura e da escrita, que privilegia o sentido das respostas parciais sem transcrição integral; a mídia-meio, que garante acesso a respostas já estabelecidas por diferentes meios; a do individual e do coletivo, que articula responsabilidades individuais e respostas coletivas; e a da produção e recepção, que assegura a justificativa e defesa das respostas construídas.

Assim, essas dialéticas estruturam o processo de elaboração de respostas  $R^\heartsuit$  a partir do meio  $M$ , das respostas  $R_i^\diamond$  e das obras  $O_j$ , articulando estudo, investigação, análise, síntese e interação coletiva no marco do PEP.

#### 4. Caminhos metodológicos

De modo semelhante ao trabalho de doutoramento, este artigo está balizado metodologicamente na Engenharia Didática (Chevallard, 2009; García et al., 2019; Barquero & Bosch, 2022), que no âmbito da TAD é estruturado em quatro fases, sobre as quais passamos a discorrer, sinteticamente, apoiados em Barquero e Bosch (2022) e García et al. (2019):



- A *análise preliminar* parte do conteúdo a ser ensinado e do problema didático associado, incluindo a análise epistemológica do saber e a identificação do modelo praxeológico dominante;
- Na *análise a priori*, o conteúdo é modelizado em dois níveis: matemático, definindo as praxeologias matemáticas, e didático, propondo como fazer emergir questões problemáticas em sequências de situações concretas;
- A *análise in vivo* consiste na experimentação do processo didático projetado, observação e produção de dados, servindo de ponte entre planejamento e avaliação;
- Por fim, a *análise a posteriori* busca testar e validar hipóteses a partir das evidências empíricas, podendo gerar novos problemas ou fenômenos didáticos, com base nas dialéticas do referencial teórico e nas funções da mesogênese, topogênese e cronogênese.

Para este artigo, apresentamos, na análise preliminar, um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) para o ensino de Combinatória no Ensino Médio.

Bosch (2019) ressalta que o MPR não constitui o modelo definitivo de um objeto de conhecimento, mas apenas uma possibilidade entre muitas, de caráter provisório, submetida ao teste empírico e em constante revisão. O modelo aqui elaborado não contempla todo o campo da Combinatória, restringindo-se aos problemas de contagem, considerados mais pertinentes ao nível do Ensino Médio.

Na análise *a priori*, elaboramos um mapa preliminar de questões derivadas, bem como de possíveis respostas para uma questão geradora de um PEP que busca suscitar uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória: “ $Q_0$ : Como criar um código eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?”. Esse esboço inicial serviu para confrontação, durante a análise *a posteriori*, do PEP efetivamente vivenciado durante a fase da experimentação (análise *in vivo*).

A análise *in vivo* correspondeu à fase experimental, na qual o PEP foi efetivamente vivenciado. O estudo empírico estendeu-se por 30 dias e compreendeu cinco encontros: três realizados de forma remota e síncrona; um realizado de maneira híbrida, com participantes reunidos presencialmente e também de forma remota; e um de caráter assíncrono. Cada encontro teve duração aproximada de 2h30min. As *plataformas* utilizadas foram o Google Meet, para os encontros síncronos, e o WhatsApp, para o encontro assíncrono.

O grupo participante foi composto por nove professores de Matemática, incluindo oito professores em serviço (licenciados e atuantes em diferentes níveis da educação básica) e um professor em formação inicial (que estava cursando a licenciatura em Matemática).



Neste trabalho, utilizamos o termo “professores” em sentido lato sensu, de modo a abranger ambos os perfis.

Como meio de produção de dados, foram considerados os registros elaborados coletivamente pelos participantes em cada sessão, bem como as gravações audiovisuais das chamadas realizadas via Google Meet. Entretanto, o material escrito entregue pelos professores ao término de cada encontro, juntamente com as apresentações e discussões ocorridas nas sessões plenárias (momentos em que os participantes socializavam suas produções e deliberavam sobre os passos subsequentes) constituiu o principal insumo para as análises desenvolvidas na etapa seguinte.

Na análise *a posteriori*, testamos, validamos e desenvolvemos as hipóteses que fundamentaram o PEP experimentado. Para isso, realizamos uma análise, partindo das evidências empíricas produzidas na fase anterior. Essa análise se apoiou nas dialéticas apresentadas no referencial teórico do estudo. Além disso, investigamos as condições e restrições dos módulos vivenciados, considerando as funções didáticas da mesogênese, cronogênese e topogênese.

A aplicação das fases da Engenharia Didática, que incluíram a análise preliminar, análise *a priori*, análise *in vivo* e análise *a posteriori*, possibilitou alcançar os objetivos estabelecidos.

## 5. Um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de Combinatória

Antes de explicitarmos o MPR para o campo da Combinatória, elaborado nesta pesquisa, especificamente para os problemas de contagem, faz-se necessário definir o que entendemos por Combinatória. Com base nas contribuições de Merayo (2015), Silva (2009), Hazzan (2013), e Borba et al. (2015) definimos Combinatória como o ramo da Matemática que estuda o desenvolvimento de métodos e técnicas de contagem de agrupamentos de elementos ou subconjuntos formados a partir de um ou mais conjunto(s) finito(s) dado(s), que obedeçam a certas condições para sua formação e que não necessitem listar ou enumerar esses elementos e/ou agrupamentos.

Tendo isso em vista, a Combinatória, conforme destacam Morgado et al. (1991) e Santos et al. (2008), compreende duas categorias principais de problemas: os de contagem e os de existência. Estes últimos dizem respeito àqueles que buscam demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado que satisfazem determinadas condições. Para a construção deste MPR, delimitamo-nos à primeira categoria, que tem por finalidade contar ou classificar subconjuntos de um ou mais conjuntos finitos, também sob certas condições. Esse tipo de problema é o mais recorrente nas fontes históricas e



encontra aplicações em diversas situações do cotidiano. Ademais, constitui a categoria mais trabalhada, quando não a única, no âmbito da educação básica, em especial no Ensino Médio.

No âmbito dos problemas de contagem, é possível identificar duas subcategorias. A primeira envolve situações em que se busca determinar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos, sob determinadas condições. A segunda abrange problemas cujas soluções se expressam por meio de agrupamentos ou subconjuntos binários, ternários, ..., até  $n$  elementos, dependendo do número de elementos selecionados de um conjunto gerador com  $m$  elementos, também formados segundo certas condições. A primeira subcategoria corresponde aos problemas do tipo produto de medidas, segundo Vergnaud (1991), enquanto a segunda contempla os problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação e combinação, conforme Merayo (2015).

Nomeamos de  $T_1$  o tipo de tarefas relativo aos problemas de contagem do tipo produto de medidas, descrito como: “Contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições”. Para os demais problemas, adotamos a modelização proposta por Ferreira (2019), igualmente adequada ao gênero contar.

O tipo de tarefas associado aos problemas do tipo arranjo será designado por  $T_2$  e descrito como: “Contar o número de agrupamentos formados a partir de  $m$  elementos, nos quais poderão ser constituídos agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ...,  $n$  elementos, com  $0 < n < m$ . Esses agrupamentos podem ser distintos entre si pela ordem ou pela natureza dos seus elementos.”

A denominação  $T_3$  será atribuída ao tipo de tarefas referente aos problemas de permutação, definido como: “Contar o número de agrupamentos formados a partir de  $m$  elementos, nos quais todos os  $m$  elementos serão utilizados; ou seja, tais agrupamentos diferenciam-se entre si apenas pela ordem dos elementos.”

Por fim, os problemas do tipo combinação serão identificados pelo tipo de tarefas  $T_4$ , descrito como: “Contar o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de  $m$  elementos, nos quais poderão ser constituídos agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ...,  $n$  elementos, com  $0 < n < m$ . Esses agrupamentos diferenciam-se entre si apenas pela natureza dos elementos, uma vez que a ordem não gera novas possibilidades.



De acordo com Chevallard (1999), uma praxeologia relativa à tarefa  $T$  requer, ao menos, uma maneira de realizar as tarefas  $f \in T$  que recebe o nome de técnica. Na intenção de descrever uma técnica ou de determinar seus constituintes, Chaachoua (2018), ao analisar trabalhos que recorrem à abordagem praxeológica, aponta ao menos duas formas principais de fazê-lo: descrevendo a técnica por meio de ações mais ou menos estruturadas ou em termos de subtarefas. O autor acrescenta que uma técnica também pode ser caracterizada por um conjunto de tipos de tarefas, denominados ingredientes da técnica.

Em consonância com os propósitos da Combinatória elencados anteriormente e com os preceitos da TAD quanto à definição de técnicas capazes de atender satisfatoriamente aos critérios de avaliação (ou à maioria deles), elegemos o Princípio Multiplicativo como tipo de tarefa que constitui o ingrediente central das técnicas aptas a resolver os problemas de contagem mencionados.

Vale ressaltar que em muitas tarefas dos tipos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , o Princípio Multiplicativo (que denominaremos de  $\tau_{PM}$ ) é, à primeira vista, o único ingrediente das técnicas. Em outras tarefas desses tipos, o Princípio Multiplicativo é um ingrediente sempre presente no conjunto de tipos de tarefas que compõem os ingredientes da técnica. Portanto, o fato de o Princípio Multiplicativo ser considerado, ora como único ingrediente das técnicas, ora como parte integrante do conjunto de ingredientes que resolvem as tarefas que se configuram como problemas de contagem, nos leva a adotar a perspectiva de considerá-lo uma técnica, em vez de apenas um ingrediente.

Por fim, é pertinente refletir sobre quais discursos tecnológico-teóricos ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) devem ser enfatizados para justificar a escolha das técnicas relativas aos problemas de contagem.

No que se refere ao tipo de tarefas  $T_1$  (Produto de Medidas), cujo objetivo é contar os agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos sob determinadas condições, ressalta-se que a natureza desses agrupamentos difere da natureza dos conjuntos que os originaram, uma vez que eles se associam para formar um novo conjunto.

Quanto aos tipos de tarefas cujas soluções são caracterizadas por agrupamentos ou subconjuntos binários, ternários, ..., com  $n$  elementos — dependendo do número de elementos selecionados de um conjunto gerador com  $m$  elementos, também sob certas condições —, correspondentes aos tipos  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  (respectivamente, arranjo, permutação e combinação), a justificação da técnica escolhida, neste caso o  $\tau_{PM}$ , fundamenta-se nas diferentes disposições possíveis dos elementos nos agrupamentos ou subconjuntos



formados, considerando-se dois aspectos principais: a ordem e a natureza desses elementos.

Em  $T_2$ , os agrupamentos de  $n$  elementos escolhidos de um conjunto de  $m$  elementos distintos podem diferir pela natureza (elementos diferentes) ou pela ordem. Como a escolha dos elementos é independente, a quantidade de arranjos pode ser calculada por uma expressão de  $n$  fatores decrescentes a partir de  $m$ , aplicando o Princípio Multiplicativo ( $\tau_{PM}$ ).

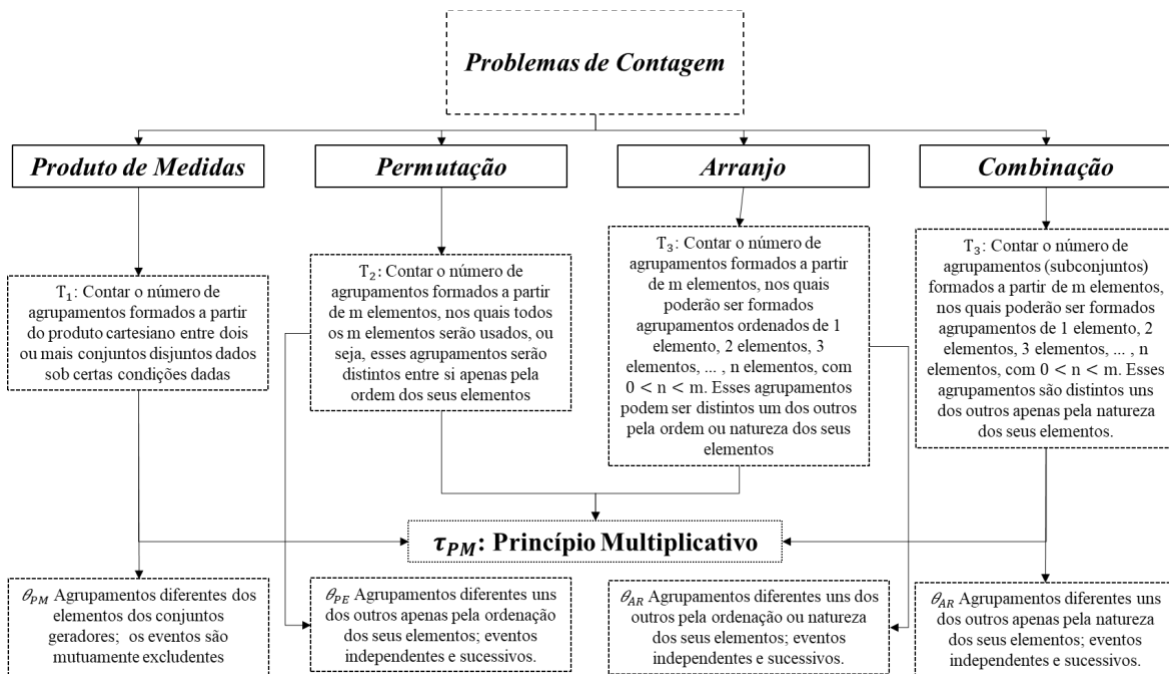
Em  $T_3$ , os agrupamentos diferem exclusivamente pela ordem dos elementos, sendo  $m = n$ ; assim, o  $\tau_{PM}$  também se aplica.

Em  $T_4$ , a ordem dos elementos é irrelevante; a distinção entre agrupamentos (subconjuntos) ocorre apenas pela natureza dos elementos. A contagem segue raciocínio semelhante ao de arranjos, mas desconsiderando as permutações internas dos  $n$  elementos escolhidos.

Os discursos tecnológico-teóricos apresentados não apenas justificam a escolha da técnica, mas também esclarecem o que está sendo efetivamente contado. A seguir, apresentamos um esquema que sintetiza o Modelo Praxeológico de Referência (MPR) adotado nesta investigação para os problemas combinatórios de contagem.

**Figura 2**

*Esquema do Modelo Praxeológico de Referência para o ensino dos problemas de contagem da Combinatória*



## 6. Antes do voo: a análise a priori do PEP

Este estudo busca justificar o ensino de Combinatória, cujo tratamento ainda se restringe, em grande parte, à aplicação segmentada de fórmulas, sem a devida compreensão de seus significados. Observa-se que o ensino parte de praxeologias pontuais, centradas na aplicação direta de técnicas já enunciadas, o que reforça o paradigma da visita às obras como forma predominante de estudo.

Assim, um PEP para o ensino de Combinatória, além de favorecer o surgimento de uma possível razão de ser, pode promover a articulação entre saberes matemáticos e didáticos, estimulando práticas matemáticas desejáveis e possibilitando o desenvolvimento de um pensamento matemático rico e desafiador, conforme defendem Lockwood et al. (2020). Ademais, pode incentivar a elaboração de problemas, como destacam Sriraman e English (2004), uma vez que a dialética entre pergunta e resposta constitui uma das principais forças motrizes da atividade do PEP.

Nesse contexto, formulamos a pergunta geradora: “Q<sub>0</sub>: Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?”, entendida, nos termos da TAD, como uma questão em sentido forte, cuja resposta ultrapassa a simples busca de informações ou o estudo de uma obra.

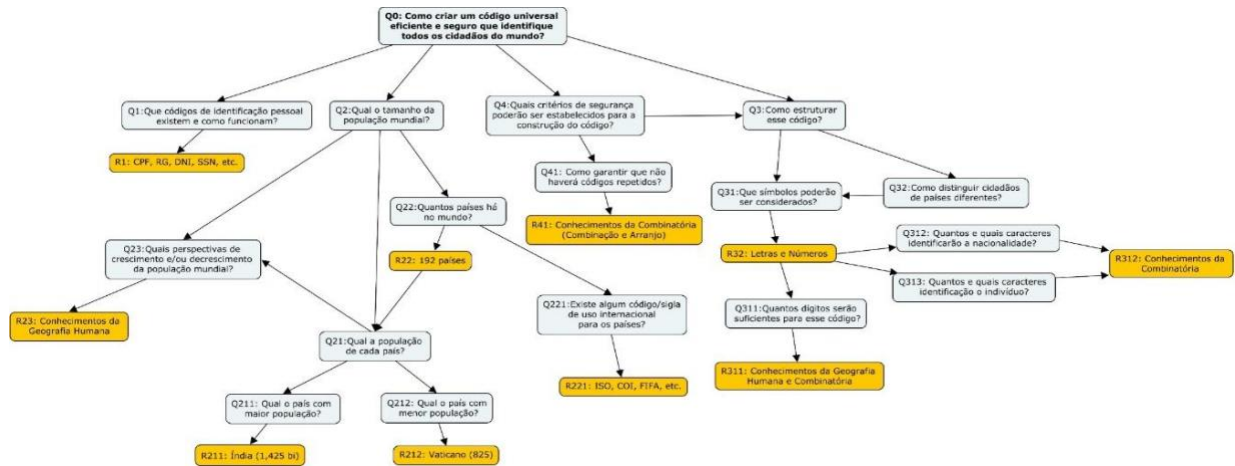
A pertinência da pergunta se justifica pelo avanço da globalização, da integração em blocos econômicos e da padronização internacional em diversas áreas (moedas, placas de automóveis, registros de produtos), o que pode levar à reflexão sobre a adoção de um código pessoal de identificação em escala mundial.

Assim, a Figura 3 apresenta o mapa de questões preliminares, cujo objetivo é relacionar algumas possíveis respostas às questões derivadas. Nesse mapa, os retângulos arredondados em cinza representam as perguntas, enquanto os retângulos arredondados em amarelo indicam os elementos de resposta.



**Figura 3**

Mapa de questões e respostas preliminares do PEP experimental<sup>2</sup>



O levantamento das questões derivadas preliminares revela o caráter interdisciplinar do PEP em torno de  $Q_0$ : algumas respostas  $R_i$  demandam saberes da Demografia, como em  $Q_2$ , enquanto outras, como  $Q_3$  e  $Q_4$ , exigem conhecimentos de Combinatória. Além disso, o enfrentamento dessas questões pode conduzir à elaboração da resposta  $R^\heartsuit$  para  $Q_0$ . Esses exemplos ilustram possíveis explorações das perguntas derivadas, cujo levantamento e elaboração de respostas dependerão das escolhas da comunidade de estudos.

### 7. Entre perguntas e respostas: o PEP em ação

Como explicitado anteriormente, a vivência deste PEP integrou um processo formativo voltado a professores de Matemática sobre o ensino de Combinatória, tendo como ponto de partida a pergunta geradora “ $Q_0$ : Como criar um código eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?”. Segundo a perspectiva de Florensa et al. (2019), o objetivo dessa vivência foi familiarizar os participantes com uma atividade matemática geralmente pouco explorada, mas que pode ser desenvolvida, sob determinadas condições e restrições, em uma sala de aula comum. Nessa etapa, os professores assumiram o papel de estudantes X, enquanto o formador (pesquisador) atuou como professor Y do PEP, conduzindo o processo de estudo e pesquisa a partir de um contrato didático mais flexível que o tradicional.

No primeiro encontro, o formador apresentou aos professores participantes e contextualizou a questão geradora. Em seguida, introduziu a comanda<sup>3</sup> da atividade, que continha orientações para que, em grupo, os participantes elaborassem exclusivamente as questões derivadas, de caráter matemático ou não, desde que pertinentes à resposta da



pergunta principal. Além disso, destacou-se a importância de organizar essas questões derivadas por níveis.

Após as orientações, o formador dividiu os participantes em dois grupos usando as salas temáticas do Google Meet. Cada grupo recebeu um documento compartilhado no Google Drive para registrar suas construções e acessar as instruções da atividade.

Logo em seguida ao momento de discussões coletivas, os grupos iniciaram as apresentações, começando pelo Grupo 2, que se voluntariou para começar. As primeiras perguntas derivadas propostas pelo grupo estão descritas no quadro abaixo.

### Quadro 1

#### *Questões preliminares levantadas pelo Grupo 2 durante a vivência do PEP*

- 
1. Qual a Capacidade do código?
    - 1.1 Quais elementos devem compor o código?
    - 1.2 O código atende ao levantamento estatístico da população?
    - 1.3 É possível assegurar a proteção de dados?
  
  2. Quais os dados populacionais?
    - 2.1 Devemos usar letras para identificar País, Estado e a Cidade?
  
  3. Qual o custo e recursos?
    - 3.1 Onde seriam armazenadas as informações?
    - 3.2 De que forma aconteceria a divisão das despesas?
  
  4. Quais as jurisdições necessárias?
    - 4.1 O que pode ser contemplado com código?
    - 4.2 A base de dados fornece proteção aos dados?
    - 4.3 Onde seriam armazenadas as informações?
- 

Durante a apresentação, os participantes do Grupo 2 justificaram a escolha das questões levantadas. No caso da pergunta 2.1, por exemplo, os professores expressaram preocupação com a quantidade de caracteres do código, buscando que fosse a menor possível, mas ainda capaz de abranger o maior número de pessoas. Ao analisarmos as questões dos níveis 3 e 4, observou-se um maior foco nas implicações da criação e do armazenamento dos dados do código, em vez de sua elaboração técnica em si.

Na sequência, os participantes do Grupo 1 também apresentou as questões que elaboraram a partir da pergunta geradora, que estão contidas no quadro a seguir.



**Quadro 2****Questões preliminares levantadas pelo Grupo 1 durante a vivência do PEP**

- 
1. Qual(s) símbolo(s) utilizaríamos?
  2. Seria preciso diferenciar os cidadãos dos diferentes países?
  3. Como se daria a concepção de um algoritmo para atender a este código?
    - 3.1 Como estão sendo desenvolvidos códigos ditos como universais?
    - 3.2 Quais profissionais seriam precisos para essa concepção?
  4. Quais informações o código precisaria registrar de cada cidadão?
  5. Quais seriam as dificuldades para criação do código universal?
- 

Assim como o grupo anterior, o Grupo 1 apresentou justificativas durante a exposição das perguntas derivadas que elaborou. Nesse processo, também foram identificadas outras questões discutidas oralmente pelo grupo, mas não registradas no material escrito.

De modo geral, os grupos elaboraram boas perguntas derivadas, algumas próximas às propostas na análise *a priori*. Convergiram em questões como os requisitos do código, considerando crescimento populacional, efetividade e tamanho adequado para identificar todas as pessoas sem se tornar obsoleto rapidamente. No entanto, também levantaram preocupações distintas: o Grupo 2 enfocou custos e recursos necessários, enquanto o Grupo 1 se preocupou com os profissionais envolvidos na concepção do código.

A atividade de levantamento de questões derivadas a partir da  $Q_0$  se estendeu até o segundo encontro, realizado de forma híbrida, com parte do grupo presencial e parte participando remotamente via Google Meet. Como não foi possível realizar subdivisões dos participantes, as discussões ocorreram coletivamente.

No início, o formador retomou as questões do encontro anterior, e a comunidade de estudos passou a avaliar a pertinência de cada uma, além de propor novas perguntas derivadas. Após a discussão coletiva sobre o levantamento, a relevância e a organização das questões derivadas, os participantes validaram o conjunto apresentado no quadro abaixo.



### Quadro 3

#### Questões derivadas elaboradas pela comunidade de estudos no PEP do Módulo 1

$Q_0$ : Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?

$Q_1$ : Qual(is) símbolo(s) utilizaríamos (letras, algarismos, símbolos, etc.)?

$Q_{1.1}$ : Qual a capacidade do código (tamanho)?

$Q_2$ : Quais informações deveriam estar contidas nesse código?

$Q_{2.1}$ : Como diferenciar cidadãos de países diferentes?

$Q_{2.2}$ : Seria preciso diferenciar os cidadãos dentro dos países pelo estado, cidade, etc.?

$Q_{2.3}$ : Como os países são representados em classificações internacionais (ONU, COI, DDI, FIFA, etc).

$Q_{2.4}$ : Quais códigos de identificação pessoal internacional/nacional existem? O que se pode dizer sobre eles?

$Q_3$ : Como se daria a concepção de um algoritmo para atender a este código?

$Q_{3.1}$ : Quais profissionais seriam preciso para essa concepção?

$Q_4$ : Quais seriam as dificuldades para criação do código universal?

$Q_{4.1}$ : Qual o custo e recursos?

$Q_{4.2}$ : Onde seriam armazenadas as informações?

$Q_{4.3}$ : De que forma aconteceria a divisão das despesas?

$Q_{4.4}$ : Quais as jurisdições necessárias?

$Q_5$ : O código atende ao levantamento estatístico da população?

$Q_{5.1}$ : Qual a previsão de crescimento e decréscimo populacional dos países e do mundo?

$Q_{5.2}$ : Quais órgãos oficiais realizam a contagem da população mundial?

$Q_6$ : É possível assegurar a proteção de dados? O que pode ser feito nesse sentido?

$Q_{6.1}$ : O que fazer para tornar o código seguro (ser pessoal e intransferível)?

Ao analisar o conjunto de questões derivadas levantadas pela comunidade de estudos e compará-las com aquelas da análise *a priori*, observamos muitas aproximações, como nos casos de  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_5$  e suas respectivas derivadas. No entanto, surgiram questões inéditas nos níveis  $Q_3$  e  $Q_4$  e suas derivadas, enquanto temas relacionados à segurança dos códigos, especialmente no que se refere à prevenção de repetições, e que não tinham sido abordados.

O processo de elaboração de respostas ocorreu nos encontros 3 e 4. O formador dividiu os participantes em dois grupos, atribuiu a cada um perguntas específicas e compartilhou a



comanda com as orientações: elaborar coletivamente elementos de respostas, registrar separadamente perguntas, respostas e fontes consultadas, validar as respostas acrescentando ou retirando informações pertinentes, e ao final, propor novas perguntas a partir das respostas geradas. Para apoiar o registro, cada grupo recebeu um documento compartilhado no Google Drive, no qual deveriam registrar seus elementos de respostas e as fontes utilizadas.

Após as discussões e realização das atividades nos grupos, os participantes iniciaram as apresentações das respostas ou elementos de respostas que conseguiram elaborar.

O Grupo 1 focou-se nos aspectos técnicos e de conteúdo do código, definindo os símbolos a serem utilizados (letras de diferentes alfabetos e algarismos), a capacidade estimada (10 bilhões de identificações até 2300) e as informações essenciais, como dados pessoais, filiação, nacionalidade, gênero e biometria. Também discutiu a diferenciação de cidadãos entre países, utilizando o código ISO 3166-1 de três letras e subdivisões subnacionais, e a concepção do algoritmo que demandaria a colaboração de engenheiros de software, criptógrafos, matemáticos, especialistas em segurança de dados, ética, ciências sociais, diplomacia e privacidade de dados.

O Grupo 2, responsável pelo segundo conjunto de questões derivadas, concentrou-se em aspectos periféricos da concepção do código. O grupo destacou a necessidade de equipes multidisciplinares, o dimensionamento do código para atender à projeção populacional, sem torná-lo excessivamente longo, e a definição de custos e divisão das despesas entre países de forma proporcional ao PIB. Além disso, considerou que o código deveria possibilitar levantamentos estatísticos da população e incorporar projeções de crescimento e declínio populacional, estimando um pico de aproximadamente 10,4 bilhões de pessoas na década de 2080.

Os grupos chegaram ao consenso nas respostas sobre a projeção da população mundial para 2100. O Grupo 1 avançou na discussão ao considerar a durabilidade do código até 2300; entretanto, após debate, ambos concordaram em projetar o código até 2100, pois as fontes disponíveis davam maior respaldo para essa estimativa.

O formador também levantou a questão da taxa de mortalidade, observando que um código pessoal e intransferível precisaria considerar nascimentos e óbitos ao longo do tempo, e não apenas 10 bilhões de possibilidades. Contudo, nenhum participante comentou sobre esse aspecto.



Em seguida, a atenção voltou-se para a prototipação do código. As perguntas e respostas discutidas até então forneceram contribuições importantes, mas ainda não avançaram para a concretização do protótipo.

A prototipação do código universal para identificação dos cidadãos do mundo foi realizada durante o quinto encontro, iniciado pelo formador com a apresentação das orientações da atividade do dia. Com base nas discussões do encontro anterior, definiu-se que o código deveria incluir dígitos para identificação do país (nacionalidade), dígitos aleatórios para identificar as pessoas, dígitos verificadores e uma quantidade de caracteres capaz de abranger a projeção de 10,4 bilhões de pessoas até 2100.

Alguns pontos permaneceram em aberto para serem considerados na criação do código, como a taxa de mortalidade anual do planeta e o impacto da repetição de algarismos na geração dos dígitos verificadores. Além disso, foi ressaltada a necessidade de garantir que o código seja eficiente, suficiente para atender à projeção populacional, e seguro, mantendo-se impessoal e intransferível.

Após as orientações, os participantes reuniram-se, inicialmente sem a intervenção do formador, para discutir coletivamente as questões propostas e, em seguida, apresentaram os resultados. Os professores participantes, assumindo o papel de estudantes, elaboraram a prototipação do código de acordo com as orientações da atividade, conforme descrito:

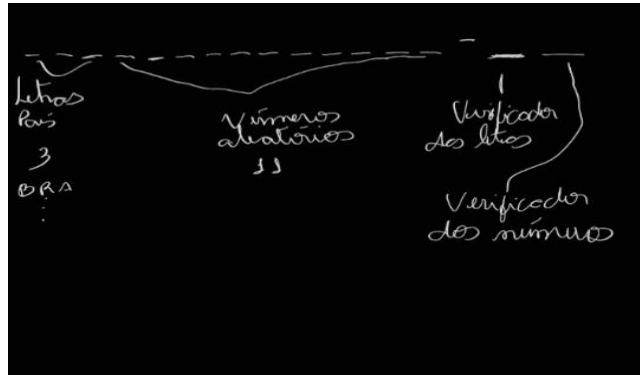
- *Identificação do país* (nacionalidade): ISO 3166-1 alpha-3, sistema internacional de três letras que representa países e suas subdivisões.
- *Identificação dos indivíduos*: 11 dígitos numéricos, sendo o primeiro de 1 a 9 e os dez seguintes de 0 a 9, totalizando  $9 \times 10^{10}$  (90 bilhões) de possibilidades.
- *Dígitos verificadores*: 2 dígitos (15º e 16º), sendo o primeiro para verificar as letras da nacionalidade e o segundo para os dígitos de identificação individual.
- *Capacidade do código*: considerada suficiente para abarcar a projeção de 10,4 bilhões de pessoas até 2100, levando em conta taxas anuais de natalidade e mortalidade. Segundo o Population Reference Bureau (PRB), já viveram na Terra cerca de 107 bilhões de pessoas desde o surgimento da espécie, o que reforça a viabilidade do sistema para o período de 2023 a 2100.
- *Questão em aberto*: permanece sem resposta se a repetição de algarismos pode impactar a geração dos dígitos verificadores.

Abaixo, apresentamos na Figura 4 a configuração desse código proposto pelos professores participantes da formação.



**Figura 4**

*Prototipação do código de identificação realizada pelos professores participantes*



Após a apresentação dos professores, o formador questionou a necessidade de 11 dígitos numéricos para a identificação dos indivíduos, uma vez que a inclusão da nacionalidade já diferenciaria os cidadãos de países distintos. Alguns participantes defenderam a manutenção dos 11 dígitos, argumentando que essa quantidade garantiria maior segurança diante de projeções populacionais e variações decorrentes de natalidade, mortalidade ou eventos inesperados, posição que acabou validada pela comunidade de estudos. Em seguida, discutiu-se a escolha de restringir o primeiro dígito aos algarismos de 1 a 9, excluindo o zero. O formador ponderou que essa exclusão reduziria as possibilidades de códigos e sugeriu apenas descartar a sequência composta apenas por zeros, proposta aceita pelo grupo. Assim, estabeleceu-se que cada país poderia contar com até 99.999.999.999 combinações possíveis.

Outro ponto debatido foi a concepção dos dígitos verificadores. Os participantes compararam com o modelo do CPF (Cadastro de Pessoas Físicas), destacando que sua lógica de verificação garante segurança mesmo com repetições numéricas, enquanto outros países, como a Índia, não utilizam esse recurso.

Após as discussões sobre a formação dos dígitos verificadores, a comunidade de estudos validou a resposta R<sup>♥</sup> elaborada para a questão geradora Q<sub>0</sub>, que ficou assim definida:

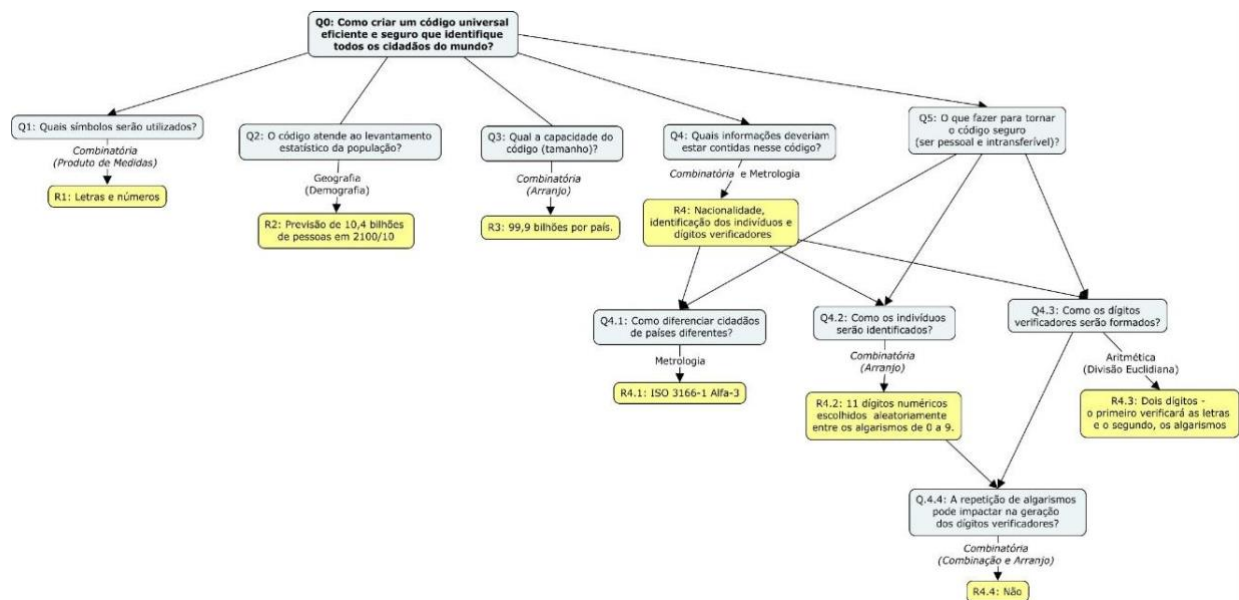
R<sup>♥</sup>: O código de identificação universal será composto por 16 dígitos alfanuméricos. Os três primeiros indicarão a nacionalidade do indivíduo, de acordo com a classificação ISO 3166-1 Alfa-3. Em seguida, virá uma sequência de 11 dígitos numéricos aleatórios, formados pelos algarismos de 0 a 9. Por fim, serão acrescentados dois dígitos verificadores: o primeiro associado às três letras iniciais e o segundo relativo à sequência numérica.



O mapa de perguntas e respostas referentes à questão  $Q_0$  reúne apenas aquelas que se repercutem diretamente na criação do código, foco central da questão geradora. Nele, as perguntas aparecem em retângulos cinza e as respostas em amarelo, enquanto as conexões indicam as obras e áreas do conhecimento mobilizadas, com ênfase, em itálico, para as contribuições da Combinatória.

**Figura 5**

*Mapa de perguntas e respostas do PEP experimentalado*



A experimentação do PEP neste módulo evidenciou seu caráter interdisciplinar, articulando conteúdos da Matemática (Combinatória e Aritmética) e da Geografia (Demografia). No caso específico da Combinatória, surgiram problemas de contagem ligados a Arranjos, Combinações e ao Produto de Medidas, com o Princípio Multiplicativo emergindo naturalmente como técnica de resolução. Embora nem todos os tipos de problemas previstos no modelo praxeológico tenham sido contemplados, essa abertura caracteriza o PEP como flexível, em consonância com Chevallard (2017).

Outra característica do PEP aberto, segundo Chevallard (2017), é o papel do formador como líder da investigação. Sua atuação foi moderadamente neutra, limitando-se a orientar ou delimitar questões secundárias e a destacar pontos ainda não abordados. Essa postura, inserida em uma estrutura democrática, permitiu decisões coletivas e favoreceu o trabalho autônomo dos professores, que decidiram quais questões derivadas estudar e quais obras consultar para elaborar respostas parciais.



O meio M foi enriquecido com a construção de respostas parciais e recursos validados pela comunidade, enquanto perguntas ou respostas menos relevantes foram excluídas. Comparando o mapa de questões preliminares das análises *a priori* com o mapa final do PEP, observa-se uma dilatação do meio, com surgimento de novas questões não previstas inicialmente.

Nesse contexto, diversas dialéticas puderam ser identificadas. A dialética das perguntas e respostas (ou do estudo e da investigação) permeou todo o processo, com a formulação contínua de questões e a busca de soluções parciais. A dialética do individual e do coletivo foi marcante, na medida em que os professores elaboravam respostas individuais que, posteriormente, eram validadas ou reelaboradas pelo grupo, muitas vezes com auxílio de documentos compartilhados. A dialética média-meio apareceu quando informações obtidas em fontes externas eram criticadas, validadas ou descartadas antes de integrarem o meio M, como ocorreu com os dados de natalidade e mortalidade, substituídos pela estimativa do total de seres humanos já existentes.

Também se observou a dialética de entrar e sair do tema, com o trânsito entre diferentes áreas do conhecimento, e a dialética entre caixas negras e caixas claras, na qual certos conteúdos (como os combinatórios) foram estudados mais profundamente, enquanto outros permaneceram em estado de “caixa negra”. A dialética da leitura e da escrita apareceu na progressiva transformação de registros copiados em sínteses autorais, e a dialética da produção e da recepção manifestou-se nas defesas orais e escritas das soluções elaboradas pela comunidade.

Por outro lado, as dialéticas do paraquedista e das trufas, assim como a análise e síntese praxeológica e didática, não foram claramente identificadas na experimentação. Contudo, o conjunto de dialéticas observadas, articulado às dimensões mesogenética, topogenética e cronogenética do estudo, mostra-se fundamental para compreender as condições e restrições do funcionamento do PEP, revelando como se configuram, na prática, os gestos de estudo e pesquisa que estruturam o paradigma do questionamento do mundo.

## 8. Sobrevoos e perspectivas de novos voos

Este estudo buscou atuar em três frentes principais: discutir uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória; mobilizar um dispositivo didático capaz de integrar saberes matemáticos e didáticos, favorecendo práticas que estimulem a construção de um pensamento matemático, em especial o raciocínio combinatório, consistente, criativo e desafiador; e colocar tais elementos em prática em um processo de formação de professores de Matemática.



Colocados na posição de estudantes do Ensino Médio, os professores vivenciaram um PEP que promoveu um processo de estudos que ultrapassou as fronteiras da Combinatória e da própria Matemática. Nesse percurso, foram explorados problemas de contagem surgidos das questões derivadas, fundamentais para a elaboração da resposta R<sup>♥</sup>.

A experimentação também evidenciou a forma como os tipos de tarefas de contagem foram estudados: em vez de aparecerem segmentadas, como no ensino tradicional, elas foram trabalhadas de modo articulado, a partir das respostas às perguntas derivadas.

Nesse movimento, as funções didáticas (mesogênese, topogênese e cronogênese) e os gestos didáticos descritos por Chevallard (2007), materializados nas nove dialéticas, revelaram-se ferramentas centrais para a análise das práticas desenvolvidas no PEP.

Por fim, ressaltamos a necessidade de experimentar o PEP vivenciado diretamente com estudantes do Ensino Médio, especialmente no contexto das disciplinas eletivas do Ensino Médio, onde tal dispositivo pode revelar novas potencialidades formativas e ampliar os horizontes investigativos desta pesquisa.

### **Declaração de contribuição e autoria**

*Alan Gustavo Ferreira:* Conceitualização, Curadoria de dados, Análise formal, Investigação, Metodologia, Administração do projeto, Recursos, Supervisão, Validação, Visualização, Escrita - esboço original, Escrita - revisão e edição

*Paula Moreira Baltar Bellemain:* Conceitualização, Análise formal, Metodologia, Supervisão, Validação, Visualização, Escrita - esboço original, Escrita - revisão e edição.

*Cristiane de Arimatéa Rocha:* Conceitualização, Análise formal, Metodologia, Supervisão, Validação, Visualização, Escrita - esboço original, Escrita - revisão e edição.

### **Referências**

Agudelo Zuluaga, L. A. (2018). *La resolución de problemas para la enseñanza de la combinatoria y la probabilidad. Contribución al desarrollo del pensamiento aleatório*. [Dissertação de mestrado, Universidad Nacional de Colombia]. <https://bffrepositorio.unal.edu.co/server/api/core/bitstreams/3ca9f1ff-950a-4057-84ab-967496907b81/content>

Barquero, B, e Bosch, M. (2022). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. Em A. Watson, e M. Ohtani (Orgs.), *Task Design In Mathematics Education* (pp. 249-272). Springer.



- Borba, R. E. S. R., Rocha, C. A., e Azevedo, C. (2015). Estudos em raciocínios combinatórios: investigações e práticas de ensino na educação básica. *Boletim de Educação Matemática*, 29(53), 1348-1368. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a27>
- Brasil (1997). Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática. 1º e 2º ciclos*. Secretaria de Ensino Fundamental.
- Campos, C. E., e Iglori, S. B. C. (2021). Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: Perspectivas Investigativas. *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática*, 16(1), 1-20.
- Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, 20(1), 159-169. <https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1378>
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. 2009. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La\\_notion\\_de\\_PER\\_\\_problemes\\_et\\_a\\_vancees.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER__problemes_et_a_vancees.pdf).
- Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique*. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe\\_et\\_present\\_de\\_la\\_TAD-2.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf).
- Desfitri, R. (2024). Analysis of Students' Combinatorial Thinking Model in Solving Combinatorics Problems. *KnE Social Sciences*, 9(13), 1084–1095. <https://kneopen.com/KnE-Social/article/view/16034/14906/>.
- Esteves, I. (2001). *Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental* [Dissertação de mestrado não publicada]. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Ferreira, A. G. (2019). *Organizações matemáticas e didáticas no ensino de combinatória*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco] <https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/39425/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Alan%20Gustavo%20Ferreira.pdf>.
- Ferreira, A. G., Rufino, M. A. S., e Silva, J. R. (2016). Os obstáculos epistemológicos em combinatória: um estudo com os licenciandos em matemática. Em *Anais do 2do Congresso Internacional de Enseñanza de las Ciencias e la Matemática* (pp. 312-319),



NIECyT/FCE. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/os-obstaculos-epistemologicos-em-combinatoria-um-estudo-com-os-licenciandos-em-matematica/>

Ferreira, A. G., Bellemain, P. M. B., e Rocha, C. A. (2024). Panorama sobre a formação de professores de Matemática para o ensino de Combinatória. Em *Anais do 6º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). <https://static.even3.com/anais/800959.pdf?v=639123058082017989>

Florensa, I., Bosch, M., e Gascón, J. (2019). Análisis a posteriori de un REI-FP como herramienta de formación del profesorado. *Educación Matemática Pesquisa*, 21(4), 382-394. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p382-394>

Florensa, I., Barquero, B., Bosch, M., e Gascón, J. (2019). Study and research paths at university level: Managing, analysing and institutionalizing knowledge. Em *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*. Utrecht University. <https://hal.science/hal-02422617/document>.

Freitas, R. L., e Almouloud, S. A. (2023). Percurso de estudo e pesquisa: Um dispositivo de pesquisa e formação profissional. *Educación Matemática Pesquisa*, 25(2), 278-328. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p278-328>

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., e Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75-94. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267>

Gáscon, J., e Nicolás, P. (2021). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática*, 33(1), 7-40. <https://doi.org/10.24844/em3301.01>

Hazzan, S. (2013). *Fundamentos de Matemática elementar: Combinatória e probabilidade* (Vol. 5, 8ª ed). Atual Editora.

Lockwood, E., Wasserman, N. H., e Tillema, E. S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, 59, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783>.

Martins, G. G. (2018). *Ensino de Análise Combinatória: um estudo das representações de professores de matemática do Ensino Médio público de São Mateus* [Dissertação de mestrado não publicada]. Universidade Federal do Espírito Santo.

Merayo, F. (2015). *Matemática Discreta* (3ª ed). Paraninfo.



- Morgado, A. C. O., Carvalho, J. B. P., Carcalho, P. C. P., e Fernandez, P. (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade*. Grafica Wagner Ltda.
- Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. UNICEN.
- Quintana Álvarez, J. H., Vega Rodríguez, O., Rosete Suarez, A., e Álvarez Lázaro, N. (2023). Desarrollo de la habilidad de resolver problemas combinatorios con ejercicios de demostración. Experiencias de docentes. *Revista Cubana de Educación Superior*, 42(2), 1-16. <https://revistas.uh.cu/rces/article/view/6959/5936>
- Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D., e Cañizares, M. J. (1997). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios. *Epsilon*, 13(36), 41–58. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/combinatoria.pdf>
- Salgado, D. P., e Otero, M. R. (2020). Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 532-557. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p532-557>
- Sánchez Ordóñez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65–97. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v16n1/v16n1a4.pdf>
- Santos Júnior, V. B., Dias, M. A., e Bosch, M. (2019). Um percurso de estudo e pesquisa para o estudo das noções de juros simples e compostos. *Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 327–347. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a16>
- Santos, J. P. O., Melo, M. P., e Murari, I. T. C. (2008). *Introdução à Análise Combinatória*. Ciência Moderna.
- Silva, J. R. (2009). *Uso de Textos de apoyo como Organizador Previo: Matemáticas para la Enseñanza Fundamental y Media* [Dissertação de doutorado não publicada Doutorado]. Universidad de Burgos.
- Sriraman, B., e English, L. D. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice. *Mathematics Teacher*, 98(3), 182–191. <https://doi.org/10.5951/MT.98.3.0182>
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matematicas en la escuela primaria*. Trillas.



## Notas

1. A praxeologia é constituída, no mínimo, por um tipo de tarefas a serem realizadas, uma ou mais técnicas capazes de resolver tarefas desse tipo, um discurso que justifica essa técnica, denominado de tecnologia, e um discurso em sentido mais abstrato que legitima essa tecnologia, chamado teoria. As noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, mobilizadas para determinado tipo de tarefas, formam uma organização praxeológica que, quando vinculada ao contexto dos objetos matemáticos, é denominada organização matemática ou praxeologia matemática, tornando-se uma ferramenta fundamental para a modelização de qualquer atividade matemática.
2. Para acesso ao mapa em melhor resolução/visualização, acesse: <https://drive.google.com/file/d/1MlVDlYHexJ0Vw1b7a27FoXDUjZMNIzzx/view?usp=sharing>
3. O termo “comanda”, neste trabalho, é compreendido como o conjunto de orientações relativas a uma determinada atividade.

