EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 25-3
9 771665 243002 02503

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 25, Núm. 3, noviembre 2022

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 25, Núm. 3, 2022

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidenta:* Dra. Carmen Evarista Matías Pérez; *Secretaria:* Lic. Elizabeth Mariscal Vallarta; *Tesorera:* Mg. Santa Daysi Sánchez González; *Vocal Norteamérica:* Dra. Evelia Reséndiz; *Vocal Caribe:* Dra. Anelys Vargas Ricardo; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto; *Vocal Sudamérica:* Mg. Mónica Marcela Parra - Zapata.

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica - Scopus – Elsevier Database • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2022 Impresa en México

Volumen 25 – Número 3 – 2022

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2022

Volumen 25 Número 3 Noviembre de 2022

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Dirección fiscal: Norte 79-A, No. 221. Col. Clavería, Alcaldía Azcapotzalco, C. P. 02080. Ciudad de México, México., www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel-Espinosa, direccion@relime.org.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

EDITORIAL

ROLES DE PARTICIPACIÓN Y COMUNICACIÓN EN LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA. ¿CUÁLES SERÁN LOS ACUERDOS DE LA COMUNIDAD LATINOAMERICANA?

THE ROLE OF PARTICIPATION AND COMMUNICATION IN MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH. WHAT WILL BE THE AGREEMENTS OF THE LATIN AMERICAN COMMUNITY?

GISELA MONTIEL-ESPINOSA

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Cuando se haga pública esta editorial, la Relime habrá iniciado la migración de su contenido al *Open Journal Systems* –el famoso OJS– y con ello también la actualización de algunas directrices respecto a las Normas y Políticas Editoriales. Una de éstas se refiere al área que el Comité de Ética de Publicaciones (COPE por las siglas en inglés de *Committee On Publication Ethics*), a partir de su primer reporte en 2003, consideró de las más confusas: *la autoría*.

Han pasado veinte años y el reporte aún se discute para precisar dichas normas y políticas, por lo que se hizo prioritario el construir espacios de difusión y formación, promoviendo una cultura académica que lo integrara en la investigación propia.

Al releerlo para elaborar esta editorial recordé el testimonio de una egresada de posgrado a quien escuché en un evento académico que sucedió en la pandemia. Estábamos en un grupo de discusión sobre cuestiones de género en el posgrado, al que me integré por inquietudes acentuadas durante mi reciente labor como coordinadora académica del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav en México. La participante compartió la experiencia de publicar, en español, un artículo sobre su investigación, con ella como primera autora y su asesor como segundo autor; después, él publicó, en inglés, un artículo sobre

Montiel-Espinosa, G. (2022). Roles de participación y comunicación en la investigación en Matemática Educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(3), 253-262. https://doi.org/10.12802/relime.22.2530

la investigación de ella en una revista de alto impacto, pero consigo mismo como único autor. Por la modalidad en línea, no vi su rostro ni supe su nombre completo y, honestamente, no contaba con los recursos para acercarme a ella en ese momento y, al menos, ofrecerle orientación. Hoy cuento con una voz en este espacio y una perspectiva más informada, pues no solo me documenté para elaborar esta editorial e iniciar este proceso de actualización de la Relime; en poco más de un año, junto al equipo editorial de la revista, he identificado y atendido, como éste, otros casos donde, desafortunadamente, hay estudiantes de posgrado involucrados.

Albert y Wager (2003), en el mencionado reporte del COPE, recuperan, de la guía del Comité Internacional de Directores de Revistas Médicas –versión 2001–, tres condiciones que deben cumplirse para que alguien sea autor(a) de un artículo, a saber:

1) haber realizado contribuciones sustantivas en la concepción o diseño, o adquisición de datos, o análisis e interpretación de datos;
2) haber participado en el borrador del artículo o en la revisión crítica con aportaciones intelectuales importantes;
3) haber dado la aprobación final de la versión a publicarse.

Estos autores reproducen también la declaración de que la sola adquisición de financiamiento, colección de datos o supervisión general del grupo de investigación, por sí mismas, no son contribuciones que justifiquen participar como autores, estos créditos pueden darse en una sección de agradecimientos. Para la autoría deben cumplirse las tres condiciones mencionadas y por ello éstas proveen una primera guía con los componentes a poner atención: los roles de participación en la investigación y los roles de participación en su comunicación a través de la escritura. Si bien se ha ido precisando sobre cómo tomar decisiones respecto a cada uno, la autoría continúa demandando de ambos componentes.

Recientemente, el COPE ha publicado un documento en el que se encuentran las discusiones que la comunidad editorial científica ha tenido en estos veinte años acerca de cómo se constituye la autoría y de cuáles serían las prácticas para prevenir y resolver disputas por malas conductas éticas relativas a ella, en buena medida detonadas por las condiciones establecidas en aquel primer reporte. Algo que caracteriza este documento es que hace una distinción de las normas y prácticas propias de cada área o disciplina.

Partiendo de una noción básica de autor como "… creador de una idea… o al individuo o individuos que desarrollan y llevan a término una obra intelectual, artística, literaria o científica…" (COPE, 2019, p. 3), se ejemplifican definiciones, normas y códigos de asociaciones de distintas áreas. De estos ejemplos, el que más me interesó –por obvias razones– fue el que incluyeron para las Ciencias Sociales, que en este caso fue el de la Asociación Americana de Sociología, en el que se trata un *estándar de ética*, donde establecen que:

"14. Autoría

Los sociólogos asumen la responsabilidad y el crédito, incluido el crédito de autoría, sólo por el trabajo que realmente han realizado o al que han hecho una contribución sustancial.

(a) En el trabajo colaborativo, tanto dentro de la Sociología como entre disciplinas, los equipos de investigación varían en cuanto a las decisiones sobre el orden de autoría. Aunque existen enfoques alternativos (que pueden explicarse en una nota a pie de página o en un agradecimiento), el orden de autoría por defecto en Sociología se basa en las contribuciones científicas o profesionales relativas de los autores.
(b) Cuando el trabajo en colaboración se deriva sustancialmente de la disertación o tesis de un estudiante, éste suele figurar como primer autor."

(ASA, 2018; p. 17)

Comparándolo un poco con otros ejemplos, identifiqué que las diferencias entre disciplinas son algunas sutiles y otras muy notorias. Considero que lo importante es el reconocimiento de que se está discutiendo la autoría, el número –en este punto, la autoría de grupos– y orden de autoría. Sin embargo, algunos autores reconocen que estos acuerdos varían no solo entre disciplinas, sino entre culturas y grupos de investigación en una misma disciplina (McNutt, M. K., et al, 2018). Comencemos, al menos, a acercar el foco a nuestra disciplina.

Haciendo búsquedas en torno al tema, aún se puede descargar del sitio web de la Asociación Americana de Psicología (APA por sus siglas en inglés) una *Guía del estudiante de posgrado para determinar el crédito de autoría y el orden de autoría* (APA, 2006), que justamente orienta en la toma de estas decisiones –crédito y orden– desde las bases formativas del estudiantado, dando incluso materiales y recursos para hacerlo con base en los principios de la APA.

Se trate de uno o múltiples productos de investigación, se recomienda negociar la autoría y su orden desde el inicio, considerando que ambas variables pueden cambiar en el transcurso del proyecto. Sin embargo, tanto una como otra deben reflejar la contribución real de sus participantes.

Actualmente, el sitio web de la APA tiene una sección, dentro de su *Science Student Council*, denominada *Tips for Determining Authorship Credit*, donde se encuentran caracterizaciones y recursos actualizados de su guía de 2006. Para determinar la autoría, la APA sigue tres principios:

- Los psicólogos asumen la responsabilidad y el crédito, incluido el crédito de autoría, sólo por el trabajo que realmente han realizado o al que han contribuido *sustancialmente*.
- La autoría principal y otros créditos de publicación reflejan con exactitud las contribuciones científicas o profesionales relativas de los individuos implicados, independientemente de su estatus relativo. La mera posesión de un cargo institucional, como el de jefe de departamento, no justifica el crédito de autoría. Las contribuciones menores a la investigación o a la redacción para la publicación se reconocen adecuadamente, por ejemplo, en notas a pie de página o en una declaración introductoria.
- *Salvo en circunstancias excepcionales*, un estudiante figurará como autor principal en cualquier artículo con varios autores que se base sustancialmente *en su tesis doctoral*. Los profesores asesores hablarán con los estudiantes sobre los créditos de publicación tan pronto como sea posible y a lo largo del proceso de investigación y publicación, según proceda.

En cursivas he marcado los cambios que hubo de la guía de 2006 al sitio web consultado para la elaboración de esta editorial. Me pareció interesante que se especificara que la contribución debe ser *sustancial*; algunas otras guías, áreas o disciplinas son aún más específicas y hablan de contribuciones *intelectuales* sustanciales. Esto da para una discusión profunda si vamos más allá de la autoría, por ejemplo, a la discusión sobre las publicaciones redundantes, porque se ha identificado que en las ciencias sociales esta conducta se considera “menos grave” (Robinson, 2014) y puede no señalarse en la forma en que se ha hecho en otras áreas (principalmente en la medicina y el área biológica). En estas circunstancias, ¿cómo interpretamos las *contribuciones intelectuales sustanciales*?

Con los dos primeros principios de la APA debiera ser suficiente para evitar los casos más clásicos o frecuentes que se reportan en la literatura, cuando se discuten malas prácticas en torno a la autoría: *honoraria, por invitación o regalo*; *fantasma*, *huérfana* y *falsificada* (ver sus características en McNutt, M. K., et al, 2018). El orden de autoría es un punto para negociar y establecer cuando no se trate de una investigación doctoral y, actualmente, este caso está abierto a excepciones, no así en la guía de 2006. Aunado a no hacer excepción, en la guía de 2006 se hablaba de disertación o tesis, así que podría incluir investigación a otro nivel educativo, cuya responsabilidad mayor recayera en el estudiantado.

El trabajo de publicación que promovemos en el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, es decir, en el *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (a partir de la participación en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) y la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Relime) está fuertemente vinculado a programas de formación de profesorado y posgrado de los niveles especialidad, maestría y doctorado; así que debemos considerar una gama amplia de situaciones donde proteger el trabajo del estudiantado.

Acercándome a la investigación educativa, una guía disponible y traducida al español, de la *Asociación Británica de Investigación Educativa* (BERA por sus siglas en inglés), en la misma línea que los principios anteriores determina que:

> – La autoría de las publicaciones normalmente comprende una lista de todas las personas que han hecho una contribución sustantiva e identificable a la investigación que se reporta. Ejemplos de ello son: aportar ideas generativas, esquemas conceptuales o categorías analíticas; redactar primeros borradores o partes sustanciales del texto; reescribir o editar de manera significativa; contribuir de manera significativa a la revisión de la literatura relevante; y contribuir a la recopilación y análisis de datos, así como a los juicios e interpretaciones que se hagan en relación con ellos. Cuando la investigación ha implicado la colaboración entre diferentes roles o profesiones –entre investigadores de la educación que son académicos y aquellos que son profesores u otros profesionales, por ejemplo– entonces cualquiera que haya hecho una contribución sustantiva debe ser acreditado como coautor.
>
> – La categoría académica o cualquier otro indicador de antigüedad no determina la primera autoría. Más bien, el orden de autoría debe reflejar el liderazgo relativo y las contribuciones realizadas. Alternativamente, los coautores pueden acordar una simple lista alfabética de sus nombres. Se debe lograr un acuerdo consensuado sobre la autoría tan pronto como sea posible en el proceso de redacción.
>
> (BERA, 2019, p. 39)

Aquí vale la pena señalar los ejemplos añadidos de lo que se considera como contribución ya no solo sustancial (o sustantiva), sino *identificable*, porque reflejan el quehacer disciplinar y pueden ser, como en el caso de la Matemática Educativa, definidos por los objetos de estudio y tipos de investigación; de ahí que sea importante que lleguemos a estas caracterizaciones como comunidad y podamos hacerlas lo más inclusivas posible.

En asociaciones u organizaciones internacionales de investigación en Matemática Educativa (Educación Matemática, Didáctica de las Matemáticas, entre otras formas y tradiciones de nuestra disciplina) encontré el trabajo del *Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática* –conocido como el PME por las siglas en inglés de *Psychology of Mathematics Education*–. En la sección de *Publicaciones* de su sitio web, la *Declaración de Ética de la Publicación* para las actas de su congreso incluye una definición de autoría, donde declaran que:

"PME considera autores a las personas que cumplen los dos criterios siguientes:

1. Haber realizado una contribución intelectual significativa al desarrollo teórico, al diseño de la investigación y/o al análisis e interpretación de los datos asociados al trabajo contenido en el artículo.
2. Haber contribuido a la redacción del artículo y/o a la revisión de su contenido intelectual.

Se espera que los colaboradores que cumplan ambos criterios aprueben la versión final del artículo, incluidas las referencias, tal y como se presentó al organizador de la conferencia.

Los colaboradores que no cumplan los dos criterios anteriores podrán ser incluidos en la sección de agradecimientos de la ponencia. Omitir a un autor que haya contribuido a un trabajo o incluir a una persona que no cumpla todos los requisitos anteriores se considera una infracción de la ética editorial."

Como en el caso del BERA, el PME incluye roles específicos en la contribución de la investigación en su primer criterio, que son característicos de la investigación que se realiza en nuestra disciplina, y si bien su segundo criterio y las aclaraciones posteriores son relativas a la autoría como comunicación de la investigación, no incluye discusión alguna sobre el orden de ésta.

El orden de autoría, dentro de esta área de discusión, puede ser la que más varíe incluso dentro de una disciplina; como mencionamos previamente, entre culturas y grupos de investigación. Esto puede deberse simplemente a las políticas de ciencia y tecnología en las que se enmarca el trabajo de investigación, por ejemplo, hay sistemas de evaluación a la investigación que exigen ser primer(a) autor(a) para obtener ciertas categorías o renovación de contrato o estímulos. En (Codina, 2019) se puede profundizar en una revisión y reflexión detallada de las distintas "tradiciones" que se han reportado en la comunidad científica para decidir sobre el orden de autoría.

Para respetar este panorama de diversidad respecto al criterio de orden de autoría, en un contexto de internacionalización de las revistas científicas, surge la necesidad de incluir en las publicaciones los *roles de contribución*. Así, sin importar la tradición regional o del grupo, se podrá otorgar el crédito que corresponda a cada autor(a) por el trabajo que haya realizado tanto en la investigación como en su comunicación a través de las publicaciones.

Las revistas que han adoptado este criterio suelen utilizar los roles de la taxonomía conocida como CRediT (*Contributor Roles Taxonomy*), que incluye 14 roles: conceptualización, curación de datos, análisis formal, financiamiento, investigación, metodología, administración de proyecto, recursos, software, supervisión, validación, visualización, escritura del manuscrito original, y revisión y edición del manuscrito; así como una breve descripción de cada uno.

El caso particular de la actualización de directrices, Normas y Políticas Editoriales en la Relime, que estamos iniciando al hacer pública esta editorial, responde justamente al contexto de internacionalización que está viviendo actualmente la revista, sin que ello represente dejar de responder a su objetivo de creación:

> "Nuestro proyecto, que parte de la pluralidad, se dirige ambiciosamente hacia la construcción de la Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa cuyos componentes esenciales radiquen en los elementos propios de nuestra cultura en beneficio de nuestros sistemas educativos"

El diálogo entre los estándares internacionales, las buenas prácticas editoriales y su adaptación disciplinar y regional nos permitirá mantenernos como un espacio de comunicación científica pertinente. Por ello, hemos iniciado con algunas actualizaciones elementales que se irán refinando a partir de un diálogo abierto con la comunidad científica.

En nuestras *Normas para publicación* se ha hecho explícita la inclusión de la *declaración de contribución y autoría* en la estructura de los manuscritos, con el siguiente formato:

> *Declaración de contribución y autoría*
>
> *Nombre de primer(a) autor(a), Apellido(s)*, descripción de rol(es) en torno a la investigación y contribución en la autoría.
>
> *Nombre de segundo(a) autor(a), Apellido(s)*, descripción de rol(es) en torno a la investigación y contribución en la autoría.
>
> *Nombre de tercer(a) autor(a), Apellido(s)*, descripción de rol(es) en torno a la investigación y contribución en la autoría.
>
> …

Y el documento de *Descripción y Ejemplos* de nuestra *Plantilla* con el formato para las contribuciones, incluye los apoyos correspondientes para su llenado:

> Es el listado de roles de participación y contribución en las fases de la investigación (por ejemplo, diseño de la investigación, diseño de los instrumentos, producción de datos, análisis de datos, interpretación y resultados, entre otros) y de la comunicación de sus resultados (por ejemplo, borrador inicial del manuscrito, revisión crítica, edición, aprobación de versión final, entre otros) en el manuscrito que se presenta a la Relime.

Por otro lado, quien se haga responsable de enviar el manuscrito debe verificar, en la *Lista de comprobación para la preparación de envíos*, que:

- Se considera en la autoría a todos quienes han realizado una contribución sustancial en la investigación y son responsables de ella y de su publicación.

Finalmente, para el caso de los manuscritos aceptados, la aprobación final de la versión a ser publicada significa tener el crédito y los beneficios, pero también hacerse cargo y responder ante cualquier demanda ética en torno al artículo, incluyendo, como señalamos en la *Política antiplagio* y con base en las recomendaciones del COPE, consideraciones respecto al uso de herramientas de Inteligencia Artificial:

> Las y los autores que utilicen herramientas de Inteligencia Artificial en la redacción de un manuscrito deben transparentar la forma en cómo se utilizó y qué herramienta se utilizó. Las y los autores son plenamente responsables del contenido de su manuscrito, incluyendo las partes producidas por estas herramientas, por lo que también son responsables de cualquier infracción ética de su contenido.
>
> De ninguna manera estas herramientas pueden aparecer como coautores del manuscrito.

Claramente, a lo largo de esta editorial, he puesto un énfasis intencional en la autoría que involucra al estudiantado; me preocupa y ocupa la comunicación científica con las futuras generaciones. Además, como mencioné al principio, me motivaron las experiencias personales, asistir a congresos, ser coordinadora académica de un posgrado y editora de una revista científica. Reflexionándolo en retrospectiva, en realidad son experiencias académicas que se vieron reforzadas al identificar que diversas asociaciones científicas están incluyendo un principio que explícitamente otorga al estudiantado *la primera autoría* en las publicaciones que comunican su trabajo de investigación, independientemente de la tradición que exista en su espacio formativo en relación con el orden de autoría.

En el fondo, todos entendemos el significado de ser primer autor o autora, no se diga ser el único o la única… pero un gran poder conlleva una gran responsabilidad y esa posición significa eso, responsabilidad en la investigación y su comunicación. Ahora, tenemos que configurar los acuerdos disciplinares de nuestra región para caracterizar el crédito y la responsabilidad.

Sirva la reflexión incluida en esta editorial como una invitación, en principio al CLAME y a Juventud CLAME, pero que quiero extender a las revistas y asociaciones latinoamericanas de Educación Matemática, para que convoquemos a la comunidad a través de los distintos canales académicos de comunicación que se han abierto para discutir sobre autoría, sus componentes, roles de contribución, originalidad, entre otros temas de relevancia que nos permitan dar voz y resaltar de manera responsable y congruente, la investigación que hemos hecho y seguiremos haciendo en Latinoamérica.

Referencias

Albert, T. y Wager, E. (2003). How to handle authorship disputes: a guide for new researchers. *The COPE Report 2003*, 32-34. https://doi.org/10.24318/cope.2018.1.1

APA Science Student Council. (2006). *A Graduate Student's Guide to Determining Authorship Credit and Authorship Order.* https://www.apa.org/science/leadership/students/authorship-paper.pdf

American Psychological Association. (2015). *Tips for Determining Authorship Credit.* https://www.apa.org/science/leadership/students/authorship-paper#

Asociación Británica de Investigación Educativa [BERA] (2019). Guía Ética para la Investigación Educativa (4.ª ed.) (L. Rivera Otero y R. Casado-Muñoz, Trads.), Londres. Recuperado a partir de: https://www.bera.ac.uk/publication/guia-etica-para-la-investigacion-educativa

Codina, L. (2018). Artículos científicos: quién puede firmarlos y en qué orden. Ética y pragmatismo de la publicación académica. *Revista ORL, 10*(3), 193-205. https://doi.org/10.14201/orl.19620

COPE Council. (2019). *COPE Discussion Document: Authorship*. Committee on Publication Ethics. https://doi.org/10.24318/cope.2019.3.3

CRediT. (2023). *Contributor Roles Taxonomy*. https://credit.niso.org/

McNutt, M. K., Bradford, M., Drazen, J. M., Hanson, B., Howard, B., Jamieson, K. H., Kiermer, V., Marcus, E., Pope, B. K., Schekman, R., Swaminathan, S., Stang, P. J. y Verma, I. M. (2018). Transparency in authors' contributions and responsibilities to promote integrity in scientific publication. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 115*(11), 2557–2560. https://doi.org/10.1073/pnas.1715374115

Psychology of Mathematics Education. (2023). *Publication Ethics Statement for the conference proceedings of PME.* https://www.igpme.org/publications/publication-ethics/

Robinson, S. (2014). Self-plagiarism and unfortunate publication: an essay on academic values. *Studies in Higher Education, 39*(2), 265-277. https://doi.org/10.1080/03075079.2012.655721

Autora

Gisela Montiel-Espinosa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. gmontiele@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

Camila Augusta do Nascimento Amaral,
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, Arthur Belford Powell

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DE MEDIÇÃO: CONTRIBUIÇÕES DO 4A INSTRUCTIONAL MODEL

Construction of the Fraction Concept from a Measurement Perspective: contributions of the 4A Instructional Model

RESUMEN

Investigaciones revelan que una comprensión sólida de las fracciones da forma al rendimiento matemático futuro de los estudiantes y que su conocimiento puede depender de cómo se enseña. Los investigadores informan que enseñar fracciones desde una perspectiva de medida puede promover la comprensión conceptual de los estudiantes. Investigamos esta hipótesis con estudiantes brasileños de primaria y utilizamos el enfoque pedagógico del modelo educativo 4A. Los resultados revelan que los estudiantes demostraron conocimiento conceptual sobre la comparación de la magnitud de fracciones y la construcción de la equivalencia de fracciones. Pudieron evocar imágenes mentales de este contenido y escribir de forma independiente expresiones matemáticas de comparaciones de magnitud fraccionaria. Se necesita más investigación para investigar cómo la perspectiva de medida enseñada por el Modelo Instruccional 4A influye en la comprensión de los estudiantes de las operaciones aritméticas con fracciones.

PALABRAS CLAVE:

- *Fracción*
- *Medida*
- *4A Instructional Model*
- *Enseñanza*
- *Aprendizaje*

ABSTRACT

Researches reveals that the robust understanding of fractions shapes students' future mathematics performance and that their fraction knowledge may depend on how it is taught. Researchers report that teaching fractions from a measuring perspective can promote students' conceptual understandings. We investigate this hypothesis with brazilian elementary school students and use the pedagogical approach, 4A Instructional Model. Results reveal that the students demonstrated conceptual knowledge about the magnitude comparison of fractions and the construction of equivalence of fractions. They were able evoke mental images of this content and write competently mathematical expressions of fraction magnitude comparisons. Further research is needed to investigate how the measuring perspective taught through the 4A Instructional Model influences students' understanding about the arithmetic operations of fractions.

KEY WORDS:

- *Fraction*
- *Measuring*
- *4A Instructional Model*
- *Teaching*
- *Learning*

Amaral, C. A. D., Veiga Ferreira de Souza, M. A. y Belford Powell, A. (2022). Construção do conceito de fração sob a perspectiva de medição: contribuições do 4a instructional model. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(3), 263 - 288. https://doi.org/10.12802/relime.22.2531. Recepción: Julio 13, 2020 / Aceptación: Marzo 15, 2023

RESUMO

Pesquisas revelam que o entendimento robusto das frações molda o desempenho futuro da matemática dos alunos e que seu conhecimento pode depender de como é ensinada. Os pesquisadores relatam que o ensino de frações por uma perspectiva de medição pode promover o entendimento conceitual dos alunos. Investigamos essa hipótese com alunos brasileiros do ensino fundamental pela abordagem pedagógica 4A Instrucional Model. Os resultados revelam que os alunos demonstraram conhecimento conceitual sobre a comparação de magnitude de frações e a construção da equivalência de frações. Eles foram capazes de evocar imagens mentais desse conteúdo e escrever expressões matemáticas envolvendo as comparações. Mais pesquisas são necessárias para investigar como a perspectiva de medição ensinada pelo 4A Instrucional Model influencia a compreensão dos alunos sobre as operações aritméticas de fração.

PALAVRAS CHAVE:
- *Fração*
- *Medição*
- *4A Instructional Model*
- *Ensino*
- *Aprendizagem*

RÉSUMÉ

Recherche révèle qu’une solide compréhension des fractions façonne les performances futures des élèves en mathématiques et que leur connaissance des fractions peut dépendre de la façon dont elle est enseignée. Les chercheurs rapportent que l’enseignement des fractions dans une perspective de mesure peut favoriser la compréhension conceptuelle des élèves. Nous avons étudié cette hypothèse auprès d’élèves du primaire brésilien et utilisé l’approche pédagogique 4A modèle pédagogique. Les résultats révèlent que les étudiants ont démontré une connaissance conceptuelle de la comparaison de l’amplitude des fractions et de la construction de l’équivalence des fractions. Ils ont pu évoquer des images mentales de ce contenu et écrire de manière compétente des expressions mathématiques de comparaisons de magnitude de fraction. Des recherches supplémentaires sont nécessaires pour étudier comment la perspective de mesure enseignée par le modèle pédagogique 4A influence la compréhension des élèves des opérations de fraction.

MOTS CLÉS:
- *Fraction*
- *Mesure*
- *4A Instructional Model*
- *Enseignement*
- *Apprentissage*

1. Introdução

Pesquisadores da Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva revelam que a aprendizagem de frações está diretamente relacionada com o desempenho futuro de alunos na Matemática mais avançada (e.g., Siegler et al., 2012; Siegler et al., 2013; Booth e Newton, 2012) e que o ensino de números fracionários e suas operações aritméticas é um desafio para professores (e.g., Christou, 2015; McMullen et al., 2015; Siegler et al., 2012; Vamvakoussi et al., 2012; Van Hoof et al., 2018).

Outras investigações apontam que a maneira mais indicada e favorável para compreensão do conceito de fração é a que remete à sua ontologia (Powell, 2018a; Siegler et al., 2011; Aytekin, 2020) e, alguns deles, remetem especificamente à ontologia de contextos de medição de quantidades por uma comparação multiplicativa de pares de magnitudes (Caraça, 1951; Vizcarra e Sallán, 2005; Powell, 2019a). Powell (2018a) defende que a perspectiva ontológica – aqui denominada de perspectiva de medição – ao remeter frações à sua origem histórica, contribui para o desenvolvimento do senso numérico de magnitude, ordem, equivalência e desigualdade de frações em crianças do Ensino Fundamental (6 a 8 anos), superando dificuldades de compreensões conceituais reveladas, por exemplo, na perspectiva de partição (e.g., Brousseau, 1983; Kerslake, 1986; Tzur, 1999; Vizcarra e Sallán, 2005), que emerge da divisão de coisas divisíveis. À guisa de ilustração, não faz sentido para os alunos obterem 4 partes de um objeto que é dividido em 3 partes iguais como entendimento da fração imprópria de $\frac{4}{3}$ (Mack, 1993).

Outros possíveis embaraços são apontados por Aytekim (2020) por aprendizagens pautadas singularmente em conjuntos de números discretos, diante de situações que requerem compreensões que envolvem conjuntos de números contínuos, e que vêm sendo prioritariamente utilizadas em escolas brasileiras (Scheffer e Powell, 2019). Esse é o caso, a título de exemplo, de alunos que não compreendem o motivo de o homem nunca chegar ao destino no problema do "homem a meio-caminho"[1] que diz: um passageiro percorrerá certa distância. Percorrerá a primeira metade do caminho; depois a metade restante; em seguida, a metade que falta para o destino, e assim sucessivamente. Para Aytekin (2020 como citado em Ni e Zhou, 2005), os estudantes usam o conjunto de números inteiros para compreender o dos números fracionários. O problema do "homem a meio-caminho" pode provocá-los a enfrentar a diferença essencial entre os conjuntos dos números interiros e fracionários: um é discreto e o outro é contínuo.

Face a essa conjuntura, Powell (2018a) elaborou uma abordagem instrucional denominada 4A Instructional Model para apoiar a construção do conceito de fração a partir da perspectiva de medição usando, como material pedagógico, as barras de Cuisenaire por acreditar que esse material pode auxiliar na construção de um significado matemático com base ontológica e em imagens mentais sobre frações e suas operações aritméticas básicas (Powell, 2019b). Essa abordagem

[1] O problema do "homem a meio-caminho" é uma versão do Paradoxo do antigo filósofo grego Zenão de Eleia (490-430 AEC).

pretende direcionar a atenção dos alunos para simples, porém poderosas, visualizações de frações a partir da medição de comprimentos e da identificação de relações multiplicativas com as barras de Cuisenaire.

Diante desse contexto, apresentamos resultados de uma investigação orientada pela seguinte questão de pesquisa: em meio ao engajamento de tarefas que visavam à construção do conceito de fração pela perspectiva de medição, que compreensões conceituais alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual brasileira desenvolveram em cada uma das quatro ações que compõem a abordagem 4A Instructional Model: Atual, Virtual, Escrita e Formalizada? A estrutura conceitual e teórica das frações sob a perspectiva de medição, seguida de indicações para o ensino, bem como o detalhamento da abordagem 4A Instructional Model inauguram os próximos tópicos.

2. Fundamentação conceitual e teórica das frações sob a perspectiva de medição e indicações para o ensino

De acordo com o Final Report of National Mathematics Advisory Panel[2] (NMAP), o conhecimento fundamental de fração é crucial para o sucesso futuro dos alunos em álgebra (NMAP, 2008). Apesar de sua importância, pesquisas indicam carência conceitual de frações em alunos (Mack, 1995; Ni, 2001; Ni e Zhou, 2005; Siegler et al., 2012) e professores em diferentes países (Ball, 1990; Ma, 1999; Ni, 2001; Yoshida e Sawano, 2002; Newton, 2008; Nunes e Bryant, 2008).

Segundo Vitrac (2006), as notícias mais antigas do uso das frações vêm da civilização egípcia que habitavam as margens do Rio Nilo, região cujas terras eram muito férteis e, por isso, de grande importância para a vida de seu povo. Por volta do ano de 3.000 a.C., a economia egípcia estava assentada principalmente

[2] O *Final Report of National Mathematics Advisory Panel* é um relatório de 120 páginas emitido em 2008 e organizado pelo Departamento Americano de Educação cujo objetivo era responder uma questão central: Como as escolas americanas podem melhorar o currículo, as aulas, as avaliações e a formação de professores de Matemática, para que todos os alunos americanos aprendam matemática a fim de estarem mais bem preparados para competir com alunos de outros países? O relatório discutiu 45 achados e recomendações em tópicos chaves, como práticas instrucionais, materiais didáticos, desenvolvimento profissional e avaliações. Os autores do relatório enfatizaram a importância da formação de professores, instruções e avaliações eficazes, além da necessidade de pesquisas rigorosas no ensino de Matemática. Eles também destacaram a necessidade de um esforço coordenado entre os educadores, políticos, pesquisadores e a família para alcançarem esse sucesso.

no cultivo de terras e, para que tal modo de produção ocorresse de forma eficaz, terras cultiváveis eram divididas entre os habitantes. Não obstante, anualmente, entre os meses de junho a setembro, as águas do Nilo subiam muitos metros além de seu leito regular e acabavam por inundar uma vasta região circundante, trazendo a necessidade de remarcação do terreno atingido pela enchente. Essa remarcação era realizada pelos agrimensores do estado, conhecidos como estiradores de cordas por utilizarem este objeto como unidade de medição. O processo de mensuração das terras consistia em estirar cordas e verificar a quantidade de vezes que a unidade de medida estava contida no terreno. Todavia, na maioria das vezes, a medição dificilmente era finalizada por um número inteiro de vezes em que as cordas eram estiradas, ocasionando a necessidade da criação dos números fracionários. Simbolicamente,

> [...] para saber a extensão de uma distância d, em comparação com uma unidade de medida u, nem sempre era o caso de d ser exatamente k unidades de medida u, onde k é um número inteiro. Ou seja, não é garantido que d, medido por u, seja exatamente igual a $k \times u$. [...] Em geral, se d não for igual a um múltiplo exato de u, poderá existir uma subunidade da medida v, de modo que d seja igual a exatamente m subunidades de v, isto é, $d=m\times v$; e u é igual a exatamente n subunidades de v, ou seja, $u=n\times v$, o que implica que $v=1n\times u$. Como $d=m\times v$, então $d=m\times 1n\times u$; isto é $d=mn\times u$. Assim, a distância d é igual à razão m enésimos (ou m um-enésimo) da unidade de medida u, onde mn é uma fração. Essa expressão —$d=mn\times u$— representa uma comparação multiplicativa entre as duas quantidades mensuráveis d e u (Powell, 2019b, p. 706-708).

O contexto histórico do surgimento das frações levou Powell (2018a) a desenvolver ações de ensino pela perspectiva de medição justificadas, principalmente, por: (1) remeter frações à sua origem histórica; (2) superar limitações conceituais que a perspectiva de partição apresentou em investigações; (3) facilitar a introdução de frações impróprias e a representação de números mistos; (4) formar o desenvolvimento do senso numérico sobre a magnitude, ordem, equivalência e desigualdade de frações e; (5) melhorar a fluência oral com os nomes fracionários. Se a perspectiva de medida é defendida como sendo favorável para a aprendizagem de frações, resta conhecer as compreensões conceituais de alunos mediante o ensino baseado na abordagem 4A Instructional Model levado a cabo por professores.

Powell (2019a) recomenda que o ensino de frações seja orientado pelas compreensões de equivalência de frações e do conhecimento do mínimo múltiplo comum, ambos apoiando o desenvolvimento do conceito e das operações de frações (Powell, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d). Nesse ínterim, há a comparação de magnitudes de frações e a compreensão sobre o que sejam frações próprias e impróprias. Todas as ações de ensino podem ser desenvolvidas com uso das barras de Cuisenaire como material pedagógico (Figura 1a), e esse uso requer o reconhecimento de que cada barra colorida corresponde a certa quantidade de barras brancas. A partir desse exame, os sujeitos percebem relações comparativas entre as barras. Em outras palavras, devemos ter em mente a noção de magnitude de todas as barras coloridas em relação à barra branca que representa 1 unidade de medida: uma barra vermelha tem o comprimento de duas barras brancas enfileiradas; uma barra verde clara tem o comprimento de três barras brancas; …; uma barra laranja tem o comprimento de dez barras brancas (Figura 1b).

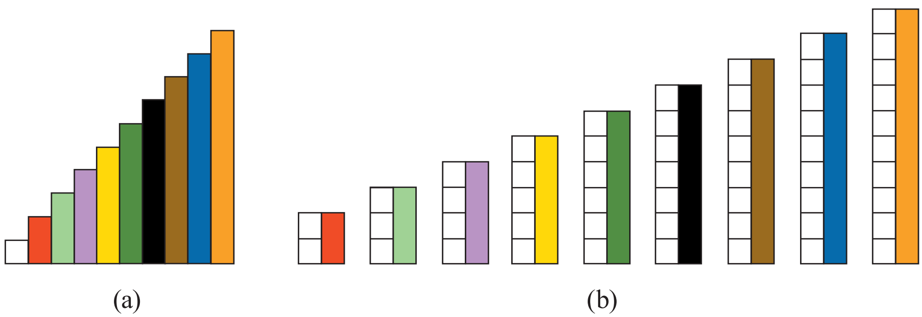


Figura 1. (a) Barras de Cuisenaire; (b) Representação das magnitudes das barras coloridas pela unidade de medida (barra branca)

Na perspectiva de medição com uso das barras de Cuisenaire, deve-se considerar o comprimento das barras como o atributo de interesse. Ao manuseá-las, os sujeitos percebem relações comparativas entre as barras e expressam suas percepções por meio de linguagem oral, escrita e pela construção de figuras (e.g., a barra branca é metade do comprimento da barra vermelha. A barra vermelha é dois terços do comprimento da barra verde clara. A barra amarela é cinco quartos do comprimento da barra roxa – Figura 2).

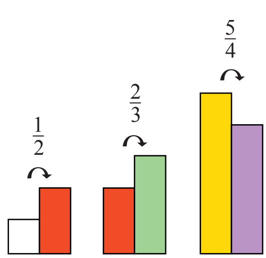


Figura 2. Exemplos de relações comparativas de medidas entre as barras de Cuisenaire

A ideia da equivalência de frações deve ser desenvolvida por meio da relação entre os comprimentos das barras de um número fracionário específico. À guisa de exemplo, o número fracionário “um meio” pode ser representado com os pares de barras branca e vermelha, vermelha e roxa, verde clara e verde escura, roxa e marrom, amarela e laranja (Figura 3).

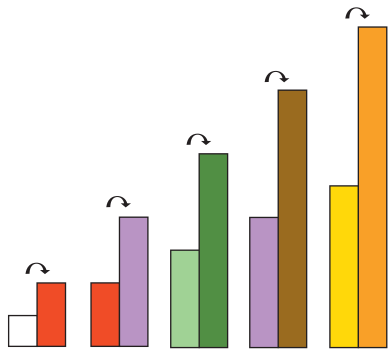


Figura 3. Exemplo de equivalência de frações representada com as barras de Cuisenaire

Com base nessa perspectiva de medição, uma fração é definida como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis da mesma espécie (Powell, 2019a). Nesse sentido, para a apreensão do significado de magnitude entre duas frações, é indicada a compreensão de três propriedades de comparação. A primeira diz respeito à comparação das magnitudes de duas frações com o mesmo denominador. A fração terá maior comprimento quando numerador for maior. Por exemplo, um terço do comprimento da barra verde escura pode ser representado por uma barra vermelha (Figura 4 – esquerda), enquanto dois terços do comprimento dessa mesma barra podem ser representados por duas barras vermelhas (Figura 4 – direita) e, ao compará-las lado a lado é possível concluir que $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ (Figura 4), tomando-se, nesses casos, como unidade de medida o comprimento da barra verde escura para ambos os conjuntos de barras.

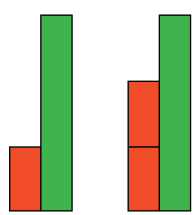


Figura 4. (esquerda) Representação de $\frac{1}{3}$ com uma barra vermelha e uma barra verde escura; (direita) Representação de $\frac{2}{3}$ com duas barras vermelhas e uma barra verde escura

A segunda propriedade envolve comparação entre duas frações com denominadores diferentes. Após encontrar uma fração equivalente com denominadores comuns para cada uma, aquela que tiver o maior numerador, terá o maior comprimento. Por exemplo, $\frac{3}{5}$ do comprimento da barra amarela pode ser representada por uma barra verde clara, enquanto $\frac{2}{7}$ do comprimento da barra preta pode ser representada por uma barra vermelha (Figura 5).

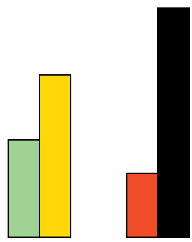


Figura 5. Exemplos de representação de $\frac{3}{5}$ (esquerda) e $\frac{2}{7}$ (direita) com as barras de Cuisenaire

Pesquisadores (Mack, 1995; Ni, 2001; Ni e Zhou, 2005; Thompson e Opfer, 2008) relatam que a compreensão de números fracionários limitada ao conjunto de números discretos, pode levar alunos a julgar a magnitude de frações pela comparação isolada de seus numeradores e/ou denominadores (e.g., $\frac{3}{5}>\frac{2}{7}$ porque $3>2$; $\frac{3}{5}<\frac{2}{7}$ porque $7>5$). Nesse caso, é indicada a compreensão da equivalência de frações e do mínimo múltiplo comum pela perspectiva de medição para superação dessa dificuldade. Assim, para a comparação das magnitudes das frações - $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{7}$ -, devemos encontrar frações equivalentes com denominadores comuns para cada uma, tendo em vista já se conhecer a primeira propriedade - comparação de frações com mesmos denominadores.

Para a equivalência de frações, é indicado encontrar o mínimo múltiplo comum (mmc) aos dois denominadores, que neste caso, é 35 (podendo ser representado por sete barras amarelas ou cinco barras pretas). Para a determinação do mmc, realizamos um "jogo" denominado de "corrida de cores". Este jogo consiste em posicionar duas barras de cores diferentes (representadas pelas unidades de medida das frações que se deseja comparar os comprimentos: no nosso exemplo, podendo ser representadas pelas barras amarelas e pretas) lado a lado com uma de suas extremidades pareadas. O objetivo do jogo é o de igualar os comprimentos das fileiras das duas cores de barras acrescentando tantas barras de cada cor quantas sejam necessárias dos dois lados até que os comprimentos das duas fileiras sejam iguais. Em seguida, verificamos a quantidade de barras inseridas de cada cor em cada fileira e, sabendo a relação de cada cor de barra com a quantidade de barras brancas, podemos determinar o mmc das duas frações (e.g., mmc entre 5 e 7 – Figura 6).

Etapa	*Jogo "corrida de cores" - mmc entre 5 e 7 unidades de medida*	*Qtde. barras*
1		1 amarela 1 preta
2		2 amarelas 1 preta
3		2 amarelas 2 pretas
4		3 amarelas 2 pretas
5		3 amarelas 3 pretas
6		4 amarelas 3 pretas
7		5 amarelas 3 pretas
8		5 amarelas 4 pretas
9		6 amarelas 4 pretas
10		6 amarelas 5 pretas
11		7 amarelas 5 pretas

Figura 6. Etapas do jogo "corrida de cores" para determinação do mmc entre 5 e 7

A Figura 6 explica o mecanismo de acréscimo de barras em cada fileira até que o jogo termine com os comprimentos igualados nas duas fileiras. Na verdade, o jogo "corrida de cores" deve ser jogado incluindo as fileiras de barras que representam os numeradores de cada fração. No nosso caso, a barra verde clara representa a magnitude do numerador da fração $\frac{3}{5}$. Essa barra deve estar ao lado da barra amarela e, receberá tantas barras verde claras quantas barras amarelas forem acrescidas da fileira de barras que representa o denominador. O mesmo deve ocorrer com as fileiras de barras da outra fração ($\frac{2}{7}$). O jogo "corrida de cores" auxilia o aluno a encontrar uma fração equivalente a $\frac{3}{5}$ e a $\frac{2}{7}$, tendo o mmc em ambos os denominadores. A fração equivalente a $\frac{3}{5}$ é $\frac{21}{35}$ (7 barras verde claras = 21 unidades de medida; 7 barras amarelas = 35 unidades de medida) e, para $\frac{2}{7}$, é $\frac{10}{35}$ (5 barras vermelhas = 10 unidades de medida; 5 barras pretas = 35 unidades de medida). Por fim, comparamos lado a lado os dois comprimentos (barras verde claras e vermelhas) e declaramos $\frac{21}{35}$ como sendo um número fracionário maior que $\frac{10}{35}$, ou seja, $\frac{3}{5}$ é maior que $\frac{2}{7}$ (Figura 7).

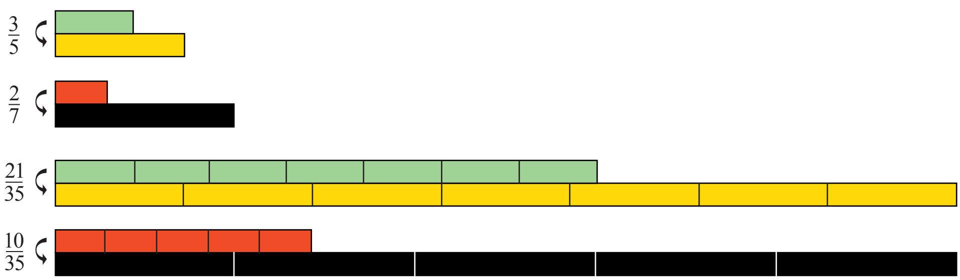


Figura 7. Comparação das frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{7}$ pelos comprimentos de $\frac{21}{35}$ e $\frac{10}{35}$

A terceira e última propriedade é um caso particular da segunda: comparação de duas frações de denominadores diferentes, mas com o mesmo numerador. A fração que terá o maior comprimento é a que tiver menor denominador. Por exemplo, $\frac{2}{5}$ do comprimento da barra amarela e $\frac{2}{9}$ do comprimento da barra azul podem ser representadas por uma barra vermelha (Figura 8).

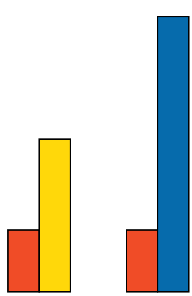


Figura 8. Representação de $\frac{2}{5}$ (esquerda) e $\frac{2}{9}$ (direita) com as barras de Cuisenaire

Para compará-las, é necessário encontrarmos inicialmente o mínimo múltiplo comum (pelo jogo "corrida de cores") dos denominadores, que neste caso, é 45 (representado por nove barras amarelas ou cinco barras azuis) para, em seguida, encontrarmos uma fração equivalente a cada uma delas. A fração equivalente a $\frac{2}{5}$ é $\frac{18}{45}$ e a de $\frac{2}{9}$ é $\frac{10}{45}$. Finalmente, basta comparar lado a lado os comprimentos das barras vermelhas para constatar $\frac{18}{45}$ como sendo maior que $\frac{10}{45}$ e, portanto, $\frac{2}{5}$ é maior que $\frac{2}{9}$ (Figura 9).

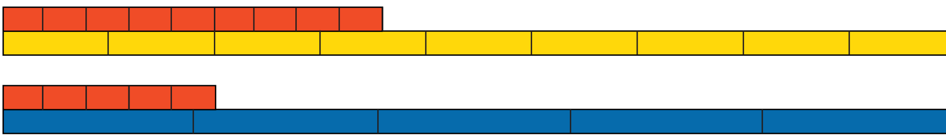


Figura 9. Exemplo de comparação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{9}$ pelos comprimentos de $\frac{18}{45}$ e $\frac{10}{45}$

As comparações de frações se configuram como um início da construção do conceito de frações sob a perspectiva de medição. Em meio ao trabalho com as comparações, os problemas epistemológicos relatados quando trabalho singular com partição podem inexistir, todavia outras dificuldades epistemológicas podem surgir, daí a importância de conhecermos os potenciais da perspectiva de medição orientados pelo 4A Instructional Model.

3. O 4A Instructional Model

A abordagem denominada 4A Instructional Model foi desenvolvida por Powell (2018a) com o objetivo de estimular o que Gattegno (1970) teoriza como a subordinação do ensino à aprendizagem da matemática. Em particular, Powell (2018a) aplica essa teoria para uma epistemologia alternativa para um ensino que promova o desenvolvimento da construção do conceito de frações seguindo sua ontologia por alunos do ensino básico. O 4A Instructional Model

> consiste em quatro fases para implementar uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino de Matemática à aprendizagem dos alunos, usando as barras de Cuisenaire. Nessa abordagem, uma unidade instrucional é frequentemente maior do que um único encontro de aula. A sequência consiste em tarefas coerentes e flexivas intencionadas para capacitar os alunos a educar sua consciência sobre ideias de um tópico matemático (Powell, 2018a, p. 409-410, tradução nossa).

Na primeira fase, denominada *Ações Atuais*, os alunos devem estar familiarizados com o material e, para isso, é indicado que inicialmente eles realizem "desenhos" ou quaisquer atividades que os levem a perceber os atributos das barras, sobretudo o de comprimento na forma de uma escadinha[3] – ordenação das barras de acordo com seus comprimentos.

Nesse momento, também é indicado estabelecer uma linguagem comum como símbolos das cores de cada barra, os conceitos de "trem" (barras colocadas de extremo a extremo), "multi-trem" (trem composto por barras de cores diferentes), "mono-trem" (trem composto por barras de mesma cor) e alguns conceitos como de "esquerda", "direita", "mais comprido", "mais curto", a simbologia de "maior", "menor", "igual a", "diferente de", etc com o objetivo de estabelecer uma comunicação entre os sujeitos.

Nessas aulas, ainda, é indicado que os alunos realizem comparações entre os comprimentos das barras, representações de uma medida dada nas barras e vice-versa, expressem compreensões sobre os conceitos de fração própria, imprópria e equivalente, etc, sempre com o auxílio das barras e conduzidos por questionamentos oferecidos pelo professor. Quando os alunos demonstrarem domínio das atividades de manipulações das barras, expressando suas ações e demonstrando compreensões sobre suas atuações quase sem uso das barras, é apropriado seguir para a segunda fase.

Na segunda fase, denominada *Ações Virtuais*, objetiva-se que os alunos respondam mentalmente e fluentemente às questões trabalhadas na fase anterior, como uma forma de transição entre a fase atual e uma mais abstrata. Por exemplo, com os olhos vendados e duas barras quaisquer, uma em cada mão, eles devem revelar entendimento sobre qual medida cada cor corresponde. A qualidade de suas ações com as barras permitirá conhecer e reter as relações entre as barras sem necessidade de consulta ao material concreto e, com isso, as manipulações físicas progredirão para as manipulações mentais. No entanto, sempre que algum aluno sentir necessidade de consultá-las, ele poderá em qualquer momento voltar à Ação Atual para reforço e consolidação de suas ideias. Ao demonstrarem sua capacidade de responder mentalmente e com fluidez às tarefas da fase virtual, sem manipularem fisicamente as barras, então é apropriado seguir para a fase seguinte.

Na terceira fase, denominada *Ações Escritas*, os alunos trabalharão simbolicamente as duas Ações anteriores, tanto a Atual quanto a Virtual, que já possuem familiaridade. Para isso, escreverão sentenças comparando medidas e utilizando a linguagem matemática como as simbologias de "maior que", "menor

[3] A palavra "escadinha" foi utilizada para traduzir o termo "*staircase*" adotado nas pesquisas escritas na língua inglesa.

que", "igual a" e "diferente de". Se necessário, os alunos podem recorrer às barras (Ação Atual) para o amadurecimento e a confirmação de seus pensamentos. A quarta e última fase, denominada *Ações Formalizadas*, dá relevo a que as ideias matemáticas que os alunos construíram nas três fases anteriores sejam discutidas e escritas usando uma linguagem formal e simbólica.

Vale registrar que nas duas primeiras fases, em que há o predomínio da linguagem oral, os alunos se empenham em construir ideias e concepções acerca do material concreto e sobre o que ele oferece em termos matemáticos. Nas duas últimas fases, praticam a escrita e formalização das ideias antes construídas. Segundo Powell (2018a), a fala e a escrita precisam ocorrer em momentos distintos para uma aprendizagem eficiente em Matemática. Alunos aprendem interagindo com eles mesmos – um discurso interno - e com outros mediados pela linguagem natural: falar, escutar e observar (Gattegno, 1973 citado em Powell, 2018b). Nesse ínterim, é importante discutirem tarefas e ideias, questionarem e negociarem significados, clarificarem seus entendimentos, e fazerem com que suas noções sejam compreensíveis aos seus parceiros. Powell acredita que as compreensões dos alunos crescem conforme eles se expressam para seus parceiros e isso se reflete nas suas ideias e aprendizagem. Sintetizamos essas ideias do 4A Instructional Model na Tabela I.

Finalmente, vale reforçar que apesar da existência do sequenciamento entre as quatro fases do 4A Instructional Model, é possível e provável, que elas não ocorram de modo linear. É razoável, a depender da necessidade do momento da aprendizagem, que se retorne e se avance para uma ou outra fase. Por isso, de uma forma geral, o critério para prosseguir de uma fase para outra é a facilidade fluida dos alunos com as ações manipulativas e mentais, além da linguagem verbal e simbólica. A qualquer momento, o professor pode propor atividades que recorram às fases anteriores com o intuito de levar os alunos a investigar certas ideias que não foram antes pensadas ou precariamente desenvolvidas, e isso não pode ser interpretado como um retrocesso, mas como uma oportunidade em dar sentido para novas situações.

4. Metodologia

Nossa pesquisa faz parte de um projeto investigativo maior sobre frações, desenvolvido pelo Instituto Federal do Espírito Santo – ES – Brasil em parceria com a Rutgers University – Newark – USA, com apoio financeiro da Rutgers Global e do Instituto Federal do Espírito Santo.

TABELA I

Quatro fases do 4A Instructional Model contendo a instrução de 13 potenciais tarefas para implementar uma abordagem pedagógica, a subordinação do ensino de Matemática à aprendizagem dos alunos usando as barras de Cuisenaire (tradução e reprodução nossa).

Ações Atuais (Actual Actions)	1. Potencializar os poderes motor e mental dos alunos (manipular, observar, escutar, ver, escutar, comparar, ordenar, pressionar e ignorar...). Instruí-los a manipular as barras de formas particulares de modo que através de suas ações eles percebam relações objetivas entre as barras. 2. Introduzir a linguagem matemática, compará-la, se necessário, a linguagem não-matemática que os alunos usam, e providenciar oportunidades aos alunos praticarem a fala matemática sobre o que eles executaram e perceberam com as barras. 3. Deixar os alunos criarem suas próprias situações com as barras que correspondem ao que está sendo trabalhado. 4. Deixar os alunos falarem, desenharem, e escreverem sobre o que eles aprenderam e providencie oportunidades para prática.
Ações Virtuais (Virtual Actions)	5. Potencializar os alunos em ações virtuais: manipulando imagens mentais das barras de formas como os alunos já fizeram nas Ações Atuais. 6. Deixar os alunos criarem sem as barras suas próprias situações que correspondem ao que está sendo trabalhado. 7. Deixar os alunos falarem e escreverem sobre o que eles aprenderam e providenciar oportunidades para prática.
Ações Escritas (Actions Written)	8. Introduzir expressões escritas matemáticas e equações que representem o que os alunos já podem realizar oralmente e virtualmente e providenciar oportunidades para a prática com o acesso às barras. 9. Deixar os alunos criarem expressões ou equações tendo ou não o acesso às barras. 10. Deixar os alunos falarem e escreverem sobre o que eles aprenderam e providenciar oportunidades para prática.
Ações Formalizadas (Actions Formalized)	11. Formalizar simbolicamente ou como uma definição as ideias, conceitos e procedimentos matemáticos que têm sido a base para as manipulações matemáticas atuais e virtuais dos alunos com as barras. 12. Deixar os alunos falarem e escreverem sobre suas compreensões das suas ideias matemáticas em declarações formais, simbólicas ou por definições. 13. Providenciar oportunidades para os alunos praticarem suas capitulações formalizadas, simbólicas ou de definição do que eles fizeram com as barras.

A investigação é qualitativa com observação participante e foi levada a efeito em uma turma de sexto ano de uma escola da rede pública estadual brasileira com vinte e cinco alunos que possuíam características sociais, culturais, econômicas, comportamentais e de desempenho escolar em Matemática semelhantes, revelados pela pedagoga da escola e pela própria professora-pesquisadora (primeira autora) que leciona naquela turma desde o início do ano letivo de 2019.

As aulas baseadas no 4A Instructional Model foram planejadas colaborativamente e presencialmente com 10 professores da escola básica e uma professora universitária (segunda autora), em 11 encontros de duas horas cada, além de interações remotas entre os encontros presenciais. As aulas foram executadas pela primeira autora e observadas pelos demais professores (professores-observadores).

Visando atender às recomendações do 4A Instructional Model, o grupo de professores planejou uma sequência de 6 aulas de 100 minutos cada, com atividades pensadas e organizadas a partir dos objetivos de cada uma das quatro ações do 4A Instructional Model, detalhando ações de ensino, tarefas e possíveis reações e dúvidas dos alunos. A Tabela II apresenta parte desse planejamento.

TABELA II
Resumo do planejamento elaborado seguindo as recomendações do 4A Instructional Model. Legenda: AC – Ações Atuais; AV – Ações Virtuais; AE – Ações Escritas; AF – Ações Formalizadas.

Aula	Ação	Tarefas
1	AA	- Familiarização com as barras de Cuisenaire pela manipulação;
	AV	- Introdução de terminologias e símbolos matemáticos: “maior que”, “menor que”, “igual a”, “diferente de”, “mono-trem” e “multi-trem”;
	AA/AV	- Comparações entre os comprimentos das barras.
2	AV	- Introdução de simbologias para representação de cada cor das barras (e.g. “b” para barra branca, “v” para barra vermelha, etc);
	AA/AE	- Elaboração de sentenças matemáticas que abordem comparações entre os comprimentos das barras (e.g. $p > b$; $r < d$; $e = 2c$; $b + 2v = d$).

3	AA	- Representação de frações utilizando as barras (e.g. uma barra vermelha ao lado esquerdo de uma barra verde clara pode ser expressa pela fração $\frac{2}{3}$ e duas barras vermelhas ao lado esquerdo de uma barra verde clara pode ser expressa pela fração $\frac{4}{3}$); - Padronização da unidade de medida; - Representação de frações nas barras (e.g. uma barra branca é $\frac{1}{5}$ do comprimento da barra amarela; uma barra amarela é $\frac{1}{2}$ do comprimento da barra laranja).
4	AA	- Equivalência de frações (e.g. uma barra vermelha à esquerda de uma barra roxa pode ser representada pelas frações $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ e uma barra verde clara à esquerda de uma barra azul pode ser representada pelas frações $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{9}$);
	AA/AE	- Elaboração de sentenças matemáticas conforme a 1ª propriedade (e.g. $\frac{4}{7} > \frac{3}{7}$; $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; $\frac{3}{5} \neq \frac{5}{3}$);
	AF	- Formalização da 1ª propriedade: dadas duas frações com o mesmo denominador, aquela que tiver o maior numerador, terá a maior medida;
	AV	- Comparações de frações conforme a 1ª propriedade sem o auxílio das barras de Cuisenaire.
5	AA	- Realização do jogo “corrida das cores” para determinar o mínimo múltiplo comum (mmc) de duas frações com denominadores diferentes (e.g. para determinar o mmc de 2 e 5, os alunos colocam lado a lado as barras vermelha e amarela até que elas obtenham o mesmo comprimento, por fim, verificam a medida das barras obtidas, neste caso, o 10);
	AA/AE	- Elaboração de sentenças matemáticas conforme a 2ª propriedade (e.g. $\frac{1}{2} > \frac{2}{5}$, pois $\frac{5}{10} > \frac{4}{10}$);
	AF	- Formalização da 2ª propriedade de comparação de frações: dadas duas frações com numeradores e denominadores diferentes, encontre uma fração equivalente para cada uma com denominadores comuns. Aquela que tiver o maior numerador terá a maior medida (AF);
	AV	- Comparações de frações conforme a 2ª propriedade sem o auxílio das barras de Cuisenaire.

6	AA/AE	- Elaboração de sentenças matemáticas conforme a 3ª propriedade (e.g. $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$, pois $\frac{15}{20} > \frac{12}{20}$);
	AF	- Formalização da 3ª propriedade: dadas duas frações com o mesmo numerador, aquela que tiver o menor denominador, terá a maior medida;
	AV	- Comparações de frações conforme a 3ª propriedade sem o auxílio das barras de Cuisenaire.

Imediatamente após a aplicação de cada aula, o grupo de professores se reuniu para refletir sobre os resultados das ações planejadas colaborativamente, tendo como alvo as compreensões conceituais dos alunos. Os dados qualitativos emergiram, portanto, das observações obtidas durante as aulas pelos professores-observadores que fizeram seus registros em diários de bordo e pelo aplicativo *Whatsapp* por meio de fotografias das produções dos alunos, de gravações de áudio e vídeo, pelos trabalhos escritos dos alunos para que todo o grupo de professores pudesse revê-los após as aulas durante a reflexão e para a coleta dos dados – eis os instrumentos de pesquisa. Para a pesquisa, solicitamos autorização da escola e um termo de livre consentimento, assinado pelos professores-observadores, inclusive pela professora-pesquisadora e aos responsáveis pelos alunos cujas imagens, vozes e produção escrita foram objeto de registros.

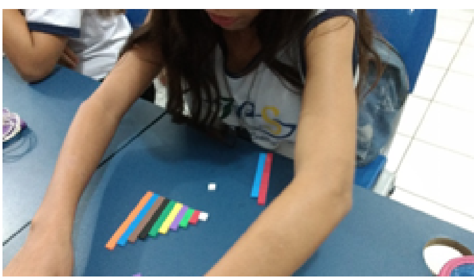
Os estudos constantes nos itens 2 e 3 deste artigo proporcionaram a elaboração de categorias de análise para estudo das compreensões conceituais dos alunos a partir da perspectiva de medição, que são:

(1) Ações Atuais
(1.1) domínio das relações entre os comprimentos das barras;
(1.2) uso da linguagem matemática (maior que, menor que etc.) e não-matemática (duas barras vermelhas têm o mesmo comprimento que 1 barra roxa) para construção de relações entre os comprimentos das barras;
(1.3) verificação da equivalência de frações;
(1.4) determinação do mmc;
(1.5) verificação da 1ª, 2ª e 3ª propriedades de comparação de frações.
(2) Ações Virtuais
(2.1) representação mental das relações entre os comprimentos das barras;
(2.2) interiorização das relações de comprimento das barras;
(3) Ações Escritas
(3.1) construção escrita de sentenças matemáticas que representem corretamente relações entre os comprimentos das barras.

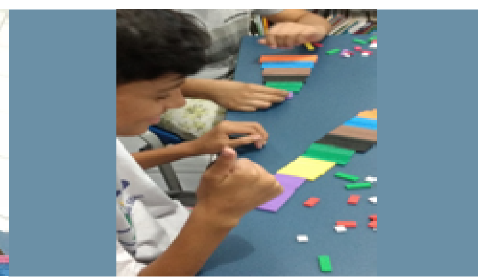
(4) Ações Formalizadas
(4.1) formalização simbólica de ideias, conceitos e procedimentos matemáticos.

5. Resultados e análises

Ao serem solicitados a manipular as barras livremente (Ações Atuais), os alunos demonstraram reconhecer os atributos de cor e comprimento das barras (Figuras 10a e 10b). Em seguida, com os olhos fechados (Ações Virtuais), os alunos praticaram atividades (Figura 10c) que permitiu que nos certificássemos da interiorização pelos alunos das relações existentes entre esses atributos, possibilitando avanço com a inserção das terminologias descritas na Tabela II - “maior que”, “menor que” etc. -, após a introdução de letras que simbolizassem as barras em suas diferentes cores – “b” para branca, “v” para vermelha, etc– (Figura 10d).



(a)



(b)

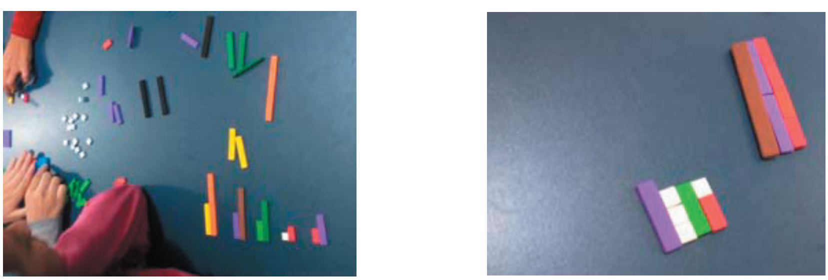
(c)

(d)

Figura 10. (a) e (b) Reconhecimento dos atributos de cor e comprimento; (c) Trabalho virtual; (d) Simbolização das relações entre os comprimentos das barras

A qualidade das ações atuais dos alunos levou-os a interiorizar as relações entre os comprimentos das barras sem necessidade de consulta ao material concreto e, com isso, as manipulações físicas foram progredindo para as manipulações mentais. Essas tarefas – integrantes das ações atual, virtual e escrita – facultaram uma linguagem comum entre os alunos e alunos-professora, instalando-se, assim, um ambiente de comunicação basilar para as tarefas futuras visando à construção do conceito de frações.

Com a noção de medida construída, os alunos estabeleceram relações entre os comprimentos de duas cores de barras diferentes (e.g., uma barra vermelha ao lado esquerdo de uma barra verde clara pode ser expressa pela fração $\frac{2}{3}$ e, duas barras vermelhas ao lado esquerdo de uma barra verde clara podem ser expressas pela fração $\frac{4}{3}$). A partir dessas relações, compreenderam que uma mesma medida pode ser representada por cores de barras diferentes, a depender da unidade estabelecida (e.g., $\frac{1}{2}$ do comprimento da barra marrom não é o mesmo que $\frac{1}{2}$ do comprimento da barra laranja – Figura 11a) e que, por outro lado, uma mesma medida pode ser representada de diversas maneiras (e.g., $\frac{4}{3}$ pode ser representado como uma relação entre os comprimentos da barra roxa com o comprimento de três barras brancas ou com o comprimento da barra verde clara, etc – Figura 11b).



(a) (b)

Figura 11. (a) Representação de $\frac{1}{2}$ com diferentes unidades de medida; (b) Diferentes representações para a fração $\frac{4}{3}$ utilizando as barras

Essas observações realizadas com o apoio das barras de Cuisenaire como material pedagógico (Ações Atuais) possibilitou que os alunos aumentassem a sua fluência oral de nomes fracionários e também foram importantes para a construção do conceito de frações próprias, impróprias e equivalentes (Figura 12), que foram essenciais para as próximas tarefas de comparações com frações.

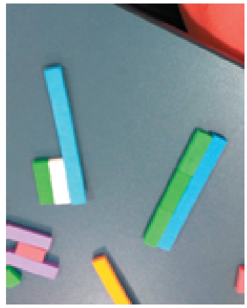
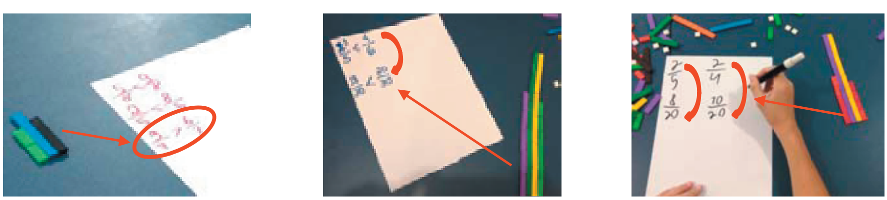


Figura 12. Representação da equivalência entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$ em relação a barra azul

A princípio, os alunos compararam frações com mesmo denominador (1ª propriedade) para, então, avançarem para as comparações de numeradores e denominadores diferentes (2ª propriedade) e de numeradores iguais, porém com denominadores diferentes (3ª propriedade).

Para a 1ª propriedade, os alunos representavam nas barras duas frações com a mesma unidade de medida, colocavam-nas lado a lado e comparavam seus comprimentos. A barra (ou barras) com maior comprimento representava a fração de maior medida (e.g., $\frac{9}{7} > \frac{6}{7}$ – Figura 13a). Para realização da 2ª e 3ª propriedades, era preciso que estabelecessem, inicialmente, a equivalência entre as frações a fim de obterem a mesma unidade de medida para, em seguida, comparar as frações (e.g., $\frac{3}{5} < \frac{4}{6}$ – Figura 13b e $\frac{2}{5} < \frac{2}{4}$ Figura 13c). Constatamos nessas tarefas, o trabalho simultâneo com as Ações Atuais e Escritas pelos alunos.



(a) (b) (c)

Figura 13. (a) Comparação de frações conforme a 1ª propriedade;
(b) Comparação de frações conforme a 2ª propriedade;
(c) Comparação de frações conforme a 3ª propriedade

As atividades de comparações de frações como propostas no planejamento foram importantes para que iniciassem a construção do conceito de frações e evitassem transportar propriedades dos números inteiros para aplicações que só cabem para números fracionários, como denunciado em pesquisas (Brosseau, 1983; Mack, 1995; Ni, 2001; Siegler et al., 2012). Além disso, a construção de sentenças matemáticas com uso da linguagem matemática proporcionou que os alunos expressassem relações de medidas simbolicamente, contribuindo para o desenvolvimento do senso numérico de magnitude, ordem, equivalência e desigualdade de frações (Figura 14).

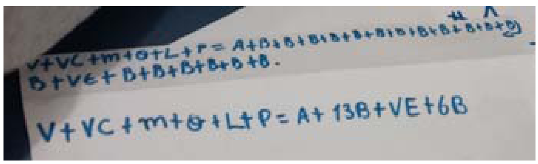


Figura 14. Construção de sentenças matemáticas mais avançadas

Após as atividades de comparações de frações, os alunos discutiram e construíram ideias matemáticas sobre as três propriedades que foram formalizadas usando uma linguagem formal e simbólica (Ações Formalizadas). Com isso, eles criaram argumentos suficientes para responder virtualmente algumas comparações que foram questionadas ao final de cada propriedade (Figura 15) pela professora (Ações Virtuais). As tarefas, portanto, não foram lineares, pois, sempre que algum conhecimento carecia de revisão e reforço das ideias, era indicado que recorrêssemos às tarefas anteriores, sobretudo com uso das barras de forma atual (AA).

Figura 15. Alunos formalizando a ideia de uma das propriedades e respondendo virtualmente comparações de frações para a turma

As oralidades e a produção escrita dos alunos foram base para as reflexões que ocorreram após cada aula pelo grupo de professores (professoras-pesquisadoras e professores-observadores) sobre as dificuldades e progressos acerca da construção inicial do conceito de fração. Esse grupo de profissionais mostrou-se convicto de que o ritmo de aprendizagem de cada aluno foi singular e que as interações e tarefas baseadas no 4A Instructional Model foram potenciais para a construção do conceito de frações. Além disso, as tarefas proporcionaram evolução e resgate de conhecimentos de alunos que apresentavam dúvidas e equívocos.

Em suma, inferimos – ao lado do grupo de professores participantes da pesquisa – que as atividades planejadas com base na perspectiva de medida foram gatilho para *insights* demonstrados pelos alunos acerca da construção do conceito de fração. À guisa de exemplo, os alunos ao compararem frações com denominadores diferentes, não necessariamente utilizaram o mínimo múltiplo comum, mas um múltiplo qualquer e verificaram haver variadas maneiras para comparar frações seguindo esta propriedade.

6. Conclusões

O reconhecimento pela comunidade científica da importância de frações para a matemática geral nos levou a investigar as construções conceituais de alunos brasileiros do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir da perspectiva de medição e submetidos ao ensino de frações de acordo com a abordagem pedagógica 4A Instructional Model.

De modo geral, as tarefas planejadas para compreensão das três propriedades de frações seguindo a perspectiva de medição, e sendo orientadas pelas ações do 4A Instructional Model, favoreceram a construção inicial do conceito de fração pelos alunos, notadamente, quando da concepção de equivalência e comparações de frações. Além disso, conceitos – como os de frações impróprias – considerados de difícil compreensão por pesquisadores da Educação Matemática e Psicólogos Cognitivistas, foram prontamente apreendidos pelos alunos, a partir das comparações dos comprimentos das barras de Cuisenaire e da formulação de proposições matemáticas (*Ações Atuais*), evitando cometerem erros comuns como o de utilizar propriedades dos números inteiros aplicadas indiscriminadamente no campo dos números fracionários.

As *Ações Virtuais* foram competentes para despertar a fluência oral de nomes fracionários e para constituir imagens mentais sobre a magnitude das frações. Por exemplo, os alunos sabiam que $\frac{1}{2}$ do comprimento da barra roxa não era o mesmo que $\frac{1}{2}$ do comprimento da barra laranja. Além disso, ao compararem frações com denominadores diferentes, não se sentiram forçados a utilizar o mmc, mas muitos alunos empregaram um múltiplo qualquer e verificaram haver várias maneiras para comparar frações desse tipo, mesmo que algumas comparações tenham sido mais trabalhosas do que outras. Essa Ação também possibilitou aos alunos interpretarem frações como um único número e não como duas partes distintas (numerador e denominador) que não se relacionam. Essas declarações dos alunos ocorreram sem a manipulação das barras de Cuisenaire e, por isso, inferimos por meio dos protocolos dos alunos terem sido potencializadas pelas Ações Virtuais. As *Ações Escritas e Formalizadas* promoveram a conexão de ideias apoiadas em aspectos ontológicos à escrita simbólica de frações. As duas últimas ações fomentaram o desenvolvimento da ideia de equação, sem que essa denominação fosse introduzida.

Por fim, concluímos que as ações do 4A Instructional Model estimularam as interpretações ontológicas e epistemológicas de frações pelos alunos pela perspectiva da medição, facilitando a construção do conceito pelos alunos. Recomenda-se que mais pesquisas sejam desenvolvidas a fim de investigar como a perspectiva de medição ensinada pelo 4A Instrucional Model influencia a compreensão dos alunos sobre as compreensões conceituais em operações aritméticas básicas com frações e em outros constructos matemáticos que compõem e dependem de suas noções.

Agradecimentos

Agradecemos à Rutgers Global, ao Instituto Federal do Espírito Santo e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo o apoio financeiro para a realização da presente pesquisa científica.

Referências

Aytekin, C. (2020). Development of fraction concepts in children. Em O. Zahal (Ed.), *Academic Studies Educational Sciences – II* (pp. 21-48). Gece Kitapligi.

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132–144. https://doi.org/10.2307/749140

Booth, J. e Newton, K. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, *37*(4), 247-253. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198. https://hal.science/file/index/docid/550256/filename/Brousseau_1976_obstacles_et_problemes.pdf

Caraça, B. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Tipografia Matemática.

Christou, K. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education*, *47*, 747-758. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0675-6

Gattegno, C. (1970). *What we owe children: The subordination of teaching to learning*. Avon.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Eric.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. (1993). Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. Em T. Carpenter, E. Fennema, e T. Romberg (Eds.), *Rational numbers*: *an integration of research* (pp. 85-105). Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9780203052624

Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research Mathematics Education*, *26*, 422–441. https://doi.org/10.2307/749431

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M. M. e Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, *37*, 14–20. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

National Mathematics Advisory Panel [NMAP]. (2008). *Foundations for success: Final report of the national mathematics advisory panel*. US Department of Education.

Newton, K. (2008). An extensive analysis of pre-service elementary teachers: Knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080–1110. https://doi.org/10.3102/0002831208320851

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, *26*, 400–417. https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1072

Ni, Y. e Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychology*, *40*, 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Nunes, T. e Bryant, P. (2008). *Understanding rational numbers and intensive quantities*. Em *Key understanding in mathematics learning* (pp. 1-31). Nuffield Foundation. https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2020/03/P3.pdf

Powell, A. B. (2018a). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Perspectiva*, *36*(2), 399-420. https://doi.org/10.5007/2175-795x.2018v36n2p399

Powell, A. B. (2018b). Melhorando a epistemologia de números fracionários: Uma ontologia baseada na história e neurociência. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, *13*(29), 78-93. http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/200/0

Powell, A. B. (2019a). How does a fraction get its name? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, *3*(3), 700-713. https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846

Powell, A. B. (2019b). Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. *Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática*, *9*(2), 50-68. http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/ripem/article/view/2152

Powell, A. B. (2020a, 10 de julho). *Operações com frações – parte 1 [Video]. YouTube*. https://youtu.be/JvXvzw7Vpns

Powell, A. B. (2020b, 10 de julho). *Operações com frações – parte 2 [Video]. YouTube*. https://youtu.be/ccEtz9LzA3s

Powell, A. B. (2020c, 10 de julho). *Operações com frações – parte 3 [Video]. YouTube*. https://youtu.be/Ckf-MDJbuak

Powell, A. B. (2020d, 10 de julho). *Operações com frações – parte 4 [Video]. YouTube*. https://youtu.be/CFboWc8mwjM

Scheffer, N. F. e Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, *1*(3), 476-503. http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/388/3881874008/index.html

Siegler, R., Thompson, C. e Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. e Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691-697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Siegler, R., Fazio, L., Bailey, D. e Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trend in Cognitive Sciences*, *17*(1), 13-19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Thompson, C. e Opfer, J. (2008). Costs and benefits of representational change: Effect of context on age and sex differences in magnitude estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *101*, 20–51. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.02.003

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 390-416. https://doi.org/10.2307/749707

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. e Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 344-355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. e Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99–108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010

Vitrac, B. (2006). *A invenção da geometria*. Ediouro.

Vizcarra, R. e Sallán, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*, 17-35. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1397

Yoshida, H. e Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, *44*, 183–195. https://doi.org/10.1111/1468-5884.00021

Autores

Camila Augusta do Nascimento Amaral. Instituto Federal do Espírito Santo, Brasil. cam.amaral@yahoo.com.br

https://orcid.org/0000-0002-5721-7783

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza. Instituto Federal do Espírito Santo, Brasil. alicevfs@gmail.com

https://orcid.org/0000-0003-2038-813X

Arthur Belford Powell. Rutgers University - Newark, USA. powellab@newark.rutgers.edu

https://orcid.org/0000-0002-6086-3698

Eloísa Montero, María Luz Callejo[1], Julia Valls

ANTICIPACIÓN DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES MEDIANTE UNA PROGRESIÓN DE APRENDIZAJE

The use of the progression in strategies of resolution of measurement-division fraction problems by preservice primary mathematics teachers

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes para maestro, un año después de un experimento de enseñanza, reconocen diferentes etapas de progresión al anticipar estrategias de estudiantes de educación primaria al resolver problemas de división - medida con fracciones. Los 41 participantes cursaban el séptimo semestre del Grado en Maestro en Educación Primaria durante el curso 2018-2019. En el análisis se tuvo en cuenta el tipo de estrategias utilizadas y si estas evidenciaban la idea de progresión. Los resultados muestran tres categorías en el uso de la idea de progresión al anticipar respuestas a problemas de división-medida: (a) No usan la idea de progresión; (b) usan parcialmente la idea de progresión; (c) usan la idea de progresión. Pese a su dificultad, es posible comenzar a desarrollar la idea de progresión al anticipar estrategias en la formación de futuros maestros.

PALABRAS CLAVE:

- *Anticipación de estrategias*
- *Progresión en el aprendizaje*
- *Estudiantes para maestro de primaria*
- *División-medida con fracciones*
- *Mirar profesionalmente*

ABSTRACT

The objective of this research is to characterize how primary prospective teachers, one year after a teaching experiment, recognize different stages of progression anticipating solving strategies for measurement division problems with fractions used by elementary school children. The 41 participants were in the seventh semester of the Education Teaching Degree (eight semesters) during the 2018-2019 academic year. The analysis considered the type of strategies used and whether they evidenced the idea of progression. The results show three categories in the use of the idea of progression when anticipating answers to measurement division problems: They (a) do not use the idea of progression; (b) partially use the idea of progression; (c) use the idea of progression. Despite its difficulty, it is possible to begin to develop the idea of progression by anticipating strategies in the training of future teachers.

KEY WORDS:

- *Anticipation*
- *Progression in learning*
- *Prospective primary teachers*
- *Measurement division problems with fractions*
- *Professional noticing*

[1] La autora ha fallecido † en el tiempo del proceso de envío-revisión.

Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J. (2022). Anticipación de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones mediante una progresión de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(3), 289 - 310. https://doi.org/10.12802/relime.22.2532. Recepción: Noviembre 16, 2020 / Aceptación: Mayo 3, 2023

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é caracterizar como estudantes para professores, um ano após a sua formação, são capazes de reconhecer a existência de diferentes níveis de progressão, antecipando estratégias de resolução de problemas com frações envolvendo divisão-medida, utilizadas por alunos dos anos iniciais. Os 41 participantes estavam em seu sétimo semestre do Graduação em Pedagogia nos anos iniciais (oito semestres) durante o ano acadêmico de 2018-2019, um ano após receberem formação em uma experiência de ensino. A análise teve em conta o tipo de estratégias utilizadas e se evidenciavam a ideia de progressão. Os resultados mostram três categorias no uso da ideia de progressão ao antecipar respostas a problemas de divisão-medida: (a) eles não usam a ideia de progressão; (b) usar parcialmente a ideia de progressão; (c) usar a ideia de progressão. Apesar de sua dificuldade, é possível começar a desenvolver a ideia de progressão antecipando estratégias na formação dos futuros professores.

PALAVRAS CHAVE:

- *Antecipação*
- *Progressão da Aprendizagem*
- *Estudantes para professor de anos iniciais*
- *Problemas de divisão-medida com frações*
- *Olhar profissionalmente*

RÉSUMÉ

Le but de cette recherche est de caractériser comment les futurs professeurs des écoles, une année après une expérience d'enseignement, reconnaissent différentes étapes de progression différents quand ils anticipent des stratégies de résolution de problèmes de division-mesure avec des fractions employées par les élèves du Primaire. Les 41 participants étaient au septième semestre des études pour devenir professeurs d'Éducation Primaire (huit semestres) au cours de l'année académique 2018-2019, une année après une expérience d'enseignement. L'analyse a pris en compte le type de stratégies utilisées et si elles mettaient en évidence l'idée de progression. Les résultats montrent trois catégories face à l'usage de l'idée de progression: a) L'idée de progression n'est pas utilisée; (b) on utilise partiellement l'idée de progression; (c) on utilise l'idée de progression. Malgré sa difficulté, il est possible de commencer à développer l'idée de progression quand on anticipe des stratégies lors de la formation de futurs professeurs.

MOTS CLÉS:

- *Anticipation*
- *Progression dans l'apprentissage*
- *Étudiants pour devenir professeurs des écoles*
- *Problèmes de division-mesure avec des fractions*
- *Regard professionnel*

1. Introducción

Entre las tareas del profesorado se encuentran anticipar, interpretar y dotar de significado a las respuestas de los estudiantes. Cuando el profesorado planifica una lección es conveniente prever las respuestas que pueden dar los estudiantes para considerar qué preguntas puede hacer o qué variables modificar en la actividad para ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades o para plantearles situaciones más complejas.

La mayor parte de los trabajos empíricos sobre la mirada profesional del profesor de matemáticas se han centrado en cómo se interpreta el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010). Sin embargo, menos estudios se han centrado en caracterizar cómo los futuros maestros y profesores de matemáticas anticipan posibles respuestas de los estudiantes cuando planifican la enseñanza (Fernández et al., 2018; Llinares et al., 2016; Stahnke et al., 2016). La importancia de anticipar posibles respuestas de los estudiantes ha sido manifestada desde diferentes perspectivas. Por ejemplo, desde el conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT, Ball et al., 2008); desde el conjunto de prácticas que forman parte del proceso de planificación del profesor, teniendo en cuenta las ideas de los estudiantes (Smith y Stein, 2011); y desde propuestas formativas basadas en la "representación de la enseñanza" (Herbst et al., 2011).

En particular, Ball et al. (2008) indican que:

> Los profesores deben anticipar lo que los estudiantes probablemente piensen y aquello en que tengan dificultades. Cuando escojan un ejemplo, los profesores necesitan predecir lo que los estudiantes pueden considerar interesante y motivador. Cuando escojan una actividad, los profesores necesitan anticipar lo que los estudiantes harán y si ellos encontrarán la actividad fácil o difícil. […]. Cada una de estas actividades requiere una interacción específica entre el conocimiento de matemáticas y la familiaridad con el estudiante y su pensamiento matemático. (p. 401)

En su formación los estudiantes para maestro (EPM) necesitan desarrollar estas actividades de anticipación. Para ello, resulta relevante proporcionarles referencias para pensar sobre la progresión de la comprensión de los estudiantes (Wilson et al., 2013; Wilson et al., 2014; Wilson et al., 2015). Diversos estudios indican que es posible diseñar entornos de aprendizaje en los programas de formación para ayudar a los EPM a robustecer el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas. Una característica de estos entornos de aprendizaje es proporcionar información sobre trayectorias o progresiones de aprendizaje (Clements y Sarama, 2004; Ivars et al., 2020; Sánchez-Matamoros et al., 2018; Simon, 1995; Wilson et al., 2015). Los EPM pueden usar estas progresiones en el aprendizaje de tópicos matemáticos para centrar su atención en el pensamiento matemático de los estudiantes (Edgington, 2014; Edgington et al., 2016). En este sentido, la información sobre la progresión en el aprendizaje de tópicos matemáticos hace el papel de hojas de ruta para ayudar a los EPM a anticipar respuestas de los estudiantes, identificar objetivos de aprendizaje, interpretar respuestas de los estudiantes y en función de ello proponer tareas que les ayuden a avanzar en la comprensión de dominios matemáticos específicos (Wilson et al., 2015).

Uno de los dominios matemáticos en los que se ha mostrado que maestros y estudiantes de educación primaria tienen mayores dificultades es la enseñanza-aprendizaje de las fracciones y sus operaciones, en particular, la división. Algunas investigaciones indican que, aunque los EPM tienen conocimiento procedimental para resolver problemas con fracciones (Depaepe et al., 2015) y para realizar los algoritmos de cálculo, a menudo tienen dificultad para entender su significado más allá de los procedimientos (Ball, 1990; Li y Kulm, 2008; Vula y Kingji-Kastrati, 2018).

Respecto a la división, Graeber et al. (1986) señalaron que los EPM tendían a interpretar la división sólo como división-partitiva, es decir, reparto de un conjunto de objetos de forma equitativa entre un número de grupos. Sin embargo, tenían dificultades en las situaciones en las que la división tenía el significado de división-medida (también conocida como división cuotitiva), es decir, determinar cuántos grupos de un tamaño determinado se pueden formar con un número dado de objetos. En la misma línea, Ball (1990) encontró que los EPM tenían dificultad para comprender el significado de la división de fracciones ya que muchos de ellos sólo eran capaces de interpretar la división en términos de división-partitiva. En un grupo de 19 futuros maestros de primaria y profesores de secundaria, sólo cinco fueron capaces de describir o inventar una historia adecuada para explicar el significado de la expresión “1¾ entre la mitad” y otros cinco inventaron historias que no se ajustaban a la situación; el error más común fue formular un problema que requería dividir por 2, en lugar de que el divisor fuera ½. Tirosh y Graeber (1989) sugieren que estas dificultades están vinculadas a la identificación con el modelo primitivo intuitivo de reparto descrito por Fischbein et al. (1985). Por su parte, Nillas (2003) demostró que la capacidad de resolución de problemas de división de fracciones de los futuros maestros no implica que tengan una buena comprensión conceptual del tema dado que no son capaces de contextualizar una división en la que el divisor sea, por ejemplo, una fracción.

Los problemas de división-medida con fracciones buscan determinar cuántos grupos de un tamaño (divisor) se pueden formar con una cantidad de objetos (dividendo), independientemente de si divisor y/o dividendo son números naturales o fracciones (por ejemplo, he comprado 4 botes de comida para los peces de mi pecera. Cada día echo en la pecera 2/3 de bote. ¿Para cuántos días tengo?). En esa misma línea, Fernández et al. (2012) propusieron a un grupo de EPM un problema de división-medida con resto (tengo 4 pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño. ¿A cuántos niños puedo dar?, ¿qué me sobra?) y pidieron resolver el problema, interpretar y valorar cuatro respuestas de estudiantes de primaria. Los resultados mostraron que algunos EPM, si bien interpretaron y valoraron las respuestas de los estudiantes de manera correcta, no fueron capaces de resolver el problema correctamente, mientras que otros tuvieron dificultad para interpretar respuestas que utilizaban procedimientos distintos a los que ellos habían empleado.

Actualmente, aunque existen propuestas de formación de maestros centradas en mejorar el conocimiento de los EPM sobre las fracciones y las operaciones con estas (Jansen y Hohensee, 2016; Lo y Luo, 2012; Olanoff et al., 2014; Stevens et al., 2020), y en apoyar su capacidad de interpretar el pensamiento de los estudiantes (Ivars et al., 2020; Tyminski et al., 2021), tenemos poca información sobre lo que los EPM retienen después de un tiempo de participar en las propuestas formativas.

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los EPM, un año después de un experimento de enseñanza, reconocen diferentes etapas de progresión al anticipar estrategias de estudiantes de educación primaria al resolver problemas de división-medida con fracciones.

2. Marco Teórico

El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” se considera un objetivo de los programas de formación, así como una línea de investigación en Didáctica de la Matemática (Stahnke et al., 2016). Desarrollar esta competencia se considera una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas. Adquirir esta competencia permite al docente de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera distinta en comparación con la forma de mirar de quien no es profesor de matemáticas (Llinares, 2013). Por ejemplo, Mason (2002) ha subrayado la importancia de identificar aquello que resulta relevante en una situación de enseñanza-aprendizaje, usar el conocimiento para identificar propiedades y hacer conexiones entre los eventos específicos y los principios más amplios. Por su parte, Jacobs et al. (2010) han particularizado estas ideas en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, conceptualizándola en tres destrezas interrelacionadas: i) identificar las estrategias usadas por los estudiantes en la resolución de tareas; ii) anticipar e interpretar la comprensión de los estudiantes basándose en las estrategias usadas; y iii) tomar decisiones instruccionales según la interpretación inferida.

Algunos estudios han mostrado que la competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes puede empezar a desarrollarse en los programas de formación, aunque no resulte fácil hacerlo por las limitaciones de tiempo que tienen las asignaturas en las que se desarrollan los entornos de enseñanza-aprendizaje para los futuros maestros (Fernández et al., 2012; Stockero, 2014; Teuscher et al., 2017). Por otra parte, para apoyar el desarrollo de esta competencia se debe proporcionar a los EPM referencias para organizar su mirada. Por ejemplo, proporcionarles información sobre progresiones de aprendizaje de los estudiantes para ayudarles a saber qué mirar y cómo hacerlo (Wilson et al., 2015). Las progresiones de aprendizaje son modelos educativos sobre cómo se espera que evolucionen las ideas y formas de pensar de los estudiantes sobre un concepto o tema determinado a medida que avanzan en sus estudios (Duschl et al., 2011).

Las progresiones de aprendizaje se caracterizan por (a) centrarse en unas pocas ideas y prácticas; (b) estar delimitadas por elementos claves (anclajes) que describen lo que se espera que el estudiante sepa y sea capaz de hacer al final de la progresión, así como por las suposiciones que tienen los profesores sobre el conocimiento y las habilidades previas que tienen los estudiantes al iniciar la progresión; (c) describir diferentes etapas de logros que pueden servir como evidencias de la comprensión y competencia de los estudiantes, etapas que son fruto de síntesis de investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes en un dominio específico, así como de estudios empíricos de la progresión y (d) estar mediadas por la instrucción y el plan de estudios específico (Duncan y Hmelo-Silver, 2009).

Las progresiones de aprendizaje tienen un carácter hipotético. La cognición que se presenta en ellas no es necesariamente lineal, ni tampoco aleatoria. Las progresiones de aprendizaje presentan tendencias obtenidas en la investigación de cómo progresa el pensamiento de los estudiantes sobre un concepto matemático específico, a través de etapas por las que ellos pueden transformar sus ideas intuitivas en una comprensión más formal de dicho concepto. Las etapas cada vez más complejas de razonamiento matemático evidencian aspectos de la progresión de la comprensión de un contenido específico. El número de etapas varía entre progresiones y, en algunos casos, los estudiantes pueden progresar por una única o varias etapas durante un curso escolar. Al ser modelos conjeturales de aprendizaje a lo largo del tiempo, necesitan ser validados a partir de investigaciones empíricas sobre el pensamiento y el aprendizaje de los estudiantes en los conceptos específicos.

En particular, aprender a anticipar respuestas de los estudiantes a un problema matemático permite a los EPM pensar en cómo esas respuestas hipotéticas se relacionan entre sí a la luz de una progresión del aprendizaje. El desarrollo de esta destreza en los EPM se vincula con llegar a ser consciente de que el aprendizaje es un continuo, con etapas progresivas de logros en el pensamiento matemático de los estudiantes (Stein et al., 2008).

En nuestra investigación nos planteamos si, un año después de haber recibido formación sobre una progresión en las estrategias de resolución a problemas de división-medida con fracciones, los EPM usan esta progresión para anticipar respuestas de estudiantes. En este contexto nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cómo los estudiantes para maestro, un año después de su formación, usan la progresión en las estrategias de resolución de problemas de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de educación primaria?

3. Método

3.1. *Participantes y contexto*

En esta investigación participaron 41 EPM de Educación Primaria durante el curso académico 2019-2020. Los EPM estaban matriculados en la asignatura Matemáticas y su Didáctica III (del séptimo semestre), un año después de cursar la asignatura Matemáticas y su Didáctica II en donde recibieron formación para desarrollar la competencia “mirar profesionalmente” mediante un experimento de enseñanza diseñado *ad hoc*. El plan de estudios permitió dar seguimiento a este grupo de EPM un año después, abriendo la posibilidad de indagar sobre lo que evidenciaban de lo trabajado durante el experimento de enseñanza.

3.2. *El experimento de enseñanza*

El experimento de enseñanza diseñado en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II constaba de nueve sesiones de dos horas cada una (Figura 1) y tenía como objetivo que los EPM aprendieran a usar información sobre la progresión de las estrategias en la resolución de problemas de división-medida con fracciones para anticipar respuestas de los alumnos.

Sesión 1	*Sesión 2*	*Sesión 3*	*Sesión 4*	*Sesión 5*	*Sesión 6*	*Sesión 7*	*Sesión 8*	*Sesión 9*
Introducir fracciones usando problemas	*Estrategias en problemas de reparto*	*Estrategias en problemas de división medida*	*Progresión desarrollo estrategias de división medida*	*Progresión desarrollo estrategias de división medida*	*Elementos matemáticos en la resolución de problemas*	*Identificación y uso variables didácticas*	*Descripción e interpretación de respuestas de niños y proponer un nuevo problema*	*Descripción e interpretación de respuestas de niños y proponer un nuevo problema*
Resolver problema con EPM y anticipación ingenua de niños de Primaria	Analizar estrategias en respuestas de niños de Primaria	Analizar estrategias en respuestas de niños de Primaria	Analizar estrategias en respuestas de niños de Primaria	Resolver problemas de división medida con diferentes estrategias	Describir y clasificar estrategias de una selección de respuestas de sesión 1 y alumnos de Primaria. Identificar elementos matemáticos	Análisis de variables didácticas en una selección de problemas	Análisis individual de casos de Ana y Sara	Discusión en grupo clase de casos de Ana y Sara

Figura 1. Módulo de enseñanza desarrollado en el curso 2018-2019

3.2.1. *Descripción de las sesiones en el experimento de enseñanza*

A continuación, describimos cada una de las sesiones del experimento de enseñanza (Figura 1). En la primera sesión, los EPM resolvieron problemas de división-medida con respuesta un número natural y el divisor una fracción (por ejemplo, ¾) y anticiparon posibles respuestas que podían generarse para resolver este problema. En esta sesión no se les proporcionó ninguna información sobre las características de los problemas ni sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Durante las sesiones 2 a 8, se les proporcionó información sobre las características de los problemas de división-medida y sobre la progresión en las estrategias usadas por los niños (Empson y Levi, 2011). La información proporcionada tenía por objetivo que los EPM mirasen de forma estructurada las características de los problemas de división con fracciones y las posibles respuestas de los estudiantes. Es decir, aprendieran a identificar las estrategias que los estudiantes usaban en estos problemas, interpretar la etapa de progresión en el uso de estas estrategias y decidir qué hacer para apoyar la progresión del aprendizaje de los estudiantes. En síntesis, se buscaba que los EPM profundizaran en la progresión de aprendizaje de este tipo de problemas como un aprendizaje con significado del algoritmo de la división de fracciones, a través de estrategias cada vez más complejas.

En particular, en las sesiones 2 a 4, los EPM analizaron respuestas reales de niños de primaria a problemas de reparto (sesión 2) y de división-medida (sesiones 3 y 4). En la sesión 5 los EPM resolvieron problemas con distintas estrategias. En las sesiones 6 y 7 interpretaron las respuestas reales de estudiantes de educación primaria a problemas de división-medida. En la sesión 8 se realizó una tarea de evaluación. En la sesión 9 se realizó una síntesis de la información. En las pruebas finales del semestre se incluyó una pregunta en la que se les pidió que anticiparan respuestas de niños para un problema de división con algunas condiciones. En la prueba final, al ser evaluativa, los EPM no disponían del material proporcionado en el experimento de enseñanza.

El conjunto de tareas planteadas en el experimento favoreció que los EPM conectaran con su vocación docente, incentivando en ellos un deseo por aprender y les permitió conectar diferentes dominios de conocimiento (por ejemplo, entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes) con la posibilidad de hacerlo potencialmente más duradero en la memoria (Entwistle, 2000). La autorregulación del aprendizaje puede, a su vez, estimular la adquisición y desarrollo de competencias docentes por parte de los EPM permaneciendo a medio y largo plazo tras el periodo de instrucción. La autorregulación del aprendizaje es entendida como las acciones y los procesos dirigidos a la adquisición de conocimientos o habilidades que implican voluntad, propósito y sentido de utilidad (Zimmerman, 1989). Para favorecer la autorregulación en el aprendizaje por parte de los EPM se incentivó la intencionalidad de comprender las ideas por ellos mismos, relacionar éstas con conocimientos y experiencias previos, usando evidencias, buscando patrones y principios subyacentes, como una manera de llegar a ser conscientes de su progreso en el aprendizaje implicándose activamente en el contenido del programa (Entwistle, 2000).

3.2.1. *La progresión en las estrategias de resolución de los problemas de división-medida con fracciones*

La información proporcionada sobre la progresión en las estrategias usadas por los estudiantes para resolver los problemas de división-medida con fracciones (Empson y Levi, 2011) consta de tres etapas. En las dos primeras (I y II) se utilizan estrategias aditivas y en la tercera (III) estrategias multiplicativas (Figura 2).

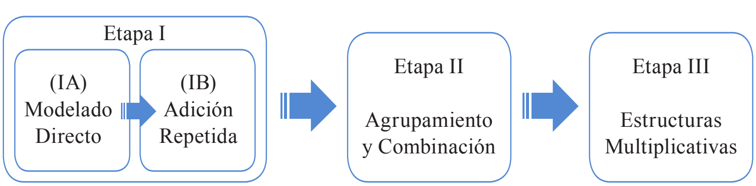


Figura 2. Progresión de estrategias de los estudiantes para resolver problemas de división medida con fracciones (Empson y Levi, 2011)

A continuación, describimos las tres etapas y ejemplificamos las posibles estrategias que se pueden utilizar en la resolución del problema planteado a los EPM un año después de participar en el experimento de enseñanza (Tabla I).

TABLA I
Tarea de anticipación un año después del experimento de enseñanza (curso 2019-2020)

Anticipa las resoluciones que podrían hacer 3 niños que se encontraran en 3 etapas diferentes de la progresión de estrategias según Empson y Levi (2011) al siguiente problema: Estamos preparando brochetas de fruta y hemos decidido colocar 3/8 de naranja en cada brocheta. Si tenemos 12 naranjas, ¿cuántas brochetas de fruta podremos hacer?

Este problema es de división-medida, siendo el dividendo un número natural (12), el divisor una fracción (3/8) y la respuesta un número natural.

– Etapa I – Modelización directa y adición repetida. Los niños representan con objetos o gráficamente todas las cantidades en el problema y cuentan o suman (y en ocasiones restan) hasta llegar a la respuesta final.

  Por ejemplo, en el problema de las brochetas (Tabla I), se dibujan 12 círculos representando las naranjas. A continuación, cada círculo se divide en octavos y se hacen grupos de 3. En este caso se pueden hacer 32 grupos que es la respuesta.

  La estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones se representan de manera simbólica, con números fraccionarios, en lugar de con dibujos.

– Etapa II – Agrupamiento-combinación [pensando aditivamente]. Los niños con esta estrategia agrupan y cuentan conjuntos de unidades fraccionarias con la idea de obtener un número entero. Luego cuentan el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.).

  Por ejemplo, en el problema de las brochetas agrupan 8 unidades fraccionarias (3/8), 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8+ 3/8 + 3/8 + 3/8 + 3/8 para obtener 3 naranjas que sirven para hacer 8 brochetas. Los niños repiten este proceso de agrupamiento cuatro veces más (hasta 12 naranjas), tendremos para hacer 32 brochetas.

– Etapa III – Estrategias multiplicativas [con proporcionalidad: proceso constructivo o directamente con multiplicación]. Los niños relacionan el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la multiplicación.

> Por ejemplo, en el problema de las brochetas, usan directamente la relación "con 3 naranjas hacemos 8 brochetas", por tanto, con cuatro veces más, 3 x 4 = 12 naranjas, tenemos para hacer cuatro veces más de brochetas, 8 x 4 = 32 brochetas.

En esta progresión de las estrategias usadas por los niños para resolver los problemas de división-medida con fracciones subyace la construcción de la idea de fracción como unidad iterativa (Steffe y Olive, 2010). Para ello se iteran las fracciones unitarias (*1/n*) para construir fracciones como una unidad múltiple (por ejemplo, 3/8 como 3 veces 1/8). En el ejemplo de la Tabla I se usa la fracción unitaria 1/8, que se va iterando sucesivamente; cada tres iteraciones se tiene un grupo de 3/8; se terminan las iteraciones cuando se alcanzan 12 unidades.

En la estrategia de agrupamiento-combinación se usa 3/8 como unidad iterativa para construir otra cantidad. Mientras que en las estrategias multiplicativas hay un salto cualitativo, pues se pasa de estrategias aditivas a multiplicativas, usando la idea de proporcionalidad.

3.3. *Instrumento de recogida de datos*

En la asignatura Matemáticas y su Didáctica III durante el curso 2019-2020 (un año después del experimento de enseñanza) se planteó a los EPM una tarea de anticipación de respuestas a un problema de división-medida (Tabla I). En la tarea se pedía a los EPM que anticiparan estrategias de distintas etapas en relación con pensamientos de conteo (Etapa I), aditivos (Etapa I-II) o de proporcionalidad (Etapa III). Implícitamente se les pedía que no usaran el algoritmo de la división u otras estrategias. Para realizar esta tarea los EPM no disponían de material. Esta actividad no formaba parte de la asignatura que estaban desarrollando y tuvo carácter voluntario.

Los EPM que participaron voluntariamente en esta prueba habían realizado una prueba evaluativa el año anterior como cierre del experimento de enseñanza, en la que se les pedía anticipar, en distintas etapas de progresión, respuestas de estudiantes de primaria a la tarea "Hemos comprado 15 piezas de telas para hacer cojines y para cada uno usaremos 3/8 de una pieza. ¿Cuántos cojines se pueden hacer con 15 piezas de tela?". Los resultados de esta prueba indican que el 80,3% (49 de 61) de los EPM anticipó y describió estrategias con características propias de agrupamiento y combinación (aditiva); un 86,9% (53 de 61) anticipó y describió estrategias multiplicativas (Montero y Callejo, 2019).

3.4. *Análisis de los datos*

En primer lugar, el análisis se centró en el tipo de estrategias utilizadas por los EPM y si sus respuestas se correspondían con diferentes etapas progresivas de conteo, adición y proporcionalidad. En segundo lugar, nos centramos en determinar en qué medida los EPM, al anticipar las estrategias que los niños podían usar, manifestaban su comprensión de la idea de progresión en el aprendizaje, más allá del uso de estrategias inconexas entre sí. Es decir, si los EPM evidenciaban o no en sus anticipaciones la transición necesaria para diferenciar la etapa de progresión en que se encontraban los estudiantes. Por ejemplo, un estudiante transita de la etapa I a la etapa II cuando es capaz de percibir una relación entre las variables y la utiliza aditivamente; de la etapa II a la etapa III, cuando esta relación es utilizada proporcionalmente. Ejemplos de estas diferencias en el uso de la idea de progresión en las estrategias de resolución de los problemas de división-medida con fracciones se describen en la próxima sección.

Este análisis permitió caracterizar los EPM en tres grupos considerando cómo comprendían y usaban la idea de progresión en el aprendizaje al anticipar respuestas de estudiantes a problemas de división-medida con fracciones.

4. Resultados

En esta sección describimos las características del uso que han hecho los EPM de la idea de progresión en el aprendizaje al anticipar respuestas de niños al resolver problemas de división-medida con fracciones.

4.1. *EPM que no usan la idea de progresión en el aprendizaje*

Un año después del experimento de enseñanza, 23 EPM no mostraron evidencias de usar el carácter progresivo de las estrategias al anticipar, bien con errores, bien de forma aislada, alguna estrategia de conteo, de agrupamiento-combinación o multiplicativa, junto a otras estrategias como el algoritmo de la división de fracciones. Estos EPM no usaron la información sobre las características de cada una de las etapas de progresión proporcionada en el experimento de enseñanza.

Por ejemplo, cuando se le pide a la EPM-10 anticipar tres posibles respuestas, plantea una primera estrategia de modelización directa que evidencia una interpretación errónea de la fracción 3/8: dibuja un círculo dividido en 8 partes iguales y toma (colorea) tres, a continuación, agrupa cada unidad fraccionaria coloreada (1/8) de ocho en ocho y responde que se pueden formar cuatro brochetas (indicando que sobran algunas porciones sin poder formar una quinta brocheta). Como segunda estrategia dibuja cuatro brochetas con “8 trozos [en] cada brocheta”, de forma que representa tres naranjas como parte de los ocho trozos que forman el total de la brocheta, para un total de cuatro brochetas. Como tercera estrategia usó el algoritmo de la división de fracciones, planteando la división $\frac{12}{1}:\frac{3}{8}$.

En las respuestas de la EPM-10 no hay evidencias de cómo la idea de progresión estaba articulando las diferentes estrategias. Es decir, la EPM-10 proporciona ejemplos de tres estrategias sin indicar en qué medida se pueden articular en una progresión, ni cual es la idea clave cuya comprensión determina la progresión en el aprendizaje (Figura 3).

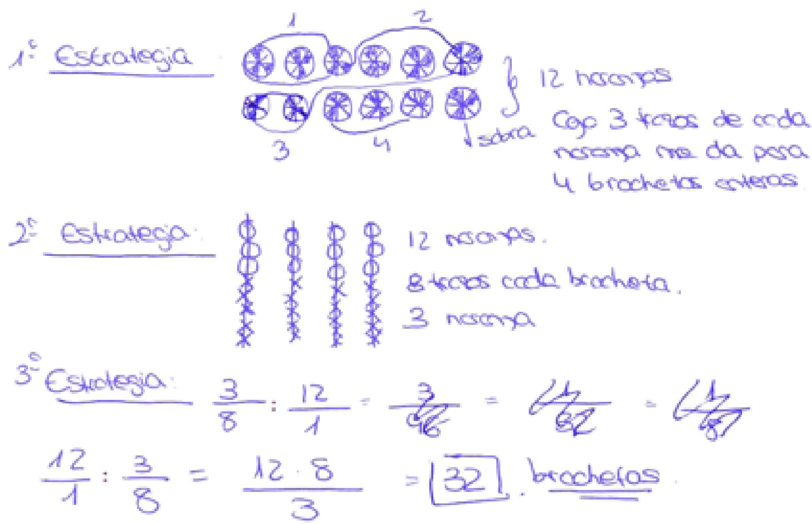


Figura 3. Respuesta de la EPM-10

En cierta medida, los EPM en este grupo respondían anticipando con “formas diferentes de resolver el problema”, pero sin indicar la diferencia entre una estrategia y otra en función de una mayor complejidad en la comprensión del concepto matemático (la construcción y uso de la idea de unidad iterativa y la relación entre cantidades de magnitudes).

Este tipo de respuestas pone de manifiesto que los EPM en este grupo no evidenciaron comprender los aspectos matemáticos que definen un aumento progresivo en la complejidad de cada etapa. La tarea pedía explícitamente describir tres estrategias que mostraran cierta progresión en el aprendizaje de los niños (no solo diferentes maneras de resolver el problema). El hecho de que estos EPM proporcionen estrategias diferentes sin un esquema de progresión muestra la dificultad que tienen para integrar lo trabajado en el programa de formación en relación a la idea de progresión en el aprendizaje.

4.2. *EPM que usan parcialmente la idea de progresión en el aprendizaje*

A esta categoría pertenecen nueve EPM que usaron parcialmente la idea de progresión en el aprendizaje. Los EPM en este grupo anticipaban estrategias de conteo y a partir de ellas anticipaban una estrategia de agrupamiento-combinación o una estrategia multiplicativa.

Por ejemplo, el EPM-35 anticipa para dos niños estrategias de conteo (modelización directa y adición repetida) y para un tercer niño anticipa una estrategia que se inicia como adición repetida y da un salto cognitivo al agrupar y contar conjuntos de 3/8 hasta llegar al dato “con 3 naranjas hago 8 brochetas”, momento en el que suma grupos de naranjas y de brochetas, es decir, abandona la estrategia de adición repetida y desarrolla la de agrupamiento-combinación (Figura 4).

Figura 4. Respuesta del EPM-35

Los EPM en este grupo presentan la idea de progresión en el aprendizaje considerando solo la relación entre dos etapas de progresión, pero no globalmente entre las tres etapas. Por ejemplo, en la respuesta del EPM-35 (Figura 4) las estrategias presentadas están vinculadas a un pensamiento aditivo, y no consideran el paso a la tercera etapa que implica tener en cuenta las relaciones entre relaciones (proporcionalidad).

Por otra parte, el EPM-55 también anticipa dos estrategias de conteo (modelización directa y adición repetida) en las que se apoya para anticipar dos estrategias multiplicativas, relacionando el grupo fraccionario con el total mediante el uso de la multiplicación. Sin embargo, se obvian las estrategias de agrupamiento-combinación que son el nexo entre las estrategias de conteo y las de proporcionalidad (Figura 5).

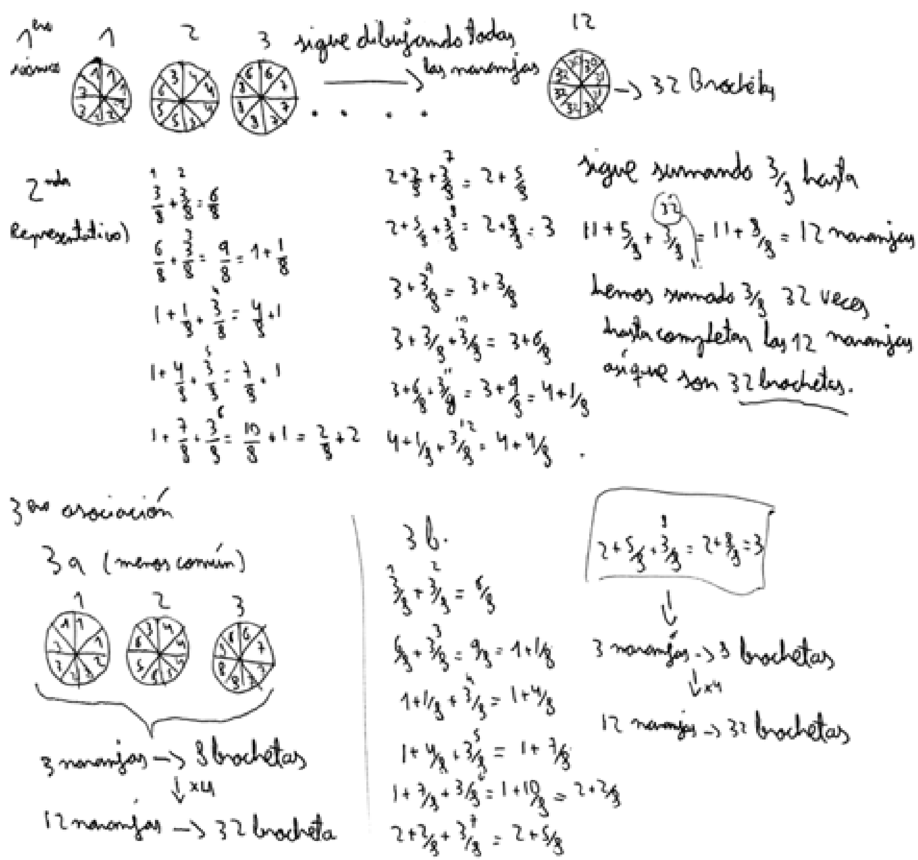


Figura 5. Respuesta del EPM-55

4.3. *EPM que usan la idea de progresión en el aprendizaje*

A esta categoría pertenecen nueve EPM que usaron la idea de progresión en el aprendizaje para anticipar estrategias de conteo y, a partir de ellas, anticipar sucesivamente estrategias de agrupamiento-combinación y estrategias multiplicativas.

Por ejemplo, la EPM-41 anticipa una estrategia de modelización directa y, a partir de ella, después de dividir tres rectángulos en octavos y observar “que de cada tres naranjas tiene un patrón con el que puede hacer ocho brochetas”, presenta otra estrategia abandonando la modelización directa y describiendo una estrategia de agrupamiento-combinación, dibujando y sumando grupos de naranjas y de brochetas. Por último, partiendo de una estrategia de adición repetida, después de sumar y contar la fracción 3/8 reiteradamente, y observar que con 3 naranjas se hacen 8 brochetas, presenta una estrategia de adición repetida y anticipa estrategias multiplicativas por un proceso constructivo y por multiplicación (Figura 6).

Esta manera de proceder muestra cómo los EPM de este grupo articulaban la idea de progresión apoyados en el uso constructivo de la idea de unidad iterativa y de relación entre relaciones que subyace en las diferentes etapas de la progresión.

5. Conclusiones

El objetivo de esta investigación fue caracterizar cómo los EPM, un año después de un experimento de enseñanza, reconocen diferentes etapas de progresión al anticipar estrategias de estudiantes de educación primaria al resolver problemas de división-medida con fracciones. Los resultados muestran que más de la mitad de los EPM (23) no usaron la idea de progresión en el aprendizaje un año después de haber recibido formación para anticipar respuestas. Estos EPM habían realizado correctamente la prueba evaluativa de cierre del experimento de enseñanza del año anterior. El resto de los EPM (18) usaron la idea de progresión en el aprendizaje para anticipar respuestas de manera más o menos articulada. La mitad de este grupo omitió parte de la progresión, dando un salto desde las estrategias de conteo, o bien a estrategias de agrupamiento-combinación, o bien a estrategias de estructura multiplicativa. La otra mitad anticipó respuestas tanto de carácter aditivo como de relación entre relaciones (proporcionalidad) mostrando un uso adecuado de la idea de progresión en el aprendizaje.

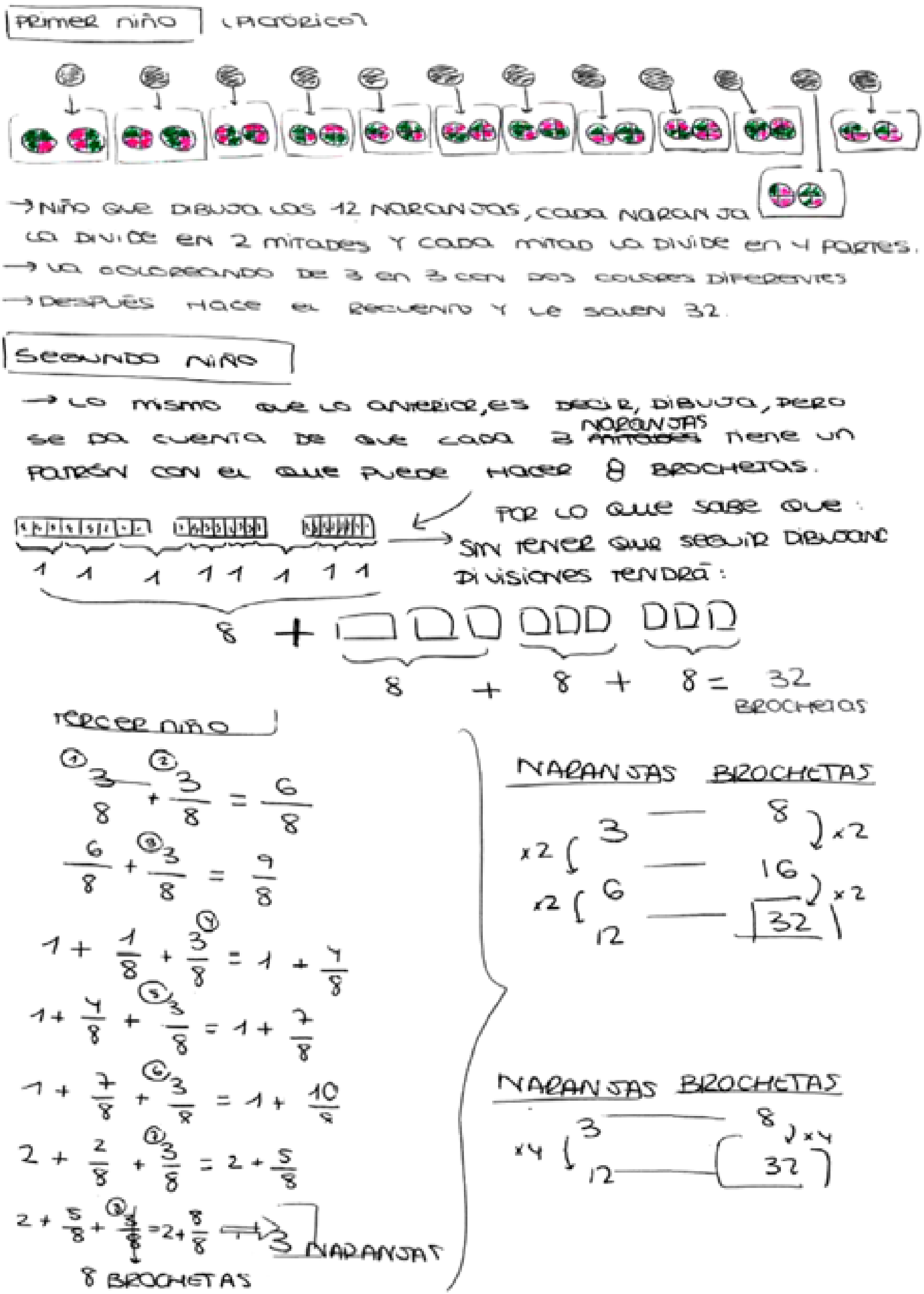


Figura 6. Respuesta de la EPM-41

Así mismo, estos resultados indican que usar la idea de progresión en el aprendizaje, para anticipar respuestas a problemas de división-medida con fracciones, ha supuesto una mayor dificultad a los EPM (18 de 41) que solo anticipar diferentes respuestas a un problema (23 de 41). Esta mayor dificultad podría deberse a que usar la idea de progresión para anticipar respuestas a este tipo de problemas implica: (a) comprender el significado de fracción como unidad iterativa; (b) contar unidades fraccionarias, agruparlas y sumarlas; y (c) llegar a establecer una relación entre relaciones (proporcionalidad). Comprender estos aspectos que subyacen a la idea de progresión resulta clave para que los EPM articulen esta idea en la tarea de anticipar respuestas. No obstante, aunque el aprendizaje de la idea de progresión de estrategias de problemas de división-medida haya presentado dificultades para los EPM, consideramos que es posible empezar a desarrollarla en los programas de formación inicial con diseños específicos de tareas (Edgington, 2014; Edgington et al., 2016; Sánchez-Matamoros et al., 2018).

Interpretamos que la dificultad presentada por los EPM para articular la idea de progresión está en consonancia con los trabajos que muestran que estos tienen un conocimiento procedimental para resolver problemas con fracciones (Depaepe et al., 2015) y para realizar los algoritmos de cálculo; a su vez, dificultad para entender su significado más allá de los algoritmos (Ball, 1990; Li y Kulm, 2008; Vula y Kingji-Kastrati, 2018). Asimismo, las dificultades que presentan los EPM en cuanto al contenido matemático pueden ser producto de los significados de las fracciones que predominan en la enseñanza primaria. Por ejemplo, el significado de fracción como relación parte-todo podría promover el uso de estrategias aditivas; mientras que el significado de fracción como razón podría favorecer el uso de estrategias multiplicativas (Empson, 2011). La dificultad de los EPM con la anticipación de estrategias multiplicativas también puede deberse a que es más fácil visualizar y representar las diferencias entre dos cantidades cuando se comparan aditivamente, en contraste a cuando se trata de la razón entre estas cantidades. Además, si se piensa en la multiplicación como suma repetida será difícil entender la fracción como razón que expresa una relación entre dos magnitudes. Por ejemplo, entender que se puede interpretar el dato “3/8 de naranja en cada brocheta” como razón entre el número de naranjas y brochetas, “con 3 naranjas se pueden hacer 8 brochetas” (Montero y Callejo, 2019).

Consideramos que existen razones por las cuales 18 EPM (44%) usaron el conocimiento adquirido en un experimento de enseñanza, después de un año (Bandura, 1977; Gordon y Debus, 2002; Zimmerman, 1998). Una de estas razones podría ser el efecto positivo en la comprensión y uso de la idea de progresión de estrategias de resolución de problemas debido a que durante el experimento los EPM tuvieron que resolver tareas vinculadas a situaciones reales de enseñanza-aprendizaje, ofreciéndoles la posibilidad de observar cómo responden los niños y las dificultades que estos presentan, vinculando la teoría a la práctica de manera efectiva (Higgs, 2012). A su vez, esto incentiva en los EPM el deseo de aprender conocimientos útiles para su desempeño profesional docente (Entwistle, 2000), el sentido de utilidad profesional y el objetivo de llegar a ser maestros de Educación Primaria. Por tanto, los resultados de esta investigación subrayan la importancia de trabajar con progresiones de aprendizaje en los programas de formación inicial para que desarrollen su mirada profesional vinculada a registros de la práctica.

Por último, cabe señalar que los resultados de esta investigación aportan información de cómo las progresiones de aprendizaje, enmarcadas en un experimento de enseñanza, pueden favorecer que los futuros docentes pasen de una postura de "anticipar respuestas bien o mal" a una postura de "anticipar respuestas basadas en el dinamismo del aprendizaje del estudiante", en línea con otros autores como, por ejemplo, Gotwals (2018).

Reconocimiento

Este estudio forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.21.2.0132

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change. *Psycological Review, 84*(2), 191. https://doi.org/10.1037/0033-295x.84.2.191

Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009

Duncan, R. G. y Hmelo-Silver, C. E. (2009). Learning progressions: Aligning curriculum, instruction, and assessment. *Journal of Research in Science Teaching*, *46*(6), 606-609. https://doi.org/10.1002/tea.20316

Duschl, R., Maeng, S. y Sezen, A. (2011). Learning progressions and teaching sequences: A review and analysis. *Studies in Science Education*, *47*(2), 123182. https://doi.org/10.1080/03057267.2011.604476

Edgington, C. (2014). Teachers' uses of a learning trajectory as a tool for mathematics lesson planning. En J. J. Lo, K. Leatham y L. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 261-284). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_14

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5*(1), 65-80. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.5.1.0065

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-598. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1229

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*. Heinemann.

Entwistle, N. (2000). Promoting deep learning through teaching and assessment. En *1st Annual Conference ESRC Teaching and Learning Research Programme* (pp. 9-20). University of Leicester. http://www.etl.tla.ed.ac.uk/docs/entwistle2000.pdf

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM*, *44*(6), 747-759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias*, *36*(1), 143-162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *16*(1), 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Gordon, C. y Debus, R. (2002). Developing deep learning approaches and personal teaching efficacy within a preservice teacher education context. *British Journal of Educational Psychology*, *72*(4), 483-511. https://doi.org/10.1348/00070990260377488

Gotwals, A. W. (2018). Where are we now? Learning progressions and formative assessment. *Applied Measurement in Education, 31*(2), 157-164. https://doi.org/10.1080/08957347.2017.1408626

Graeber, A., Tirosh, D. y Glover, R. (1986). Preservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems. En G. Lappan y R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 262-267). Michigan State University, East Lansing y MI.

Herbst, P., Chazan, D., Chen, C. L., Chieu, V. M. y Weiss, M. (2011). Using comics-based representations of teaching, and technology, to bring practice to teacher education courses. *ZDM*, *43*(1), 91-103. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0290-5

Higgs, J. (2012). Practice-Based Education Pedagogy. Situated capability-development, relationship practice(s). En J. Higgs, R. Barnett, S. Billett, M. Hutchings y F. Trede (Eds.), *Practice-Based Education. Perspective and Strategies* (pp. 71-80). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-128-3_6

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). A learning Trajectory as a scaffold for pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and mathematics Education, 18*(3), 529-548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. https://www.jstor.org/stable/20720130

Jansen, A. y Hohensee, Ch. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers' conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*, 503-522. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9312-0

Li, Y. y Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM*, *40*(5), 833-843. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0148-2

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, 50*, 117-133. https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a

Lo, J. y Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 481-500. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9221-4

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203471876

Montero, E. y Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). Valladolid: SEIEM. https://doi.org/10.26754/actas.seim21

Nillas, L. (2003). Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies. *The mathematics educator 7*(2), 96-113.

Olanoff, D., Lo, J. y Tobias, J. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(2), 267-310. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1304

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P. y Callejo, M.L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203-228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, *26*(2) 114-145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Smith, M. S. y Stein, M.K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 1-27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Steffe, L. P. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stevens, A., Wilkins, J., Lovin, L., Siegfried, J., Norton, A. y Busi, R. (2020). Promoting sophisticated fraction constructs through instructional changes in a mathematics course for PreK-8 prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 153-181. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9415-5

Stockero, S. L. (2014). Transitions in prospective mathematics teacher noticing. En J. J. Lo, K. Leatham y L. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 239-259). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_13

Teuscher, D., Leatham, K. R. y Peterson, B. E. (2017). From a framework to a lens: Learning to notice student mathematical thinking. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (Eds), *Teacher noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (pp. 31-48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_3

Tirosh, D. y Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/bf00356042

Tyminski, A. M., Simpson, A. J., Land, T. J., Drake, C. y Dede, E. (2021). Prospective elementary mathematics teachers 'noticing of childrens' mathematics: a focus on extending moves. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 533–561. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09472-2

Vula, E. y Kingji-Kastrati, J. (2018). Pre-service teacher procedural and conceptual knowledge of fractions. En G. J. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers* (pp. 111-123). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68342-3

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*, 149-175. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9256-1

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244. https://doi.org/10.1177/0022487115574104

Zimmerman, B. J. (1989). A social cognitive view of self-regulated academic learning. *Journal of Educational Psychology*, *81*(3), 329. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-0663.81.3.329

Zimmerman, B. J. (1998). Developing self-fulfilling cycles of academic regulation: An analysis of exemplary instructional models. En D. Schunk y B. Zimmerman (Eds.), *Self regulated learning: From teaching to self-reflective practice* (pp. 1–19). Guilford Publications.

Autores

Eloísa Montero. Escuni Centro Universitario de Educación, España. emontero@escuni.es

https://orcid.org/0000-0002-1847-9254

María Luz Callejo.[†] Universidad de Alicante, España.

https://orcid.org/0000-0002-2617-9657

Julia Valls. Universidad de Alicante, España. julia.valls@ua.es

https://orcid.org/0000-0002-5988-5443

Darinka Radovic S., María Pampaka

RELACIÓN ENTRE PERCEPCIONES DE LA ENSEÑANZA, SEXO Y ACTITUDES HACÍA LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES

Relationship between students' perceptions of mathematical teaching, sex and mathematical attitudes

RESUMEN

Este artículo explora la relación entre las percepciones de estudiantes sobre el tipo de enseñanza que experimentan en matemáticas [más o menos centrada en el estudiantado] y sus emociones, autoconcepto y disposición hacia las matemáticas. También considera la pregunta de si existen diferencias en esta relación con respecto al sexo del estudiantado. Utiliza datos de casi 300 estudiantes de Chile de 7 año, agrupados en 8 aulas de clases. El análisis correlacional sugiere la existencia de una asociación positiva y significativa entre cuán centrada en los estudiantes es percibida la enseñanza y actitudes más positivas del estudiantado hacia las matemáticas. Sin embargo, este efecto es independiente del sexo, sugiriendo que la enseñanza centrada en estudiantes no necesariamente ofrecen una ventaja para las niñas, sino que son positivas tanto para alumnas como para alumnos.

PALABRAS CLAVE:

- *Estilo de enseñanza*
- *Actitudes hacia las matemáticas*
- *Sexo*
- *Enseñanza centrada en estudiantes*

ABSTRACT

This paper explores the relationship between students' perceptions of the type of teaching they experience in mathematics [more or less student centred] and their reported emotions, self-concept and disposition. It also addresses the question of whether there are differences in this relationship for girls and boys. It uses survey data from almost 300 year 7 Chilean students, clustered in 8 different classrooms. A correlational analysis suggests that there is a positive significant association between how student centred the teaching is perceived to be and students' more positive attitudes. Nevertheless, this effect was independent of sex, suggesting that more student-centred teching do not necessarily offer an advantage for girls, but are positive for both, boys and girls.

KEY WORDS:

- *Teaching style*
- *Attitudes*
- *Sex*
- *Student-centred teaching*

Radovic S. y Pampaka, M. (2022). Relación entre percepciones de la enseñanza, sexo y actitudes hacía las matemáticas de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 311 - 340. https://doi.org/10.12802/relime.22.2533. Recepción: Noviembre 25, 2020 / Aceptación: Marzo 29, 2023

RESUMO

Este artigo explora a relação entre as percepções dos alunos do tipo de ensino que vivenciam na matemática [mais ou menos centrado no aluno] e suas emoções, autoconceito e disposições. Ele também considera a questão de saber se existem diferenças nesta relação entre meninas e meninos. Ele usa dados de quase 300 alunos chilenos de 7 anos, agrupados em 8 salas de aula. A análise correlacional sugere a existência de uma associação positiva e significativa entre a forma como o ensino centrado no aluno é percebido e as atitudes mais positivas dos alunos. No entanto, esse efeito é independente do sexo, sugerindo que as pedagogias centradas no aluno não oferecem necessariamente uma vantagem para as meninas, mas são positivas para os alunos do sexo masculino e feminino.

PALAVRAS CHAVE:

- *Estilo de ensino*
- *Atitudes*
- *Sexo*
- *Ensino centrado no aluno*

RÉSUMÉ

Cet article explore la relation entre les perceptions des élèves sur le type d'enseignement qu'ils reçoivent en mathématiques [plus ou moins centré sur l'élève] et leurs émotions, leur concept de soi et leurs dispositions. Il étudie également la question de savoir s'il existe des différences au sein de cette relation entre filles et garçons. Ce travail fait appel aux données de près de 300 élèves chiliens de 7 ans, répartis en en 8 classes. L'analyse corrélationnelle suggère l'existence d'une association positive et significative entre la façon dont l'enseignement centré sur l'étudiant est perçue et le attitude plus positif des étudiants. Cependant, cet effet est indépendant du sexe, suggérant que les pédagogies centrées sur l'étudiant n'offrent pas nécessairement un avantage pour les filles, mais sont positives pour l'ensemble des élèves.

MOTS CLÉS:

- *Style d'enseignement*
- *Attitudes*
- *Sexe*
- *Enseignement centré sur l'étudiant*

1. Introducción

Por más de cuarenta años la relación de las mujeres con las matemáticas ha sido foco de importante investigación en el área de educación matemática. Esto ha incluido tanto la persistencia de diferencias por sexo en rendimiento y habilidades en algunos países del mundo (OECD, 2016) y en Chile (Radovic, 2018), como una más baja participación en carreras de alta demanda matemática después de la educación obligatoria en distintos países del mundo (Riegle-Crumb et al., 2012; UNESCO, 2017), Latinoamérica (López-Bassols et al., 2018) y en Chile (Conicyt, 2017). Estos problemas no sólo se traducen en limitaciones para mujeres y hombres respecto de la división del trabajo, sino también en una disminución del potencial de los desarrollos que se producen en las áreas de ciencias, matemáticas y tecnología. Para hacer las explicaciones científicas más robustas y completas en estas áreas es necesario fomentar la diversidad, aumentando la creatividad y habilidades de los equipos para resolver problemas (Sax et al., 2016). Potenciar la participación de mujeres es una manera de aumentar esta diversidad (Franklin, 2013).

Diversas investigaciones en educación matemática han vinculado el desarrollo de aspiraciones científicas y matemáticas con actitudes, motivaciones e intereses de las y los estudiantes hacia estas áreas de conocimiento en la escuela (Cheryan y Plaut, 2010; Gjicali y Lipnevich, 2021; Lent et al., 2005; Lent et al., 2018). Por ejemplo, Ceci y colegas (2009) en una extensa revisión de la literatura argumentan que la baja representación de mujeres en carreras científicas y matemáticas se debe principalmente a temas motivacionales relacionados principalmente con factores socioculturales (y no biológicos). En esa misma dirección, estudios realizados en Chile han mostrado que las mujeres tienden a tener actitudes, motivaciones e intereses menos positivos y una menor elección de carreras de STEM (Bordón et al., 2020; Fernández et al., 2020). Sin embargo, uno de los factores socioculturales que continúa siendo fuertemente ignorado en el análisis respecto del desarrollo de motivaciones es el diseño instruccional o la forma en la que se enseña y aprende en el aula (Aeschlimann et al., 2016). Estos aspectos son principalmente relevantes si existe interés en promover intervenciones y reformas que permitan disminuir sesgos y avanzar en la diversidad en estas áreas.

Respecto de diseños instruccionales, algunos autores han explorado diversas prácticas de enseñanza aprendizaje en el aula que podrían vincularse con actitudes hacia las matemáticas más positivas de las y los estudiantes en general y de las mujeres en particular. Por ejemplo, se ha mostrado que las mujeres tienden a desarrollar actitudes más positivas y una disposición a seguir en carreras del área cuando la enseñanza conecta con la experiencia de las y los estudiantes y con aplicaciones prácticas a sus contextos (Aeschlimann et al., 2016; Cerinsek et al., 2013), cuando se realiza trabajo colaborativo y no competitivo (Boaler, 2002; Geist, 2008; Wang, 2012) y cuando se utilizan estrategias de aprendizaje basado en proyectos (Han, 2017).

Siguiendo lo anterior el presente estudio explora la integración de estas prácticas de enseñanza en el constructo de enseñanza centrada en el estudiante (ver Swan, 2006a; Pampaka, Williams et al., 2011) y explora la relación de este tipo de enseñanza y distintas formas de identificación de estudiantes hacia las matemáticas. En particular explorará si esta relación difiere entre mujeres y hombres, discutiendo un potencial efecto diferencial por sexo de la enseñanza centradas en estudiantes.

2. Antecedentes

2.1. *Actitudes hacia las Matemáticas: emociones, autoconcepto y disposición*

En los últimos 15 años ha existido un aumento en la preocupación por el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas, actitudes que explican en gran medida diferencias en el rendimiento, la persistencia en cursos y carreras de alta demanda matemática y las diferencias entre mujeres y hombres (Eccles y Wang, 2016; Lent et al., 2005; Sax et al, 2016). En Chile también se han vinculado las brechas en el rendimiento y la elección de carreras con actitudes menos positivas de las mujeres hacia las matemáticas, incluyendo más bajo interés, poca disposición, inferior autoconcepto en relación con las matemáticas y menor eficacia personal en matemáticas (Blázquez et al., 2009; Espinoza y Taut, 2020; UNESCO, 2017). Estas actitudes menos positivas se han vinculado con estereotipos que manifiestan niñas y niños desde etapas tempranas de escolarización sobre su rendimiento académico en matemáticas (Del Río y Strasser, 2013), con la influencia de madres y padres (Del Río et al., 2017), y de profesoras y profesores de matemáticas (Mizala et al., 2015). En este contexto se ha encontrado que, en las aulas de clases mixtas las mujeres tienden a recibir menor atención y menos preguntas de sus profesores, tanto en general (Bassi et al., 2016) como en matemáticas (Espinoza y Taut, 2016); participan en menor grado de interacciones matemáticas positivas, e incluso iniciar menos interacciones ellas mismas con sus profesores (Ortega et al., 2020). En un estudio cualitativo se reportó que las mujeres, incluso cuando muestran alta participación, tienden a tomar roles que no las compromete fuertemente con una matemática significativa para su futuro (Radovic et al., 2017). Considerando estos antecedentes ha quedado en evidencia que en términos actitudinales las mujeres han estado en desventaja respecto de sus compañeros varones, tanto en estudios internacionales como chilenos.

Considerando lo anterior, este estudio se centra en tres constructos que representan actitudes hacia las matemáticas actuales y actitudes hacía las matemáticas en el futuro. Primero, numerosos autores han considerado que la relación subjetiva con una disciplina involucra una relación emocional (e.g. Bartholomew et al., 2011; Hannula, 2012; Heyd-Metzuyanim y Sfard, 2012; Op't Eynde et al., 2006). Muchos estudios han reportado una asociación entre cómo las y los estudiantes se sienten mientras hacen matemáticas y su rendimiento y persistencia en el área (Daniels et.al., 2009; Goetz et al., 2008; Roth y Radford, 2011; Wigfield et.al., 2002). Aún cuando las emociones no son fijas, sino que cambian (Evans, 2000), sentir consistentemente afectos positivos y negativos puede resultar en el desarrollo de identidades particulares hacia las matemáticas ("ser alguien que ama o que odia las matemáticas").

Un segundo constructo que se considera en este estudio es el autoconcepto hacia las matemáticas, que se refiere a la asociación de las matemáticas con una/o misma/o o el verse a una/o misma/o como "buena/o" o "malo/a" en matemáticas (Cvencek et al., 2011; Darragh, 2015; Mendick, 2005). Estás creencias o juicios sobre una/o misma/o en comparación con otras personas y consigo mismo (Parker et al., 2014) tienen una fuerte relación tanto con rendimiento como con aspectos motivacionales, tanto en estudios internacionales (Marsh, 1990; Marsh, 2007; Marsh et.al., 2008; Valentine et al., 2004) como en Chile (Espinoza y Taut, 2020)

Por último, respecto de las actitudes hacía las matemáticas en el futuro, este estudio explora cómo las y los estudiantes esperan que su relación con las matemáticas continúe en el futuro. Esta "*disposición hacia matemáticas*" han sido recientemente explorada, mostrando que esta tiende a disminuir durante la enseñanza secundaria (Pampaka, Williams et al., 2011; Pampaka et al., 2013) y que está fuertemente relacionada con la elección de carreras en áreas STEM (del inglés Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) (Buschor et al., 2014).

Las emociones, el autoconcepto y la disposición hacia las matemáticas son de especial relevancia en el estudio de las relaciones de estudiantes mujeres con la disciplina. Numerosa investigación ha reportado que en general las mujeres se sienten menos positivas, tienen menor disposición en el futuro y más bajo autoconcepto hacia las matemáticas. Respecto de los afectos, las mujeres tienden a reportar menor disfrute y orgullo, mayor ansiedad y vergüenza cuando hacen matemáticas que los estudiantes varones, tanto en estudios internacionales (Frenzel et al., 2007) como con muestras de estudiantes chilenos (Carrasco y Valenzuela, 2021). Además, el mostrar consistentemente menor autoconcepto y autoeficacia (Eccles et al., 1993; Fredricks y Eccles, 2002) y encontrar menor valor al trabajo en matemáticas (e.g. Jacobs et al., 2002; Nagy et al., 2006; Watt, 2004) se traduce en menores aspiraciones en el área (Buschor, et al., 2014; Nagy et al., 2006).

Muchos de estos trabajos han mostrado que estos constructos no están necesariamente relacionados con el rendimiento de las niñas, lo que sugiere que la experiencia subjetiva de ellas no está relacionada necesariamente con un déficit en habilidades matemáticas.

Pese a la existencia de un gran número de estudios que exploran la relación entre actitudes, rendimiento, persistencia, participación, diferenciadas por sexo, existe poca investigación enfocada en explorar cómo aspectos contextuales pueden influir en estas relaciones. Este estudio explora la percepción sobre la enseñanza de la matemática en el aula como un aspecto que podría influir fuertemente en la relación de las mujeres con esta disciplina.

2.2. *Prácticas instruccionales y el desarrollo de formas de identificación positiva: ¿Una enseñanza de las matemáticas para mujeres?*

Desde comienzo de los años 80s ha existido una creciente incorporación de ideas feministas en educación y en educación matemática (Becker, 1995). Por ejemplo, Belenky y colegas publicaron en 1986 un libro en el que exploraban el desarrollo epistemológico de estudiantes y como resultado proponían que las mujeres tenían una "forma de conocer" diferente a la de los hombres. En este libro sugirieron que las mujeres tienden a desarrollar más conocimiento cuando se conectan con otros, requiriendo de una "*enseñanza conectada*". En su descripción de este tipo de enseñanza sugirieron que: 1) el conocimiento debe ser tratado como un proceso y no como un producto terminado; 2) las y los estudiantes deben ser activa/os en la construcción de sus propias ideas, evitando convertirse en recipientes en donde se deposita conocimiento; y 3) el proceso de construir conocimiento debe realizase principalmente a través del habla, en diálogo público, donde estudiantes y profesores deben colaborar en la construcción de nuevas interpretaciones. Algunos/as educadores/as de matemáticas siguieron a Belenky y colegas (1986) en la propuesta de una perspectiva feminista en la enseñanza de las matemáticas, perspectiva que según estos autores entra en conflicto con la enseñanza tradicional de las matemáticas (e.g. Becker, 1995; Buerk, 1985).

Desde un ángulo distinto, Boaler (Boaler, 2002; Boaler y Greeno, 2000) llegó a una conclusión similar comparando el enfoque de enseñanza tradicional versus el reformista (Boaler, 2002), o clases didácticas versus clases colaborativas / basadas en la discusión (Boaler y Greeno, 2000). En estos estudios la autora y colegas describieron cómo los estudiantes varones en clases tradicionales centradas en el profesorado tendían a reposicionar sus metas mediante la competencia y el éxito relativo. Por su parte, las estudiantes mujeres no se sentían atraídas por este reposicionamiento, disminuyendo su interés y motivación (Boaler, 2002; Boaler y Greeno, 2000). Así, la autora argumentó que estas maneras distintas de aprender y su relación respecto de la identificación con prácticas pedagógicas específicas son aspectos cruciales para el éxito académico y el desarrollo de una disposición positiva en matemáticas, siendo las clases centradas en el estudiantado más motivantes para las niñas (Boaler, 2002; Boaler y Greeno, 2000) y más justas con diferentes grupos étnicos y culturales (Boaler y Staples, 2008).

Siguiendo el ejemplo de Boaler, es posible entonces, relacionar lo que se ha llamado una enseñanza de las matemáticas conectada, con los conceptos más generales de enseñanza centrada en estudiantes y enseñanza conectivista, con el fin de efectuar comparaciones con formas de enseñanza tradicionales. La enseñanza tradicional ha sido descrita como mayormente basada en la trasmisión (centrada en el profesorado), en la memorización y está pensada para enfatizar el aprendizaje abstracto y fuera de contexto (ver, por ejemplo, Askew et al., 1997; Boaler, 2002; Pampaka y Williams, 2016; Schuh, 2004). En contraste, la enseñanza centrada en estudiantes da mayor relevancia a la construcción activa de conocimiento desde la perspectiva de las/los estudiantes y al rol del profesorado como facilitador del aprendizaje (Kember y Gow, 1994). Este estilo pedagógico se ha vinculado con enfoques de resolución de problemas, donde se espera que los estudiantes aprendan a través de la colaboración y discusión entre ellas y ellos, y con el profesor/a (Swan, 2006a). Las relaciones dentro y fuera de la misma área, entre distintos métodos y entre estudiantes y profesores/as a través de la discusión de los conceptos matemáticos, son también aspectos considerados centrales (Askew et.al., 1997). A partir de este marco algunos investigadores han levantado mediciones de estos tipos de enseñanza, tanto desde la perspectiva de profesores/as como de estudiantes (por ejemplo, Swan, 2006b; Pampaka, Williams et al., 2011; Pampaka et al., 2013).

2.3. *Relación entre prácticas de enseñanza y resultados educacionales*

La mayor parte de la literatura que ha intentado conectar diferentes forma de enseñanza con resultados educacionales se ha enfocado en mediciones de rendimiento y desempeño (por ejemplo, Desimone y Long, 2010; Freeman et al., 2014; Hamilton et al., 2003; Le et al., 2009; Palardy y Rumberger, 2008). Los pocos estudios que se han enfocado en variables subjetivas han reportado de forma consistente una relación positiva entre los tipos de enseñanza más centrados en estudiantes con una mejor disposición y afectos más positivos hacia las matemáticas (por ejemplo, Cooper, 2013). Por ejemplo, Pampaka, Williams y colegas (2011) no encontraron relación entre el tipo de enseñanza y las calificaciones o deserción escolar, pero sí una relación significativa entre la educación trasmitivista (como opuesta a una enseñanza más conectivista y centrada en estudiantes) y una disminución en la disposición para continuar estudiando matemáticas en el futuro (ver también Pampaka y Williams, 2016). De forma similar, otros estudios han reportado que este tipo de enseñanza se relaciona con la percepción que tienen estudiantes acerca de la utilidad de las matemáticas, la autoeficacia (Gilbert et al., 2014), interés y agrado que manifiestan por los estudios en general (Ireson y Hallam, 2005; Noyes, 2012), así como con su bienestar y motivación (Timmermans et al., 2007). En Chile por su parte existen antecedentes de que estudiantes mujeres perciben menor apoyo instruccional de sus docentes y reportan menor participación en el aula de clases (Bassi et al., 2016; Espinoza y Taut, 2020; Ortega et al., 2020). Sin embargo, en este contexto no encontramos estudios sobre la relación de estas variables instruccionales con variables actitudinales.

A pesar de esta evidencia, el efecto diferencial de los distintos tipos de enseñanza en niñas y niños no ha sido hasta el momento apropiadamente evaluada. El sustento para una enseñanza con efectos más positivos en las mujeres proviene de estudios cualitativos (por ejemplo, Boaler, 2002) o pequeños estudios de intervención que incluyen la comparación de las distintas clases / intervenciones (por ejemplo, instrucción guiada versus instrucción directa, en Timmermans et al., 2007). En ese sentido, este estudio pretende aportar a la investigación mediante la exploración de la relación entre la percepción que tienen las y los estudiantes sobre las prácticas de enseñanza con sus emociones positivas y negativas, su autoconcepto y su disposición hacia las matemáticas, considerando cómo esta relación puede variar según el sexo.

Siguiendo lo anterior y con base en los antecedentes de la literatura, esperamos encontrar: (1) Actitudes más negativas hacia las matemáticas en las niñas que en los niños; (2) un efecto positivo general de mayores niveles de experiencia de enseñanza centrada en estudiantes sobre estas actitudes, y (3) una interacción entre la enseñanza centrada en estudiantes y su sexo. Siguiendo los antecedentes ya mencionados, esperamos que el efecto positivo de experienciar más enseñanza centrada en estudiantes será mayor para las niñas que para los niños.

3. Metodología

3.1. *Procedimiento, datos y muestreo*

Los resultados de este estudio corresponden a la aplicación de una encuesta a estudiantes (edades de 13 a 14 años) de 8 cursos correspondientes a septimo grado de educación primaria (llamada básica en Chile) de diferentes colegios en Santiago de Chile. Estos colegios fueron seleccionados de modo que representaran establecimientos de enseñanza mixta, de estrato socioeconómico medio y de rendimiento promedio en la evaluación nacional realizada por el Ministerio de Educación (SIMCE). Todos los colegios son particulares subvencionados, administrados por una misma fundación católica sin fines de lucro, con un esquema administrativo que ha resultado ser uno de los más eficientes para familias de bajos ingresos en Chile (McEwan, 2001). El profesorado de matemáticas en estos colegios sigue el mismo currículum propuesto por el Ministerio de Educación y se incentiva la implementación de un método de enseñanza que enfatiza el aprendizaje como un proceso donde la participación social es central.

El proceso de recolección de información se realizó en visitas a cada una de las aulas de clases, contando con el consentimiento informado de los tutores y tutoras de las y los estudiantes entregados con 2 semanas de anticipación. A las y los estudiantes se les informó del propósito del estudio y se les dio la posibilidad de no participar. La aplicación de la encuesta duró aproximadamente 40 minutos. Resultado de ello, 291 estudiantes (154 mujeres y 137 hombres) entregaron encuestas completadas.

3.2. *Instrumentos*

Cada encuesta incluyó información general acerca del o la estudiante y 3 diferentes instrumentos de medición. Los instrumentos solicitaban información sobre actitudes hacia las matemáticas (afectos positivos y negativos hacia la clase, autoconcepto y disposición hacia las matemáticas en el futuro). Adicionalmente se incluyeron en el estudio como preguntas separadas referentes a la percepción de los y las estudiantes sobre las actividades de matemáticas en el aula de clases, sobre su rendimiento en comparación con sus compañeros de clase y sobre sus preferencias en cuanto a asignaturas escolares.

En cuanto a la experiencia emocional de los estudiantes durante el ejercicio de las matemáticas se investigaron 2 componentes generales dominantes de la experiencia emocional, etiquetados típicamente como afectos positivos y afectos negativos. Para medir estos factores, Watson et al. (1988) desarrollaron la escala de afectos positivos y negativos (PANAS), que consiste en 2 escalas de 10 ítemes cada una (ver tabla I). A los participantes se les pide que califiquen cuando experimentan distintas emociones expresadas en 10 palabras (por ejemplo: interesado, orgulloso, irritable, hostil, etc.) indicando el grado en el que sienten cada una de ellas durante el quehacer matemático según una escala de 5 puntos (desde muy leve a muchísimo). El instrumento ha sido validado en este formato, mostrando a través de análisis factorial confirmatorio que el modelo más adecuado (robust comparative fit index = .94) consiste en dos factores correlacionados (ver Crawford y Henry, 2004) que aparecen de forma consistente en distintas culturas, formatos de respuesta y lenguas, incluyendo el español (Dufey y Fernandez, 2012; Moriondo et al., 2012; Robles y Paez, 2003).

TABLA I
Ítemes PANAS Afectos positivos y negativos

PANAS Afectos Positivos	*PANAS Afectos Negativos*
Interesado	Molesto
Entusiasmado	Enojado
Fuerte	Culpable
Optimista	Asustado
Orgulloso	Hostil
Alerta	Irritable
Inspirado	Avergonzado
Decidido	Nervioso
Atento	Intranquilo
Activo	Temeroso

El autoconcepto en relación con las matemáticas y la disposición de los y las estudiantes hacia las matemáticas se midieron usando ítemes del estudio de Pampaka y Wo (2014) para crear dos medidas. Estos ítemes se basan en investigaciones previas sobre actitudes hacia las matemáticas (por ejemplo, Fennema y Sherman, 1977) y dos estudios desarrollados por Pampaka y colegas para medir la disposición para estudiar matemáticas (Pampaka et al., 2013) y autoeficacia (Pampaka, Kleanthous et al., 2011). En particular, la escala de autoconcepto incluye 4 ítemes para medir la evaluación que hacen los estudiantes de su propia habilidad para el quehacer matemático (por ejemplo, yo puedo obtener un buen resultado en matemáticas). Por su parte, la escala de disposición hacia las matemáticas considera 6 ítemes sobre cómo consideran su relación con las matemáticas en el futuro (por ejemplo: las matemáticas son importantes para mi futuro). En ambas subescalas se señala el nivel de acuerdo mediante una escala de 5 puntos (desde en absoluto desacuerdo hasta completamente de acuerdo) (ver tabla II).

Para evaluar la percepción de los estudiante sobre la práctica pedagógica se usó una escala que mide el grado en el cual la enseñanza es percibida como centrada en el/la estudiante, la cual está basada en la escala de Pampaka y colegas (Pampaka, Williams et. al., 2011; Pampaka y Williams, 2016). Esta encuesta se construyó con base en encuentas previas confeccionadas para medir constructos similares (por ejemplo, Swan, 2006b) e incluye 10 ítemes que describen diferentes formas de ejecutar actividades centradas en las y los estudiantes (por ejemplo: trabajamos juntos en proyectos grupales; discutimos ideas con todo el grupo). Se solicitó responder la frecuencia con que cada actividad se llevaba a cabo en su aula de clases, mediante una escala de 4 puntos (desde nunca a siempre o casi siempre) (ver tabla III)

TABLA II
Ítemes sobre autoconcepto y disposición hacia las Matemáticas

Autoconcepto Matemático
Puedo obtener buenos resultados en matemáticas.
Puedo aprender matemáticas incluso si es difícil.
Tengo una mente matemática.
Comparado con mis compañeros, soy bueno en matemáticas.
Disposiciones Matemáticas
Matemáticas es una de las más interesantes asignaturas del colegio.
Las matemáticas son importantes para mi futuro.
Preferiría que mis estudios futuros incluyeran muchas matemáticas.
Quiero seguir estudiando matemáticas después del colegio.
Me gustaría ser matemático.
Las matemáticas son importantes para mi futuro (después del colegio).

Diferentes estudios han avalado la percepción que tienen los y las estudiantes acerca de la enseñanza como una medición válida de prácticas pedagógicas. Éstos han encontrado una moderada correlación entre estudiantes y observadores externos en la percepción del ambiente del aula de clases (Ellis et al., 2007), reportes similares entre profesores y estudiantes (Desimone et al., 2009) y mayor capacidad predictiva de reporte de los y las estudiantes que de los profesores y las profesoras sobre prácticas pedagógicas (Kahle et al., 2000; McCombs y Quiat, 2002). De acuerdo con esto, la percepción de las y los estudiantes se consideró no solo una medición de la enseñanza en el aula de clases, sino también una medición más específica de la experiencia de cada estudiante con relación a la enseñanza. Esto es importante, dado que varios estudios cualitativos han documentado cómo los estudiantes en la misma aula de clases pueden experimentar formas muy distintas de enseñanza (ver, por ejemplo, Black, 2004).

TABLA III
Ítemes prácticas pedagógicas

Escala Práctica Pedagógica
Trabajamos en proyects grupales.
Hablamos entre compañeros sobre cómo resolver problemas.
Le preguntamos a otros alumnos que expliquen sus ideas.
Hacemos proyectos o trabajos que incluyen otras asignaturas.
Aprendemos cómo las matemáticas han cambiado en el tiempo.
Aprendemos que matemáticas significa inventar reglas.
Investigamos contenidos por nosotros mismos.
Discutimos ideas entre todo el curso.
Explicamos nuestro trabajo a todo el curso.
Respondemos preguntas del profesor.

Finalmente, consideramos el rendimiento y la preferencia de asignaturas como variables intervinientes. Para medir el rendimiento se usó el puntaje de una prueba de evaluación de fin de año utilizada en los colegios. Esta prueba es diseñada por la administración de los colegios para medir conocimiento sobre el currículum nacional de forma estandarizada para todos los colegios incluidos en este estudio. La preferencia se midió usando una pregunta de respuesta abierta acerca de las asignaturas escolares favoritas y menos favoritas. Se construyeron 3 categorías de acuerdo con estas preferencias: la asignatura de matemáticas mencionada como favorita, como menos favorita y no mencionada (neutral).

3.3. *Enfoque analítico*

El enfoque analítico incluyó una etapa de medición y una de modelamiento. Primero, analizamos las propiedades psicométricas, testeando unidimensionalidad de las escalas. Para esto usamos el modelo de Rasch, una metodología que permite construir mediciones de intervalo desde información ordinal, testeando al mismo tiempo la unidimensionalidad. Este análisis modela la dificultad del ítem con relación a la habilidad de una persona (es decir, habilidad para responder con niveles mayores de experiencia emocional, por ejemplo) y evalúa la validez de la escala proveyendo un estimador de adecuación de cada ítem y persona al constructo general. También provee evidencia para la confiabilidad de la escala al dar información de si existen suficientes ítemes a lo largo del continuo y suficiente dispersión de habilidades entre las personas (ver Bond y Fox, 2001).

Todos los análisis se ejecutaron usando Winsteps 3.72.3. Para evaluar la unidimensionalidad se observaron 4 indicadores.

- Indicadores de infit y outfit: Evalúan el ajuste de ítemes al modelo. Algunos autores sugieren que cifras cercanas a 1 son evidencia de uni-dimensionalidad, otros sugirien que los valores tienen que ser cercanos a 1.1 en muestras sobre los 500 (Smith et al., 1995); y otros sugieren intervalos más flexibles para un ajuste adecuado, entre 0.5 y 1.5 (Linacre, 2002).
- Análisis de componentes principales de residuos: después de construir la escala se descarta la existencia de más dimensiones realizando análisis de residuos y considerando que Autovalores del segundo contraste mayores a dos muestran evidencia de posibles dimensiones adicionales (Raîche, 2005).
- Funcionamiento diferencial del ítem (DIF): Se evalúa la amenaza de sesgo para distintos grupos como otro indicador de validez (sexo).

Winsteps produce la magnitud de la diferencia (DIF) en logits, indicando su significancia estadística. Para evaluar el potencial sesgo se consideraron como directrices las de Zieky (1993) y Zwick (2012) (|DIF| < 0.43 ínfimo; 0.43 |DIF| < 0.64 leve a moderado; 0.64 < |DIF causa de preocupación).

- Confiabilidad de ítems y de personas en las escalas: Se consideró como adecuado un índice de separación de ítems mayor a 2 y una confiabilidad de personas mayor a 0.8.

Para el análisis descriptivo de las escalas utilizamos comparación de medias para mujeres y hombres (pruebas t), verificándose el cumplimiento de supuestos y considerando valores p menores a 0.05 como signos de significancia estadística de las diferencias. Calculamos tamaños del efecto a partir del estadístico D de Cohen e interpretamos diferencias pequeñas a valores cercanos a 0.20, medianas a valores cercanos a 0.50 y grandes a valores cercanos a 0.80 (Cohen, 1992).

Para abordar la relación entre las prácticas pedagógicas y las escalas de actitudes se utilizó un análisis de regresión lineal que permite evaluar la contribución simultánea de la escala de tipo de enseñanza, sexo y rendimiento, en su relación con las distintas variables foco del estudio. Se utilizaron modelos múltiples, ingresando variables progresivamente: primero sexo y enseñanza percibida y más tarde, la interacción entre enseñanza y sexo, verificando para cada modelo el cumplimiento de linealidad, homocedasticidad, normalidad e independencia. Dado que la interacción entre variables es más difícil de detectar en diseños de estudio de campo y como la muestra de este estudio era limitada, los efectos de la interacción se testearon considerando significancia estadística para valores *p* menores a 0.1 (sugerido por Aguinis, 1995; McClelland y Judd, 1993). También consideramos las categorías de rendimiento y preferencias, y siguiendo este análisis se estimó útil evaluar separadamente los modelos para cada una de las 3 categorías de preferencia (ver resultados).

4. Resultados

4.1. *Validez de las mediciones de percepción de estudiantes acerca de prácticas de enseñanza centradas en las y los estudiantes y actitudes*

Usando el análisis Rasch para las distintas mediciones construidas permite verificar la validez de utilizar medidas unidimensionales para las escalas de percepción sobre las prácticas de enseñanza centradas en estudiantes, afectos positivos, autoconcepto y disposición hacia las matemáticas utilizando los criterios definidos: estas cuatro escalas muestran indicadores de confiabilidad adecuados (separación de ítemes y confiabilidad de personas), sin ítemes que no se ajusten al modelo y sin antecedentes que indiquen la existencia de más dimensiones (Ver tabla IV).

TABLA IV
Resumen de análisis Rasch de las escalas

Escala	*Ítems*	*Total Infit*[1]	*Total Outfit*[1]	*Índice separación personas*[1]	*Índice separación ítems*[1]	*Varianza explicada*	*Valor propio*[2]
Enseñanza centrada en estudiantes	10	1.01 (0.18)	1.01 (0.18)	1.84 (0.77)	6.18 (0.97)	41.10%	1.8
Afectos Positivos	10	1.01 (0.23)	1.03 (0.21)	2.20 (0.83)	4.24 (0.95)	48.90%	1.6
Afectos Negativos	10	1.03 (0.14)	0.99 (0.15)	1.273 (0.62)	4.00 (0.94)	39.20%	2
Autoconcepto	4	0.99 (0.18)	0.99 (0.18)	2.03 (0.80)	11.11 (0.99)	67.70%	1.6
Disposición	6	0.98 (0.22)	0.99 (0.21)	2.30 (0.84)	14.79 (1.00)	69.80%	1.7

[1] Medida (DS); [2] Análisis de componentes principales de los residuos.

Como se observa en la tabla IV, la escala de afectos negativos es la única que muestra un índice menor de separación, lo que implica que esta es menos efectiva para diferenciar distintos niveles de habilidad (o de expresión de afectos negativos). A pesar de ello, se incluyó en el análisis considerando esta limitación en la interpretación de los datos. Finalmente, ninguna escala mostró evidencia de la existencia de dimensiones adicionales, por lo que se acepta su unidimensionalidad.

El análisis de funcionamiento diferencial de los ítems (DIF) por sexo (0= hombres; 1= mujeres) no arrojó diferencias importantes en la mayoría de las escalas. La única escala que aparece con un DIF de sexo marginal es la de la disposición hacia las matemáticas, donde 2 ítemes (“las matemáticas son importantes para mi futuro” y “las matemáticas son importantes para mi futuro después del colegio”) muestran magnitudes de DIF del rango de 0.5 logits. Sin embargo, dado que apuntan en direcciones opuestas no fueron consideradas como amenazas de sesgo para la escala completa (ver figura 1).

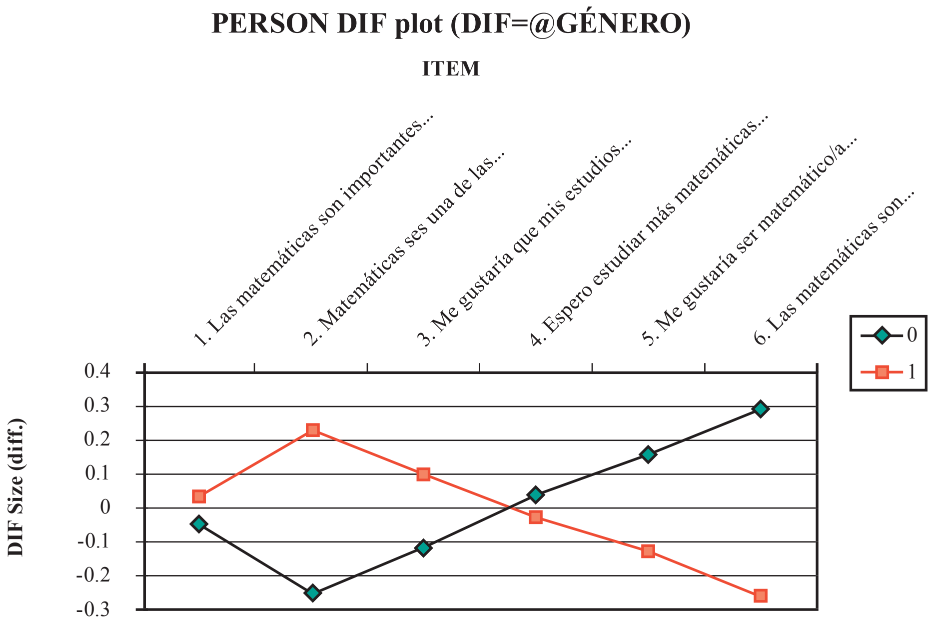


Figura 1. Funcionamiento diferencial de ítemes para la escala de disposición

4.2. *Análisis descriptivo*

Comparadas con los hombres, encontramos que las estudiantes perciben la enseñanza centrada en el estudiante como menos frecuente, se sienten menos positivas, reflejan niveles inferiores de autoconcepto y tienen una menor disposición hacía las matemáticas en el futuro (ver tabla V). Todas las diferencias fueron significativas a p= .05, excepto el rendimiento y afectos negativos. Usando el estadístico *D* de Cohen, la magnitud de las diferencias para los efectos significativos varía de pequeña a media (en un rango de 0.24 a 0.39).

TABLA V
Resultados descriptivos

	Género	*N*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*Error estándar*	*D de Cohen*
Afectos Positivos	Hombre	128	0.25	1.13	0.10	0.39***
	Mujer	148	-0.18	1.10	0.09	Mediano
Afectos Negativos	Hombre	129	-0.95	0.84	0.07	0.05
	Mujer	148	-0.99	0.87	0.07	
Autoconcepto	Hombre	137	1.47	2.49	0.21	0.34**
	Mujer	154	0.72	2.00	0.16	Mediano
Disposición	Hombre	137	0.40	1.96	0.17	0.25**
	Mujer	154	-0.05	1.66	0.13	Pequeño
Rendimiento	Hombre	132	60.49	14.84	1.29	0.02
	Mujer	151	60.25	15.20	1.24	

* $p< .05$; ** $p< .01$; *** $p< .001$

El análisis descriptivo muestra que las niñas no solo reportan actitudes menos positivas hacia las matemáticas, sino también reportan tener menos experiencias con prácticas pedagógicas centradas en estudiantes. Estas diferencias no están necesariamente relacionadas con diferencias en el rendimiento, dado que niñas y niños presentan un rendimiento igual.

4.3. *Construcción de modelos*

Los modelos revelaron que el sexo está asociado de forma significativa con todas las variables, excepto con afectos negativos y el rendimiento. Se aprecia que el hecho de ser niña está relacionado con puntajes menores en afectos positivos, autoconcepto y disposición hacia las matemáticas, tanto antes como después de controlar el rendimiento (Ver tabla VI, paso 1 y 2). La percepción de la enseñanza centrada en el estudiante mostró una asociación significativa con todas las variables de identificación positiva luego de controlar el rendimiento académico. Ésta se asoció con puntajes más altos en afectos positivos, autoconcepto y disposición hacia las matemáticas en el futuro. No se encontraron asociaciones significativas en la medición de afectos negativos de los y las estudiantes durante el quehacer matemático (Ver tabla VI, paso 3). En estos modelos se encontró que solo el rendimiento explica una porción significativa de la varianza y su efecto no varía al incluir otras variables (sexo y enseñanza) (Ver tabla VI, pasos 1, 2, 3 y 4).

TABLA VI
Muestra total de coeficientes de regression modelos afectos positivos, afectos negativos, autoconcepto y disposición

	Afectos Positivos (Beta) *n=263*	*Afectos Negativos* (Beta) *n=264*	*Autoconcepto* (Beta) *n=273*	*Disposición* (Beta) *n=273*
Paso 1				
Mujer	-0.189***	-0.014	-0.186***	-0.117*
Paso 2				
Mujer	-0.193***	-0.07	-0.190****	-0.119**
Rendimiento	0.251****	-0.357****	0.472****	0.224***
Paso 3				
Mujer	-0.130**	-0.009	-0.147***	-0.071
Rendimiento	0.263****	-0.358****	0.481****	0.235****
Enseñanza	0.432****	-0.016	0.300****	0.341****
Paso 4				
Mujer	-0.130**	-0.010	-0.147***	-0.071
Rendimiento	0.263****	-0.356****	0.481****	0.238****
Enseñanza	0.445****	-0.051	0.337****	0.266***
Mujer*Enseñanza	-0.018	0.050	-0.052	0.106
Paso 5				
Mujer	-0.115**	-0.016	-0.132***	-0.050
Rendimiento	0.156***	-0.324****	0.367****	0.090*
Enseñanza	0.376****	-0.029	0.256****	0.156**
Mujer*Enseñanza	-0.052	0.050	-0.079	0.082
Favorita	0.150***	-0.097	0.222****	0.345****
Menos Favorita	-0.246****	0.018	-0.212****	-0.220****
r^2 paso 1 [1]	0.04***	-0.004	0.035***	0.014*
r^2 paso 2 [1]	0.10****	0.128****	0.258****	0.064****
r^2 paso 3 [1]	0.28****	0.128	0.346****	0.177****
r^2 paso 4 [1]	0.28	0.129	0.347	0.183
r^2 paso 5 [1]	0.35****	0.138	0.449****	0.362****

* $p< 0.10$; ** $p<0.05$; *** $p< 0.01$; **** $p< 0.001$. [1] *p* para cambio de r^2

Al observar el efecto del sexo antes (paso 2) y después (paso 3) de considerar la práctica pedagógica, se observa una disminución en su intensidad. Esto apunta a que parte de las diferencias por sexo en el afecto positivo con las matemáticas se explican por las diferentes percepciones de la práctica de la enseñanza: en la medida en que las niñas perciben la enseñanza como menos centrada en el estudiante, ellas tienden a reportar niveles menores de afectos positivos, de imagen de sí mismas y de disposición hacia las matemáticas en el futuro. Sin embargo, este efecto de mediación no es completo dado que algunas diferencias permanecen luego de incluirse la variable de la práctica pedagógica (Ver tabla VI, paso 3).

En el paso siguiente (paso 4) la inclusión de la interacción entre sexo y enseñanza percibida no produjo un aumento significativo en la varianza explicada en ninguna de las variables de identificación *(modelo de afectos positivos* $\Delta R^2 = .00$, $F_{(1, 258)} = 0.06$, $p = .81$; , *modelo de afectos negativos* $\Delta r^2 = .00$, $F_{(1, 259)} = 0.37$, $p = .54$; *modelo autoconcepto* $\Delta r^2 = .00$, $F_{(1, 268)} = 0.55$, $p = .46$; *modelo de disposición* $\Delta r^2 = .01$, $F_{(1, 268)} = 1.84$, $p = .18$). Esto sugiere que el efecto de la enseñanza centrada en estudiantes es el mismo para niñas y niños, lo cual no permite sostener la existencia de un efecto diferencial por sexo (Ver tabla VI, paso 4).

Finalmente, en el paso 5 la inclusión de preferencias demuestra el efecto dominante de esta variable en el modelo. Como se ve en todos los modelos excepto en los de afectos negativos, las variables “favorita” y “menos favorita” se relacionan de forma considerable con las variables dependientes y disminuyen el efecto de la variable de enseñanza (ver pasos 4 y 5), por lo que se hipotetizó que la preferencia podría determinar el efecto de las otras variables en este modelo. Por esto los 4 modelos fueron aplicados de forma separada para cada uno de los 3 subgrupos de estudiantes según su preferencia por las matemáticas.

Las tendencias generales observadas para la muestra completa se replicaron en la muestra dividida por preferencia, pero se ve inestabilidad en la forma en que los efectos del sexo y enseñanza afectan las diferentes formas de identificación para los estudiantes (ver tablas VIIa y VIIb).

Los modelos separados por preferencia de la asignatura de matemáticas muestran que existe una tendencia por parte de las niñas a identificarse de forma menos positiva con las matemáticas, reportando un autoconcepto más bajo y menor disposición hacia las matemáticas, pero estos efectos no fueron estables para los diferentes niveles de preferencia. Para las mediciones de afectos positivos y disposición para estudiar matemáticas en el futuro, el efecto del sexo fue mayor en estudiantes que consideraban las matemáticas como favoritas o como menos favoritas (con efectos en la disposición que no alcanzan significancia estadística para ningún grupo). Con respecto al autoconcepto, el efecto fue mayor en estudiantes que informaron ser neutrales en relación con las matemáticas. En otras palabras, las niñas que consideran las matemáticas como favoritas o que las mencionan como una de las que más rechazan (menos favoritas), tienden a ser menos positivas que sus compañeros, pero sin necesariamente reportar autoconcepto más bajo. En esta última variable solo las niñas que son neutrales (que no mencionan matemáticas ni como su asignatura favorita ni como menos favorita) mostraron niveles menores de autoconcepto que los niños. Nuevamente el efecto principal del sexo no fue significativo para los afectos negativos durante el quehacer matemático. (ver tablas VIIa y VIIb, pasos 1 y 2).

TABLA VIIA

Coeficientes de regression modelos afectos positivos y afectos negativos. Muestra dividida por preferencia de matemáticas

	Afectos Positivos (Beta)			*Afectos Negativos* (Beta)		
	Menos Favorito (n=64)	Neutral (n=133)	Favorito (n=66)	Menos Favorito (n=64)	Neutral (n=134)	Favorito (n=66)
Paso 1						
Mujer	-0.21*	-0.13	-0.21*	0.14	-0.13	-0.05
Paso 2						
Mujer	-0.23*	-0.14	-0.19	0.19	-0.10	-0.07
Rendimiento	0.13	0.09	0.19	-0.28***	-0.33****	-0.36***
Paso 3						
Mujer	-0.16	-0.13	-0.10	0.13	-0.10	-0.05
Rendimiento	0.13	0.16*	0.23**	-0.28***	-0.30****	-0.35***
Enseñanza	0.35***	0.31****	0.49****	-0.27***	0.16*	0.11
Paso 4						
Mujer	-0.12	-0.12	-0.06	0.19	-0.10	-0.03
Rendimiento	0.12	0.16*	0.21*	-0.29***	-0.30****	-0.36***
Enseñanza	0.28*	0.38***	0.60****	-0.37***	0.07	0.17
Mujer*Enseñanza	0.13	-0.09	-0.18	0.18	0.11	-0.10
r^2 paso 1 [1]	0.05*	0.02	0.04*	0.02	0.02	0.002
r^2 paso 2 [1]	0.06	0.03	0.08*	0.10**	0.13****	0.13***
r^2 paso 3 [1]	0.18***	0.12****	0.31****	0.16**	0.15*	0.14
r^2 paso 4 [1]	0.19	0.12	0.33	0.18	0.16	0.15

* $p< 0.10$; ** $p<0.05$; *** $p< 0.01$; **** $p< 0.001$. [1] p para cambio de r^2

TABLA VIIB

Coeficientes de regresion para el modelo de autoconcepto y disposición. Muestra dividida por preferencia hacia las matemáticas

	Autoconcepto (Beta)			*Disposición (Beta)*		
	Menos Favorito (n=66)	Neutral (n=138)	Favorito (n=69)	Menos Favorito (n=66)	Neutral (n=138)	Favorito (n=69)
Paso 1						
Mujer	-0.13	-0.20**	-0.16	-0.01	-0.05	-0.15
Paso 2						
Mujer	-0.15	-0.22***	-0.12	-0.12	-0.05	-0.14
Rendimiento	0.18	0.40****	0.49****	0.08	0.04	0.11
Paso 3						
Mujer	-0.09	-0.22***	-0.08	-0.08	-0.04	-0.09
Rendimiento	0.18	0.45****	0.51****	0.08	0.10	0.13
Enseñanza	0.30**	0.23***	0.19*	0.18	0.30***	0.22*
Paso 4						
Mujer	-0.09	-0.21***	-0.10	-0.02	-0.04	-0.16
Rendimiento	0.18	0.44****	0.52****	0.08	0.10	0.16
Enseñanza	0.32**	0.45****	0.14	0.07	0.40***	0.05
Mujer*Enseñanza	-0.02	-0.28**	0.08	0.19	-0.13	0.30**
r^2 paso 1 [1]	0.02	0.04**	0.03	0.01	0.00	0.02
r^2 paso 2 [1]	0.05	0.20****	0.27****	0.02	0.00	0.03
r^2 paso 3 [1]	0.13***	0.25***	0.30*	0.05	0.09***	0.08*
r^2 paso 4 [1]	0.13	0.28**	0.31	0.07	0.10	0.13***

* $p< 0.10$; ** $p<0.05$; *** $p< 0.01$; **** $p< 0.001$. [1] p para cambio de r^2

En relación con la percepción que tienen las y los estudiantes sobre el tipo de enseñanza que reciben, nuevamente la tendencia general fue que los niveles más altos de enseñanza centrada en estudiantes están asociados a niveles más altos de afectos positivos, de autoconcepto y de disposición hacia las matemáticas. Cabe notar que, al dividir la muestra, la percepción sobre práctica pedagógica también tuvo un efecto en afecto negativo durante el quehacer matemático, efecto que fue diferente en las distintas submuestras. Para las y los estudiantes que consideran a las matemáticas como su asignatura menos preferida, hubo un efecto negativo entre la percepción de alta frecuencia de práctica pedagógica centrada en estudiante. En otras palabras, al percibir una más alta frecuencia de prácticas centradas en el estudiante, las y los estudiantes tienden a reportar emociones menos negativas durante el quehacer matemático. En contraste, para las y los estudiantes que reportaron una relación neutral con las matemáticas, la percepción de una alta frecuencia de actividades pedagógicas centradas en el estudiante se asocia con niveles mayores de afectos negativos durante el quehacer matemático (ver tablas VIIa y VIIb, paso 3).

Finalmente, en relación con la interacción entre sexo y percepción sobre la enseñanza, nuevamente la mayoría de los modelos no sostienen la existencia de un efecto diferencial por sexo (la mayoría de las interacciones no son significativas). Sin embargo, 2 interacciones aparecen como significativas. Primero, el efecto positivo que tiene la enseñanza centrada en estudiantes en el autoconocepto de las y los estudiantes aparece como menos fuerte en las niñas que reportaron ser neutrales con relación a las matemáticas. En otras palabras, las niñas neutrales tienden a reportar menores niveles de autoconcepto al percibir niveles mayores de enseñanza centrada las y los estudiantes que los niños neutrales. Segundo, para las niñas que consideran las matemáticas como asignatura favorita, el efecto de la enseñanza centrada en estudiantes sobre su disposición hacia estudiar matemáticas en el futuro fue positivo, es decir, existe una tendencia en este grupo de niñas a reportar mayor disposición hacia las matemáticas en el futuro al experimentar mayores niveles de enseñanza centrada en las y los estudiantes (ver tablas VIIa y VIIb, paso 4).

5. Conclusiones y discusión

El principal propósito de este artículo fue explorar la relación entre las experiencias de estudiantes en relación con la enseñanza de las matemáticas en sus clases y las diferentes variables relacionadas con actitudes hacia esta disciplina. Particularmente, interesaba explorar si su percepción de experimentar, en forma frecuente, actividades consideradas como centradas en estudiantes tenía un efecto positivo en afectos positivos, en el autoconcepto y en la disposición hacia las matemáticas a futuro, y un efecto negativo en afectos negativos durante el quehacer matemático. También exploró si esta relación es similar para niñas y niños, testeando si es posible dar soporte al supuesto de que los tipos de enseñanza centradas en el estudiante tienen un efecto diferencial por sexo.

Tres hallazgos principales pueden extraerse de este estudio. Primero, la enseñanza centrada en las y los estudiantes influye positivamente en sus actitudes positivas hacia las matemáticas. Esto fue particularmente importante para las mediciones de afectos positivos y disposición para estudiar matemáticas en el futuro, donde el estilo de enseñanza percibido tiene un efecto mayor que el rendimiento académico. Esto confirma estudios previos (Gilbert et al., 2014; Pampaka, Williams et al., 2011) y está en consonancia con las reformas recientes en la educación matemática que han motivado a los profesores a adoptar este tipo de enseñanza en sus clases. Por ejemplo, en Estados Unidos lo que ha sido llamado *enseñanza reformada* o *instrucción basada en estándares* ha sido descrita como instrucción que compromete a las y los estudiantes como participantes activos de su propio aprendizaje a través de la comunicación con los otros, del trabajo cooperativo en grupos de aprendizaje y del establecer conexiones con situaciones de la vida real (Hamilton et al., 2003; Le et al., 2009). Mientras que, la mayor parte de los estudios que han evaluado este enfoque reformista se han enfocado en su impacto en el rendimiento (por ejemplo, Desimone y Long, 2010; Hamilton et al., 2003), este estudio confirma que cuando las y los estudiantes perciben mayor frecuencia de este tipo de enseñanza en sus clases tienden a reportar actitudes más positivas hacia las matemáticas. Esto se suma a la literatura que ha informado este tipo de efecto predominantemente en el rendimiento y desempeño, pero no ha explorado los efectos de las variables afectivo-subjetivas de la enseñanza.

Un segundo resultado se relaciona con la hipótesis que plantea que los tipos de enseñanza centradas en los estudiantes pueden ser experimentados de forma más positiva por las niñas. Siguiendo esta hipótesis, se esperaba un mayor efecto de esta enseñanza en las niñas que en los niños. Esto no fue confirmado por los datos: el efecto positivo fue en general de la misma magnitud para las niñas como para los niños. Sin embargo, provee sustento para la promoción de enseñanza centrada en los estudiantes con el fin de reforzar la identificación positiva de las niñas con las matemáticas y, por tanto, promover una enseñanza matemática más igualitaria en términos del sexo. Las niñas informan haber experimentado actividades de clase como menos centradas en los estudiantes, lo cual se asoció consecuentemente con sensaciones menos positivas, autoconcepto más negativo y menos disposición hacia las matemáticas en el futuro. Esto destaca la necesidad de explorar por qué las niñas reportan diferentes percepciones de la enseñanza en sus clases al ser comparadas con los niños. Una hipótesis que tiene que ser contrastada es que las niñas podrían realmente estar viviendo enfoque de enseñanza distinto en sus clases. Estudios nacionales e internacionales han explorado este tema, investigando la distribución de las oportunidades de participación entre niñas y niños en el aula de clases. Algunos estudios han documentado cómo las y los profesores dirigen más preguntas a los niños (en Chile, Ortega et al., 2020) o les dan mayor atención visual (French y French, 1984; Graddol y Swann, 1989), lo cual, subsecuentemente, da a los niños más oportunidades para participar, aun si el profesor no nota este tratamiento diferenciado (Black, 2004). Esta podría ser una explicación posible a las diferencias en la percepción sobre la enseñanza, la cual requiere mayor investigación.

Un tercer resultado que da sustento al argumento de la enseñanza adecuada a las mujeres es la relación entre la enseñanza centrada en el estudiante y la disposición hacia el estudio de las matemáticas en el futuro por parte de niñas que identificaron matemáticas como su asignatura favorita. Según este estudio, el efecto que tiene la enseñanza centrada en estudiantes en la disposición futura fue mayor en las niñas que en los niños que nombraron matemáticas como una de sus asignaturas favoritas. Esto es importante debido a que la disposición y las aspiraciones e intenciones con respecto a las matemáticas en el futuro se han vinculado con un futuro compromiso y elección de carreras relacionadas con las matemáticas (Buschor, et.al., 2014).

No obstante, dos interrogantes principales permanecen sin respuesta aquí y podrían ser de utilidad para futuras investigaciones. Primero, no está claro si el efecto de la percepción de la enseñanza en las actitudes hacia las matemáticas corresponde a un efecto general del estilo de enseñanza en las clases o tiene que ver con experiencias individuales dentro de las clases. Investigaciones futuras podrían incluir una muestra mayor de clases, lo cual permitiría una mayor exploración de los efectos de las clases en esta relación. Esto es particularmente relevante si este estudio o estudios similares intentan prescribir diferentes prácticas de enseñanza a profesores y profesoras.

Una segunda interrogante es, si la experiencia de enseñanza referida por las niñas tiene relación con lo que realmente pasa en el aula de clases. Relacionar estas percepciones con datos observados puede otorgar más información para sugerir intervenciones en las actividades de los profesores.

Finalmente, es importante recalcar la evidencia positiva que este estudio reporta sobre la percepción sobre enseñanza centrada en estudiantes en aulas de clases de matemáticas. Si bien no se encontró evidencia de la existencia de un efecto diferencial por sexo o de una mayor adecuación de esta enseñanza para las estudiantes, las relaciones positivas de este tipo de enseñanza con las distintas variables actitudinales y emocionales dan cuenta de la necesidad de transformar las aulas matemáticas para todas y todos.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo financiero de los proyectos Fondecyt Postdoctorado no 3180291 y Proyecto Fondo Basal FB210005 Centro de Modelamiento Matemático.

REFERENCIAS

Aeschlimann, B., Herzog, W. y Makarova, E. (2016). How to foster students' motivation in mathematics and science classes and promote students' STEM career choice. A study in Swiss high schools. *International Journal of Educational Research, 79*, 31-41. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.06.004

Aguinis, H. (1995). Statistical power with moderated multiple regression in management research. *Journal of Management*, *21*(6), 1141-1158. https://doi.org/10.1177/014920639502100607

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D. y Wiliam, D. (1997). *Effective teachers of numeracy*. Kings College.

Bartholomew, H., Darragh, L., Ell, F. y Saunders, J. (2011). 'I'm a natural and I do it for love!': exploring students' accounts of studying mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(7), 915-924. https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.608863

Bassi, M., Blumberg, R. L. y Díaz, M. (2016). *Under the" Cloak of Invisibility": Gender bias in teaching practices and learning outcomes. IDB Working Paper Series*. Inter-American Development Bank. https://doi.org/10.18235/0000446

Becker, J. R. (1995). Women's ways of knowing in mathematics. En G. Kaiser y P. Rogers, (Eds.), *Equity in mathematics education: Influences of feminism and culture* (pp. 163–174). The Falmer Press. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED391849.pdf

Belenky, M., Clinchy, B., Goldberger, N. y Tarule, J. (1986). *Women's ways of knowing: the development of self, voice and mind*. Basic Books.

Black, L. (2004). Differential participation in whole-class discussions and the construction of marginalised identities. *Journal of Educational Enquiry*, 5(1), 34–54. https://ojs.unisa.edu.au/index.php/EDEQ/article/view/516

Blázquez, C., Álvarez, P., Bronfman, N. y Espinosa, J. F. (2009). Factores que influencian la motivación de escolares por las áreas tecnológicas e ingeniería. *Calidad en la Educación, 31*, 46-64. https://doi.org/10.31619/caledu.n31.162

Boaler, J. (2002). *Experiencing School Mathematics: Traditional and Reform Approaches to Teaching and Their Impact on Student Learning*. Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781410606365

Boaler, J. y Greeno, G. G. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 171–200). Ablex Publishing.

Boaler, J. y Staples, M. (2008). Creating Mathematical Futures through an Equitable Teaching Approach: The Case of Railside School. *The Teachers College Record*, *110*(3), 608–645. https://doi.org/10.1177/016146810811000302

Bond, T. G. y Fox, C. M. (2001). *Applying the Rasch Model: Fundamental Measurement in the Human Sciences*. Lawrence Erlbaum Associates.

Bordón, P., Canals, C. y Mizala, A. (2020). The gender gap in college major choice in Chile. *Economics of Education Review, 77(102011)*, 1-27. https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2020.102011

Buerk, D. (1985). The voices of women making meaning in mathematics. *Journal of Education*, *16*(3), 59-70. https://doi.org/10.1177/002205748516700304

Buschor, C. B., Berweger, S., Frei, A. K. y Kappler, C. (2014). Majoring in STEM-What Accounts for Women's Career Decision Making? A Mixed Methods Study. *Journal of Educational Research*, *107*(3), 167-176, https://doi.org/10.1080/00220671.2013.788989

Carrasco Salazar, E. y Valenzuela Vidal, D. (2021). Mujeres que eligen ciencias: autoeficacia, expectativas de resultado, barreras y apoyos percibidos para la elección de carrera universitaria. *Calidad en la Educación, (54),* 271-302. http://dx.doi.org/10.31619/caledu.n54.994

Ceci, S. J., Williams, W. M. y Barnett, S. M. (2009). Women's underrepresentation in science: sociocultural and biological considerations. *Psychological bulletin*, *135(2)*, 218. https://doi.org/10.1037/a0014412

Cerinsek, G., Hribar, T., Glodez, N. y Dolinsek, S. (2013). Which are my future career priorities and what influenced my choice of studying science, technology, engineering or mathematics? Some insights on educational choice—case of Slovenia. *International Journal of Science Education*, *35(17)*, 2999-3025. https://doi.org/10.1080/09500693.2012.681813

Cheryan, S. y Plaut, V. C. (2010). Explaining underrepresentation: A theory of precluded interest. *Sex roles, 63(7)*, 475-488. https://doi.org/10.1007/s11199-010-9835-x

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin, 112(1)*, 155–159. https://doi.org/10.1037/0033-2909.112.1.155

Conicyt (2017). *Diagnóstico Igualdad de Género en Ciencia, Tecnología e Innovación en Chile. Levantando evidencias, construyendo avances y proponiendo recomendaciones desde la colaboración pública y privada*. Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile. https://www.conicyt.cl/wp-content/uploads/2015/03/Diagnostico-Equidad-de-Genero-en-CTI-MESA-CONICYT_2017.pdf

Cooper, K. S. (2013). Eliciting Engagement in the High School Classroom A Mixed-Methods Examination of Teaching Practices. *American Educational Research Journal*, *51*(2), 363-402. https://doi.org/10.3102/0002831213507973

Crawford, J. R. y Henry, J. D. (2004). The Positive and Negative Affect Schedule (PANAS): Construct validity, measurement properties and normative data in a large non-clinical sample. *British Journal of Clinical Psychology*, *43*(3), 245. https://doi.org/10.1348/0144665031752934

Cvencek, D., Meltzoff, A. y Greenwald, A. (2011). Math-Gender stereotypes in elementary school children. *Child Development, 82*(3), 766-779. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01529.x

Darragh, L. (2015). Recognising 'good at mathematics': using a performative lens for identity. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(1), 83-102. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0120-0

Daniels, L. M., Stupnisky, R. H., Pekrun, R., Haynes, T. L., Perry, R. P. y Newall, N. E. (2009). A longitudinal analysis of achievement goals: From affective antecedents to emotional effects and achievement outcomes. *Journal of Educational Psychology*, *101*(4), 948-963. https://doi.org/10.1037/a0016096

Del Río, M. F. y Strasser, K. (2013). Preschool children's beliefs about gender differences in academic skills. *Sex Roles, 68(3-4)*, 231-238. https://doi.org/10.1007/s11199-012-0195-6

Del Río, M. F., Susperreguy, M. I., Strasser, K. y Salinas, V. (2017). Distinct influences of mothers and fathers on kindergartners' numeracy performance: The role of math anxiety, home numeracy practices, and numeracy expectations. *Early Education and Development, 28(8)*, 939-955. https://doi.org/10.1080/10409289.2017.1331662

Desimone, L. y Long, D. A. (2010). Teacher effects and the achievement gap: Do teacher and teaching quality influence the achievement gap between Black and White and high-and low-SES students in the early grades. *Teachers College Record*, *112*(12), 3024-3073. https://doi.org/10.1177/016146811011201206

Desimone, L., Smith, T. y Frisvold, D. (2009). Survey measures of classroom instruction: Comparing student and teacher reports. *Educational Policy*, *24*(2), 267-329. https://doi.org/10.1177/0895904808330173

Dufey, M. y Fernández, A. M. (2012). Validez y confiabilidad del Positive Affect and Negative Affect Schedule (PANAS) en estudiantes universitarios chilenos. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación Psicológica*, *34*(2), 157-173. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=459645438008

Eccles, J. S. y Wang, M. T. (2016). What motivates females and males to pursue careers in mathematics and science? *International Journal of Behavioral Development*, *40*(2), 100-106. https://doi.org/10.1177/0165025415616201

Eccles, J., Wigfield, A., Harold, R. D. y Blumenfeld, P. (1993). Age and Gender Differences in Children's Self- and Task Perceptions during Elementary School. *Child Development, 64*, 830-847. https://doi.org/10.2307/1131221

Ellis, M. W., Malloy, C. E., Meece, J. L. y Sylvester, P. R. (2007). Convergence of observer ratings and student perceptions of reform practices in sixth-grade mathematics classrooms. *Learning Environments Research*, *10*(1), 1-15. https://doi.org/10.1007/s10984-007-9022-3

Espinoza, A. M. y Taut, S. (2016). El rol del género en las interacciones pedagógicas de aulas de matemática chilenas. *Psykhe, 25(2)*, 1-18. https://doi.org/10.7764/psykhe.25.2.858

Espinoza, A. M. y Taut, S. (2020). Gender and psychological variables as key factors in mathematics learning: A study of seventh graders in Chile. *International Journal of Educational Research, 103(101611)*, 1-16. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2020.101611

Evans, J. (2000). *Adult's mathematical thinking and emotions: A study of numerate practises*. Routledge Falmer.

Fennema, E. y Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualisation and affective factors. American Educational Research Journal, *14*(1), 51-71. https://doi.org/10.2307/1162519

Fernández, M. C., Briceño, C. y Mora, G. (2020). *Segregación de género en elección de estudios superiores*. Proyecto Fondecyt N.° 1191585.

Franklin, D. (2013). A Practical Guide to Gender Diversity for Computer Science Faculty. *Synthesis Lectures on Professionalism and Career Advancement for Scientists and Engineers*, *1*(2), 1–81. https://doi.org/10.1007/978-3-031-02508-2

Fredricks, J. A. y Eccles, J. S. (2002). Children's competence and value beliefs from childhood through adolescence: growth trajectories in two male-sex-typed domains. *Developmental psychology*, *38*(4), 519–533. https://doi.org/10.1037/0012-1649.38.4.519

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H. y Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *111*(23), 8410-8415. https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111

French, J. y French, P. (1984). Gender Imbalances in the Primary Classroom: An Interactional Account. *Educational Research 2(2), 127-36*. https://doi.org/10.1080/0013188840260209

Frenzel, A. C., Pekrun, R. y Goetz, T. (2007). Girls and mathematics—A "hopeless" issue? A control-value approach to gender differences in emotions towards mathematics. *European Journal of Psychology of Education, 22(4)*, 497-514. https://doi.org/10.1007/BF03173468

Geist, K. (2008). Different, Not Better: Gender Differences in Mathematics Learning and Achievement. *Journal of Instructional Psychology*, 35(1), 43–52.

Gilbert, M. C., Musu-Gillette, L. E., Woolley, M. E., Karabenick, S. A., Strutchens, M. E. y Martin, W. G. (2014). Student perceptions of the classroom environment: Relations to motivation and achievement in mathematics. *Learning Environments Research*, *17*(2), 287-304. https://doi.org/10.1007/s10984-013-9151-9

Gjicali, K. y Lipnevich, A. A. (2021). Got math attitude? (In) direct effects of student mathematics attitudes on intentions, behavioral engagement, and mathematics performance in the US PISA. *Contemporary Educational Psychology*, *67*, 102019. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2021.102019

Goetz, T., Frenzel, A. C., Hall, N. C. y Pekrun, R. (2008). Antecedents of academic emotions: Testing the internal/external frame of reference model for academic enjoyment. *Contemporary Educational Psychology*, *33*(1), 9-33. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2006.12.002

Graddol, D. y Swann, J. (1989). *Gender voices.* Cambridge University Press

Hamilton, L. S., McCaffrey, D. F., Stecher, B. M., Klein, S. P., Robyn, A. y Bugliari, D. (2003). Studying large-scale reforms of instructional practice: An example from mathematics and science. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *25*(1), 1–29. https://doi.org/10.3102/01623737025001001

Han, S. (2017). Korean students' attitudes toward STEM project-based learning and major selection. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *17*(2), 529–548. https://doi.org/10.12738/estp.2017.2.0264

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137-161. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Heyd-Metzuyanim, E. y Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research*, *51*, 128-145. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.015

Ireson, J. y Hallam, S. (2005). Pupils' liking for school: Ability grouping, self-concept and perceptions of teaching. *British Journal of Educational Psychology*, *75*(2), 297-311. https://doi.org/10.1348/000709904X24762

Jacobs, J. E., Lanza, S., Osgood, D. W., Eccles, J. S. y Wigfield, A. (2002). Changes in children's self-competence and values: Gender and domain differences across grades one through twelve. Child Development, *73*(2), 509-527. https://doi.org/10.1111/1467-8624.00421

Kahle, J. B., Meece, J. y Scantlebury, K. (2000). Urban African-American middle school science students: Does standards-based teaching make a difference? *Journal of Research in Science Teaching*, *37*(9), 1019-1041. https://doi.org/10.1002/1098-2736(200011)37:9%3C1019::AID-TEA9%3E3.0.CO;2-J

Kember, D. y Gow, L. (1994). Orientations to teaching and their effect on the quality of student learning. *The Journal of Higher Education*, *65*(1) 58-74. https://doi.org/10.2307/2943877

Le, V. N., Lockwood, J. R., Stecher, B. M., Hamilton, L. S. y Martinez, J. F. (2009). A longitudinal investigation of the relationship between teachers' self-reports of reform-oriented instruction and mathematics and science achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *31*(3), 200-220. https://doi.org/10.3102/0162373709336238

Lent, R., Brown, S., Sheu, H., Schmidt, J., Brenner, B., Gloster, C. y Treistman, D. (2005). Social cognitive predictors of academic interests and goals in engineering: Utility for women and students at historically black universities. *Journal of Counseling Psychology, 52*(1), 84-92. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-0167.52.1.84

Lent, R. W., Sheu, H. B., Miller, M. J., Cusick, M. E., Penn, L. T. y Truong, N. N. (2018). Predictors of science, technology, engineering, and mathematics choice options: A meta-analytic path analysis of the social–cognitive choice model by gender and race/ethnicity. *Journal of Counseling Psychology, 65(1)*, 17-35. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/cou0000243

Linacre, J. M. (2002). Optimizing rating scale category effectiveness. *Journal of Applied Measurement*, *3*(1), 85-106.

López-Bassols, V., Grazzi, M., Guillard, C. y Salazar, M. (2018). *Las brechas de género en ciencia, tecnología e innovación en América Latina y el Caribe. Resultados de una recolección piloto y propuesta metodológica para la medición*. Banco Interamericano de Desarrollo. http://dx.doi.org/10.18235/0001082

Marsh, H. W. (1990). Causal ordering of academic self-concept and academic achievement: A multiwave, longitudinal panel analysis. *Journal of Educational Psychology*, *82*(4), 646-656. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-0663.82.4.646

Marsh, H. W. (2007). *Self-concept theory, measurement and research into practice: The role of self-concept in educational psychology*. British Psychological Society.

Marsh, H. W., Trautwein, U., Lüdtke, O. y Köller, O. (2008). Social comparison and big-fish-little-pond effects on self-concept and other self-belief constructs: Role of general-ized and specific others. *Journal of Educational Psychology*, *100*(3), 510–524. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-0663.100.3.510

McClelland, G. H. y Judd, C. M. (1993). Statistical difficulties of detecting interactions and moderator effects. *Psychological Bulletin*, *114*(2), 376-390. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0033-2909.114.2.376

McCombs, B. L. y Quiat, M. (2002). What makes a comprehensive school reform model learner centered? *Urban Education*, *37*(4), 476-496. https://doi.org/10.1177/0042085902374002

McEwan, P. J. (2001). The effectiveness of public, catholic, and non-religious private schools in Chile's voucher system. *Education Economics*, *9*(2), 103-128. https://doi.org/10.1080/09645290110056958

Mendick, H. (2005). A beautiful myth? The gendering of being/doing 'good at maths'. *Gender and Education*, *17*(2), 203-219. https://doi.org/10.1080/0954025042000301465

Moriondo, M., Palma, P., Medrano, L. y Murillo, P. (2012). Adaptación de la Escala de Afectividad Positiva y Negativa (PANAS) a la población de adultos de la ciudad de Córdoba: Análisis psicométricos preliminares. *Universitas Psychologica*, *11*(1), 187-196. https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy11-1.aeap

Nagy, G., Trautwein, U., Baumert, J., Ko¨ller, O. y Garrett, J. (2006). Gender and course selection in upper secondary education: Effects of academic self-concept and intrinsic value. *Educational Research and Evaluation*, *12*(4), 323–345. https://doi.org/10.1080/13803610600765687

Noyes, A. (2012). It matters which class you are in: student-centred teaching and the enjoyment of learning mathematics. *Research in Mathematics Education*, *14*(3), 273-290. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.734974

OECD (2016). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264266490-en

Op't Eynde, P., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 193-207. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9034-4

Ortega Ferrand, L., Treviño, E. y Gelber, D. (2020). La inclusión de las niñas en las aulas de matemáticas chilenas: sesgo de género en las redes de interacciones profesor-estudiante. *Journal for the Study of Education and Development / Infancia y Aprendizaje, 44*(3), 623-674. https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1773064

Palardy, G. J. y Rumberger, R. W. (2008). Teacher effectiveness in first grade: The importance of background qualifications, attitudes, and instructional practices for student learning. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *30*(2), 111–140. https://doi.org/10.3102/0162373708317680

Pampaka, M., Kleanthous, I., Hutcheson, G. D. y Wake, G. (2011). Measuring mathematics self-efficacy as a learning outcome. *Research in Mathematics Education, 13(2)*, 169-190. https://doi.org/10.1080/14794802.2011.585828

Pampaka, M. y Williams, J. (2016). Mathematics teachers' and students' perceptions of transmissionist teaching and its association with students' dispositions. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *35*(3), 118-130. https://doi.org/10.1093/teamat/hrw007

Pampaka, M., Williams, J. S., Hutchenson, G., Black, L., Davis, P., Hernandez-Martines, P. y Wake, G. (2013). Measuring alternative learning outcomes: Dispositions to study in higher education. *Journal of Applied Measurement*, *14*(2), 197-218.

Pampaka, M., Williams, J., Hutcheson, G., Wake, G., Black, L., Davis, P. y Hernandez-Martinez, P. (2011). The association between mathematics pedagogy and learners' dispositions for university study. *British Educational Research Journal*, *38*(3), 473-496. https://doi.org/10.1080/01411926.2011.555518

Pampaka, M. y Wo, L. (2014). Revisiting Mathematical Attitudes of Students in Secondary Education. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 385-392). PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599969.pdf

Parker, P. D., Marsh, H. W., Ciarrochi, J., Marshall, S. y Abduljabbar, A. S. (2014). Juxtaposing math self-efficacy and self-concept as predictors of long-term achievement outcomes. *Educational Psychology*, *34*(1), 29-48. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.797339

Radovic, D. (2018). Diferencias de género en rendimiento matemático en Chile: el efecto del nivel socioeconómico y el establecimiento educacional en el bajo rendimiento de las niñas. *Revista Colombiana de Educación, 74,* 221-242. https://doi.org/10.17227/rce.num74-6907

Radovic, D., Black, L., Salas, C. y Williams, J. (2017). Being a girl mathematician: Analysis of the diversity of positive mathematical identities in a secondary classroom. *JRME - Journal for Research in Mathematics Education, 48*(4), 434-464. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.4.0434

Raîche, G. (2005). Critical Eigenvalue Sizes in Standardized Residual Principal Components Analysis. *Rasch Measurement Transactions*, *19*(1), 1012.

Riegle-Crumb, C., King, B., Grodsky, E. y Muller, C. (2012). The more things change, the more they stay the same? Prior achievement fails to explain gender inequality in entry into STEM college majors over time. *American Educational Research Journal*, *49*(6), 1048-1073. https://doi.org/10.3102/0002831211435229

Robles, R. y Páez, F. (2003). Estudio sobre la traducción al español y las propiedades psicométricas de las escalas de afecto positivo y negativo (panas). *Salud mental*, *26*(1), 69-75.

Roth, W. M. y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-564-2

Sax, L. J., Kanny, M. A, Jacobs, J. A., Whang, H., Weintraub, D. S. y Hroch, A. (2016). Understanding the changing dynamics of the gender gap in undergraduate engineering majors. *Research in Higher Education*, *57*(5), 570-600. https://doi.org/10.1007/s11162-015-9396-5

Schuh, K. L. (2004). Learner-centered principles in teacher-centered practices? *Teaching and Teacher Education*, *20*(8), 833–846. https://doi.org/10.1016/j.tate.2004.09.008

Smith, R. M., Schumacker, R. E. y Busch, M. J (1995). Using Item Mean Squares to Evaluate Fit to the Rasch Model. En Annual Meting of the American Educational Research Asociation (pp. 1-17). American Educational Research Asociation

Swan, M. (2006a). Learning GCSE mathematics through discussion: what are the effects on students? *Journal of Further and Higher Education*, *30*(3), 229-241. https://doi.org/10.1080/03098770600802263

Swan, M. (2006b). Designing and using research instruments to describe the beliefs and practices of mathematics teachers. *Research in Education, 75*(1), 58-70. https://doi.org/10.7227/RIE.75.5

Timmermans, R. E., Van Lieshout, E. C. y Verhoeven, L. (2007). Gender-related effects of contemporary math instruction for low performers on problem-solving behavior. *Learning and Instruction*, *17*(1), 42-54. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.11.005

UNESCO (2017). Cracking the code: girls' and women's education in science, technology, engineering and mathematics (STEM). United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. https://doi.org/10.54675/QYHK2407

Valentine, J. C., DeBois, D. L. y Cooper, H. (2004). The relation between self-beliefs and academic achievement: A meta-analytic review. *Educational Psychologist*, *39*(2), 37–41. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3902_3

Wang, M. T. (2012). Educational and career interests in math: A longitudinal examination of the links between classroom environment, motivational beliefs, and interests. *Developmental Psychology*, *48*(6), 1643-1657. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/a0027247

Watson, D., Clark, L. A. y Tellegen, A. (1988). Development and validation of brief measures of positive and negative affect: the PANAS scales. *Journal of personality and social psychology*, *54*(6), 1063-1070. https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0022-3514.54.6.1063

Watt, H. M. G. (2004). Development of adolescents' self-perceptions, values, and task perceptions according to gender and domain in 7th- through 11th-grade Australian students. *Child Development*, *75*(5), 1556-1574. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00757.x

Wigfield, A., Battle, A., Keller, L. B. y Eccles, J. S. (2002). Sex differences in motivation, self-concept, career aspiration, and career choice: implications for cognitive development. En R. De Lisi y A. McGillicuddy-De Lisi (Eds.), *The development of sex differences in cognition* (pp. 93–124). Ablex Publishing.

Zieky, M. J. (1993). Practical questions in the use of DIF statistics in test development. En P. W. Holland y H. Wainer (Eds.), *Differential item functioning* (pp. 337-47). Lawrence Erlbaum Associates.

Zwick, R. J. (2012). A review of ETS differential item functioning assessment procedures: Flagging rules, minimum sample size requirements, and criterion refinement. *ETS Research Report Series*, *1*, 1-30. https://doi.org/10.1002/j.2333-8504.2012.tb02290.x

Autoras

Darinka Radovic S. Universidad de Chile, Chile. darinka.radovic@uchile.cl

https://orcid.org/0000-0002-5489-6098

María Pampaka. The University of Manchester, Reino Unido. maria.pampaka@manchester.ac.uk

https://orcid.org/0000-0001-5481-1560

María Burgos, María José Castillo

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE VÍDEOS EDUCATIVOS DE MATEMÁTICAS: UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Didactic suitability of mathematics educational videos: an experience with students for teachers

RESUMEN

En este trabajo se describe el diseño, implementación y resultados de una acción formativa con 61 estudiantes para maestro de educación primaria, orientada al desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de vídeos educativos sobre porcentajes. El análisis *a priori* del vídeo reveló carencias importantes en las distintas facetas de la idoneidad didáctica, siendo especialmente relevante aquellas detectadas en la dimensión epistémica. La mayoría de los estudiantes para maestro realizaron valoraciones globales pertinentes de la idoneidad didáctica (un 70.49% la consideraron entre baja y media) basando su juicio en el grado de cumplimiento de los indicadores de idoneidad en los distintas componentes. Sin embargo, aunque las sugerencias de mejora indicadas son oportunas, no todos los estudiantes que identifican carencias en los vídeos pueden formular explícitamente cambios al recurso.

PALABRAS CLAVE:

- *Formación de profesores*
- *Idoneidad didáctica*
- *Vídeos educativos*
- *Porcentaje*
- *Proporcionalidad*

ABSTRACT

This paper describes the design, implementation and results of a formative action with 61 students for primary education teachers, oriented to the development of the competence of analysis of the didactic suitability of educational videos about percentages. The a priori analysis of the video made by the researchers revealed important deficiencies in the different facets of didactic suitability, being especially relevant those detected in the epistemic dimension. Most of the students for teacher made quite relevant global assessments of the didactic suitability (70.49% considered it between low and medium) basing their judgment on the precision or degree of fulfillment of the suitability indicators in the different components. However, although the suggestions for improvement indicated are quite timely, not all students who identify weaknesses in the videos are able to explicitly make changes to the resource.

KEY WORDS:

- *Teachers' education*
- *Didactical suitability*
- *Educational videos*
- *Percentage*
- *Proportionality*

Burgos, M. y Castillo, M. J. (2022). Idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas: una experiencia con estudiantes para maestro. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(3), 341 - 366. https://doi.org/10.12802/relime.22.2534. Recepción: Agosto 1, 2020 / Aceptación: Marzo 28, 2023

RESUMO

Este documento descreve a concepção, implementação e resultados de uma acção de formação com 61 estudantes para professores do ensino primário, orientada para o desenvolvimento da competência de análise da adequação didáctica dos vídeos educativos em percentagens. A análise a priori do vídeo revelou importantes deficiências nas diferentes facetas da adequação didáctica, sendo especialmente relevantes as detectadas na dimensão epistémica. A maioria dos alunos para professor fizeram avaliações globais bastante relevantes da adequação didáctica (70,49% consideraram-no entre baixo e médio) baseando o seu julgamento no grau de conformidade com os indicadores de adequação nos diferentes componentes. No entanto, embora as sugestões de melhoria indicadas sejam bastante oportunas, nem todos os estudantes que identificam pontos fracos nos vídeos são capazes de fazer alterações explícitas ao recurso.

PALAVRAS CHAVE:

- *Formação de professores*
- *Adequação didáctica*
- *Vídeos educacionais*
- *Percentagem*
- *Proporcionalidade*

RÉSUMÉ

Ce document décrit la conception, la mise en œuvre et les résultats d'une action de formation auprès de 61 étudiants pour les enseignants du primaire, orientée vers le développement de la compétence d'analyse de l'adéquation didactique des vidéos éducatives sur les pourcentages. L'analyse a priori de la vidéo a révélé d'importantes lacunes dans les différentes facettes de l'adéquation didactique, étant particulièrement pertinentes celles détectées dans la dimension épistémique. La plupart des étudiants pour enseignants ont fait des évaluations globales assez pertinentes de l'adéquation didactique (70.49% l'ont considérée comme faible ou moyenne) en se basant sur le degré de conformité aux indicateurs d'adéquation dans les différentes composantes. Cependant, bien que les suggestions d'amélioration indiquées soient assez opportunes, tous les élèves qui identifient des faiblesses dans les vidéos ne sont pas en mesure d'apporter explicitement des modifications à la ressource.

MOTS CLÉS:

- *Formation des enseignants*
- *Adéquation didactique*
- *Vidéos éducatives*
- *Percentaje*
- *Proportionnalité*

1. Introducción

El uso de vídeos educativos alojados en plataformas en línea ha crecido de forma rápida en los últimos años, convirtiéndose en un apreciado recurso en la enseñanza de las matemáticas (Myllykoski, 2016). Entre las múltiples razones, destacan la posibilidad de los alumnos de decidir el momento y lugar para visualizarlos, fomentando su trabajo autónomo, complementando las clases síncronas donde no siempre es posible adaptarse al ritmo de aprendizaje de cada estudiante o dedicar el tiempo necesario a los contenidos más complejos (Howard et al., 2017). Este tipo de beneficios ha motivado que docentes de distintas disciplinas y niveles educativos recurran cada vez con mayor frecuencia a vídeos disponibles en Internet, convirtiéndose en uno de los recursos prioritarios en propuestas pedagógicas como el flipped learning (Davies et al., 2013). Esto sitúa en el punto de mira la forma en que este tipo de recursos permite lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes (Borba et al., 2016; Dabbagh y Kitsantas, 2012; Portugal et al., 2018; Ramírez, 2010).

Desde la investigación en didáctica de las matemáticas se señala, por un lado, la importancia de que los propios docentes, como profesionales reflexivos (Ramos-Rodríguez et al., 2016) analicen, valoren y seleccionen los vídeos educativos más adecuados para su alumnado y por otro, la necesidad de diseñar e implementar experiencias formativas que permitan desarrollar los conocimientos y competencias para el análisis de la idoneidad de recursos educativos online en el profesorado (Beltrán-Pellicer et al., 2018; Burgos et al., 2020; Contreras, 2021; Santos, 2018). De hecho, existe una amplia literatura respecto al uso de vídeos para fomentar el desarrollo de la competencia reflexiva en la formación de profesores (Blomberg et al., 2013; Richter et al., 2022; Russell et al., 2022; Santagata y Yeh, 2014). En general, los resultados de las acciones formativas centradas en el uso de episodios de vídeo muestran que los participantes logran progresar en el tipo de reflexiones que realizan, mejoran su competencia para analizar la enseñanza de las matemáticas, aprenden a prestar más atención a los detalles del razonamiento matemático de los estudiantes y a interpretar (en lugar de simplemente describir) los fenómenos que transcurren en la experiencia.

En este trabajo, planteamos la necesidad de que los futuros profesores analicen la adecuación de vídeos educativos en línea de matemáticas de un tema en concreto, los porcentajes, y que a partir de tal análisis elaboren juicios razonados y sean capaces de concretar aspectos referentes a la gestión y uso de dicho recurso para aumentar la calidad del proceso de instrucción planificado. La valoración de los vídeos educativos se realiza por medio de los componentes y criterios de la idoneidad didáctica (Godino, 2013), entendida como el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo.

El artículo se estructura en los siguientes apartados: en la sección 2 se presenta el marco teórico y el problema específico de investigación, la sección 3 describe la metodología, incluyendo el diseño del proceso formativo experimentado y el análisis a priori de los vídeos educativos, la sección 4 muestra los resultados del análisis de los informes elaborados por los estudiantes para maestro sobre la idoneidad didáctica de los vídeos educativos y las propuestas de mejora. El trabajo concluye con la síntesis, implicaciones y limitaciones de la investigación.

2. Marco teórico y problema de investigación

La Teoría de la Idoneidad Didáctica surgió en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, 2013; Godino et al., 2007; Godino et al., 2006) para responder a la necesidad de contar con una teoría de diseño instruccional que oriente la reflexión global del profesor sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva.

La noción de idoneidad didáctica se entiende como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado, siendo el principal criterio la adaptación entre los significados personales construidos por los alumnos (aprendizaje) y los significados institucionales, ya sean pretendidos o implementados (enseñanza), considerando la influencia del entorno (Godino, 2013). Esto supone la articulación coherente de las distintas facetas implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas:

- La i*doneidad epistémica*, expresa el grado en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan a un significado de referencia (es decir, lo que las instituciones matemáticas y didácticas consideran el sistema de prácticas operativas y discursivas inherentes al mismo) en un determinado nivel educativo. Una alta idoneidad desde el punto de vista epistémico requiere la presencia de diversos significados interconectados del contenido correspondiente, la adecuación de las representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos que las sustentan.
- La i*doneidad cognitiva*, se refiere al grado en que los significados pretendidos (implementados) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad entre estos y los significados personales logrados con el proceso instruccional. Lograr un óptimo grado de idoneidad cognitiva, requiere que el contenido presentado tenga una dificultad manejable para el nivel educativo al que se dirige, así como que las situaciones propuestas abarquen distintos niveles de dificultad. Garantizar el logro de aprendizaje en todos los alumnos precisa de diversas estrategias de resolución y que se advierta a los alumnos de posibles dificultades y errores.
- Un alto grado de *idoneidad afectiva* requiere la presencia de elementos motivadores (ilustraciones, humor, ...), que las situaciones-problemas respondan a los intereses de los alumnos, a la vez que permitan valorar la utilidad del contenido. Se deben promover actitudes de perseverancia y compromiso hacia las matemáticas, en particular, la flexibilidad para

explorar ideas matemáticas y métodos alternativos en la resolución de problemas.

- Bajo el término *instruccional* englobamos los aspectos interaccionales y mediacionales del proceso de enseñanza y aprendizaje. Un alto grado de idoneidad *interaccional* implica que los modos de interacción permitan identificar y resolver conflictos de significado y favorezcan la autonomía en el aprendizaje. La idoneidad *mediacional* se relaciona con el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje; en particular, supone que la secuenciación de contenidos y actividades sea adecuada y se reserve espacio suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.
- Por último, el grado en que los contenidos y su desarrollo se corresponden con las directrices curriculares y estén relacionados con otros contenidos disciplinares, se vincula a la *idoneidad ecológica* del proceso instruccional.

Los criterios de idoneidad didáctica muestran consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas, por lo que funcionan de forma implícita como regularidades en el discurso de los profesores (Breda et al., 2018). Sin embargo, se observa que los docentes precisan de herramientas y formación específica para dirigir su atención hacia los múltiples e imbricados factores que condicionan los procesos de enseñanza-aprendizaje (Hummes et al., 2019).

Numerosas investigaciones en el campo de la formación de profesores han empleado el constructo idoneidad didáctica y su desglose operativo en componentes e indicadores como herramienta para desarrollar la competencia de análisis de los procesos de instrucción, reflexión y toma de decisiones fundamentadas (Alsina y Domingo, 2010; Breda et al., 2018; Esqué y Breda, 2021; Giacomone et al., 2018; Ramos y Font, 2008). Dado que la idoneidad didáctica también se puede aplicar para analizar aspectos parciales de los procesos instruccionales, como el planificado por medio de lecciones en libros de texto u otros recursos (Beltrán-Pellicer et al., 2018; Castillo et al., 2022), resulta conveniente que los profesores conozcan dicha herramienta y adquieran competencia para su uso en el análisis crítico de vídeos educativos disponibles en internet (Burgos et al., 2020).

Conscientes de que tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Bartell et al., 2013; Ben-Chaim et al., 2012; Berk et al., 2009), Burgos et al. (2020) llevaron a cabo una acción formativa con futuros maestros de educación primaria, orientada al desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de vídeos sobre proporcionalidad. En dicha investigación el instrumento de evaluación usado se centró únicamente en el contenido matemático. Los participantes debían valorar de forma cuantitativa cada uno de los componentes de la idoneidad epistémica, así como la adecuación global de un vídeo educativo sobre proporcionalidad. La mayoría de los futuros docentes, tras el proceso formativo aplicado, valoraron el grado de idoneidad epistémica del vídeo como alto en casi todos los componentes, a pesar de que, desde el punto de vista experto, su idoneidad era media. En este trabajo, que constituye el principal antecedente de nuestra investigación, los autores plantean el interés por considerar además de la faceta epistémica otros aspectos de la idoneidad didáctica que pueden ser objeto de análisis y reflexión por parte de los profesores que usen estos recursos didácticos.

Uno de los contenidos en relación con la proporcionalidad en el que tanto escolares como docentes muestran dificultades corresponde a los porcentajes. Para Parker y Leinhart (1995) el porcentaje es fundamentalmente un lenguaje privilegiado de proporciones que simplifica y condensa las descripciones de comparación multiplicativa, sin embargo, las reglas de cambio de decimales a fracciones y de fracciones a decimales han desplazado la esencia del porcentaje: la relación de proporcionalidad. Estudiantes y profesores, perciben el porcentaje como un signo que puede colocarse o eliminarse sin que afecte al significado de las operaciones involucradas y cuando resuelven problemas con porcentajes, tienden a manipular los numerales mediante reglas, reales o inventadas, por encima de los razonamientos (Parker y Leinhart, 1995). Estas consideraciones motivan que hayamos seleccionado vídeos educativos específicos sobre porcentajes para el diseño e implementación de la intervención formativa que describimos en este trabajo.

Así, el objetivo de esta investigación es diseñar, implementar y evaluar una acción formativa con estudiantes para maestro de educación primaria (en adelante, EPM) destinada a desarrollar su competencia para el análisis de la idoneidad didáctica de vídeos educativos sobre porcentajes. Entendemos que esta competencia supone tanto la valoración del grado de adecuación global del proceso de enseñanza-aprendizaje, como la identificación y propuesta de potenciales mejoras. Tomando en cuenta los resultados de Burgos et al. (2020), el instrumento de valoración de la idoneidad didáctica de los videos actual, incluye una apreciación cualitativa del grado de cumplimiento de los indicadores además de la valoración cuantitativa para los distintos componentes; considera las facetas cognitiva-afectiva e instruccional-ecológica, y finalmente, incluye la reflexión sobre posibles mejoras al recurso.

3. Metodología y contexto

En este trabajo, empleamos un enfoque metodológico específico de la ingeniería didáctica (Artigue, 1989) basado en la aplicación de herramientas teóricas del EOS (Godino et al., 2014). Además, se utiliza la metodología de análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para examinar los protocolos de respuesta de los estudiantes para maestro que intervinieron en la experiencia formativa.

3.1. *Contexto de aplicación*

La experiencia formativa se desarrolló en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del currículum en Educación Primaria durante el año lectivo 2019-2020, con 61 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria. Desde que comenzó el confinamiento, el grupo había seguido las clases de forma virtual a través de la plataforma Meet, siendo su profesora la primera autora de este trabajo. Uno de los contenidos de la asignatura es la evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, para lo que se propone el constructo idoneidad didáctica como herramienta teórico-metodológica.

3.2. *Diseño de la intervención formativa*

Antes de presentar la teoría de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores, como medio para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica docente o la de otros, se planteó a los EPM que visualizaran dos vídeos educativos[1] alojados en la página web de unPROFESOR[2], destinados a alumnos de 6º curso de primaria, como recurso educativo para el aprendizaje de los porcentajes durante el período de confinamiento debido al COVID-19.

En esta primera tarea (voluntaria) de diagnóstico, los EPM debían entregar a través de la plataforma Moodle de apoyo virtual a la docencia, un informe en el que indicasen brevemente qué les habían parecido los vídeos y si los recomendarían a sus alumnos de 6º de primaria. Se pretendía detectar el uso implícito de los criterios de idoneidad por parte de los participantes en sus reflexiones previas y analizar cómo influían en la valoración inicial de los recursos. Los resultados de este análisis aparecen recogidos en Burgos y Castillo (2021), donde se observa

1 Vídeo 1 https://www.unprofesor.com/matematicas/calcular-porcentaje-2801.html
Vídeo 2 https://www.unprofesor.com/matematicas/regla-del-3-para-sacar-porcentajes-2802.html

2 unPROFESOR ha colaborado con Clan TV/La 2 en una programación especial con contenidos educativos ante la falta de clases https://www.unprofesor.com

que si bien las valoraciones iniciales de los participantes muestran evidencias de indicadores de los componentes de la idoneidad didáctica (Breda et al., 2018), sus reflexiones son imprecisas o ambiguas; y hay componentes de las distintas facetas que no aparecen presentes (proposiciones) o lo están de forma muy escasa (relaciones, identificación de errores, adaptación al currículo, entre otras).

En la siguiente sesión de clase de dos horas de duración, se presentaron las características de la Teoría de Idoneidad Didáctica, se trató la cuestión de cómo se articulan entre sí las distintas dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica de un proceso de estudio determinado y se reflexionó sobre la necesidad de disponer de componentes e indicadores específicos que faciliten la valoración de la práctica docente de manera sistemática.

A continuación, se proporcionó a los estudiantes la siguiente consigna que constituye nuestro instrumento de recogida de datos:

Ahora se trata de que valores con unos criterios más detallados, la pertinencia del material que propone la maestra a sus alumnos. Para ello nos basamos en los criterios de idoneidad didáctica.

1. Suponiendo que la instrucción que pretende la maestra que reciban los alumnos se basa en ambos vídeos, completa las tablas de valoración (en su conjunto).

Aclaración: La columna de observaciones está pensada para que incluyáis aquello que os ayude a decidir sobre su idoneidad. En la columna de puntuación vamos a utilizar estas observaciones para valorar cuantitativamente la idoneidad en cada componente. Asignaremos 0, 1, 2 para expresar el grado de cumplimiento de cada indicador según el criterio:
0: No se cumple el indicador; 1: Se cumple parcialmente; 2: Se cumple totalmente.

En el caso de la presencia de errores, asignaremos:

0: Se cometen errores importantes que afectan al aprendizaje del contenido; 1: se cometen algunos errores, pero no afecta de forma significativa al aprendizaje del contenido; 2: No se comete ningún error.

2. Teniendo en cuenta lo que has observado y las puntuaciones asignadas, debes valorar como baja, media o alta la idoneidad del proceso de instrucción planteado a través del visionado de ambos vídeos. Justifica tu respuesta.
3. ¿Qué sugerencias le harías a la autora de los vídeos para su mejora?

3.3. *Análisis a priori de la idoneidad didáctica de los vídeos educativos*

El análisis y valoración *a priori* del proceso de instrucción planificado a través del visionado de los vídeos educativos, fue realizado de forma independiente por las investigadoras y confrontado después para decidir una valoración común, siguiendo los componentes e indicadores de la idoneidad didáctica en cada faceta. En función de estas observaciones se valora cuantitativamente el grado de idoneidad didáctica de ambos vídeos en conjunto, puntuándose cada indicador con 0, 1 o 2 puntos según su contribución a la idoneidad sea baja, media o alta, respectivamente. Por restricciones de espacio, nos limitamos a incluir en la Tabla I las puntuaciones consensuadas y asignadas por las investigadoras según sus análisis.

TABLA I
Valoración de la idoneidad didáctica según facetas y componentes

Faceta	*Componente*	*Puntuación*
	Situaciones - problema	0
	Lenguajes	1
	Conceptos	1
Epistémica	Proposiciones	0
	Procedimientos	1
	Argumentos	0
	Relaciones	0
	Presencia de errores	0
Cognitivo -	Aprendizaje	1
Afectiva	Actitudes	0
	Interacción docente - alumnos	0
Instruccional -	Calidad del recurso	1
Ecológica	Secuenciación	0
	Adaptación al currículo	1

Así, se puede considerar que la idoneidad didáctica del proceso de instrucción planificado a través de ambos vídeos educativos es baja, siendo algo mejor en los aspectos cognitivo-afectivo e instruccional-ecológico que en el epistémico.

4. Resultados

En esta sección evaluamos las respuestas dadas por los EPM a la consigna. En primer lugar, se presentan las valoraciones de tipo cualitativo (a través de las observaciones) y cuantitativo, analizando la correspondencia entre las primeras y las segundas según la valoración dada por el equipo investigador, luego de aplicar los criterios de idoneidad al recurso. A continuación, se analiza cómo toman en cuenta estas valoraciones para plantear mejoras posibles a los vídeos.

4.1. *Análisis de los vídeos educativos realizado por los EPM*

En la Tabla II se recogieron las frecuencias de las distintas puntuaciones dadas por los EPM con base en sus observaciones. Destacamos en negritas las que corresponden a las asignadas por las investigadoras. Como “otra” se consideran las frecuencias de puntuaciones que no se ajustaron a la pauta 0, 1, 2 establecida, por ejemplo, aquellas que valoraron con 3 puntos o las que no indicaron la puntuación a partir de las observaciones respecto de un determinado componente.

TABLA II
Frecuencias en la puntuación dada por los EPM a las distintas facetas y componentes

Facetas y componentes	*Frecuencia de puntuación (%)*			
	0	1	2	Otra
	Idoneidad epistémica			
Situaciones-problema	*12 (19.67)*	24 (39.34)	16 (26.23)	9 (14.75)
Lenguajes	2 (3.28)	*24 (39.34)*	24 (39.34)	11 (18.03)
Conceptos	11 (18.03)	*27 (44.26)*	13 (21.31)	10 (16.39)
Proposiciones	*6 (9.84)*	20 (32.79)	24 (39.34)	11 (18.03)
Procedimientos	4 (6.56)	*22 (36.07)*	30 (49.18)	5 (8.20)
Argumentos	*9 (14.75)*	19 (31.15)	27 (44.26)	6 (9.84)
Relaciones	*11 (18.03)*	37 (60.66)	5 (8.20)	8 (13.11)
Errores e imprecisiones	*5 (8.20)*	35 (57.38)	7 (11.48)	14 (22.95)
	Idoneidad cognitivo - afectiva			
Aprendizaje	7 (11.48)	*33 (54.10)*	11 (18.03)	10 (16.39)
Actitudes	*24 (39.34)*	18 (29.51)	8 (13.11)	11 (18.03)
	Idoneidad instruccional - ecológica			
Interacción docente-alumnos	*14 (22.95)*	20 (32.79)	15 (24.59)	12(19.67)
Calidad del recurso	8 (13.11)	*24 (39.34)*	24 (39.34)	5 (8.20)
Secuenciación	*13 (21.31)*	25 (40.98)	18 (29.51)	5 (8.20)
Adaptación al currículo	3 (4.92)	*39 (63.93)*	9 (14.75)	10 (16.39)

A continuación, describimos los tipos de observaciones que acompañan a la valoración cuantitativa otorgada por los EPM en cada uno de los componentes y facetas. Se presentan ejemplos prototípicos de las descripciones recogidas en los informes**.**

4.1.1. *Valoración de la idoneidad epistémica*

Un 26.23% de los EPM asignaron puntuación 2 en la componente situaciones-problema. Éstos consideran que se emplea una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los porcentajes. Por ejemplo, E21 señala que:

> Si se proponen diversas maneras de abordar el cálculo de porcentajes, ya que se dan ejemplos tanto de cómo calcular porcentajes sobre cantidades de 100 como de otra cantidad para que los alumnos puedan calcular porcentajes sobre cualquier total, además propone problemas representativos en los que a partir de una cantidad tendrán que transformarlo en una cantidad de 100 para hallar el porcentaje.

Aquellos que valoran con 1 (39.35%) o 0 puntos (19.67% coincidiendo con la valoración de las investigadoras) consideran que las situaciones no son suficientemente representativas. En efecto, en los vídeos no se emplea una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los porcentajes. En este sentido, E10 valora con 0 puntos el componente situaciones-problema después de observar que:

> Las situaciones propuestas son muy similares entre sí, en todas ellas falta el mismo valor y no permiten contextualizar los porcentajes. Se establece una forma mecánica de resolver las situaciones propuestas y se aplica de igual forma en todas ellas. No se muestran alternativas en la resolución de los problemas.

Otros estudiantes hacen referencia a la falta de representatividad de las situaciones, como por ejemplo E37, quien indica que "proporcionan algunas situaciones, pero no las más importantes y útiles (facturas, rebajas, escalas…)".

La mayoría de los EPM consideran que la pertinencia con relación al lenguaje es media (39.34%, coincidiendo con el equipo investigador) o alta (39.34%). Los que lo valoran con 2 puntos se basan en la diversidad de representaciones y el grado de adecuación para los alumnos. Las apreciaciones son similares a las de E38: "[…] distintos tipos de expresión en los ejercicios, simbólica, grafica, natural, con animación en forma de caritas y dibujos y tiene un lenguaje simple y adecuado para 6º de primaria".

Cuando asignan 1 punto, los EPM sugieren que, si bien el lenguaje es adecuado, la muestra no es suficientemente representativa (“lenguaje natural, sencillo para los alumnos, pero apenas otro tipo de lenguaje, tan solo algún dibujo en la explicación del primer vídeo”, E61) o bien que faltan traducciones de un registro a otro. Por ejemplo, E28 indica: “los tipos de representación de porcentajes empleados son el simbólico y a partir de representaciones gráficas (dibujos); también en una ocasión se emplea el fraccionario pero no se le ofrece importancia”.

Aquellos que han valorado con 0 puntos este componente, hacen referencia a que el lenguaje empleado no es adecuado al nivel educativo al que está destinado, mencionando aspectos de tipo interaccional. Por ejemplo, E15 indica que “ella misma [la autora del vídeo] duda de lo que dice o usa algunas expresiones técnicas y mal explicadas.”

El 44.26% de los EPM coinciden con el equipo investigador, al valorar el grado de idoneidad relativo a los conceptos como medio, argumentando que la definición del porcentaje es confusa o no suficientemente detallada. Por ejemplo, E30 indica “al comienzo del vídeo, no se explica con claridad el concepto de porcentaje, pero se apoya posteriormente con ejemplos para clarificarlo”. Por otro lado, la mayoría de los EPM (18.03%) que valoraron con 0 puntos este componente sustentan su valoración en que no se presta atención a la naturaleza proporcional del porcentaje. Por ejemplo, E57 apunta:

> Hace una breve descripción básica de qué es un porcentaje y directamente comienza a resolver un ejercicio. No da lugar a la identificación por parte de los alumnos a conceptos importantes. Para finalizar, no se define con claridad la naturaleza proporcional en el porcentaje. Directamente no se define.

En el componente proposiciones, la mayoría de los participantes de nuestro estudio (un 39.34%) asignaron 2 puntos y sólo seis EPM (9.84%) valoraron este componente con 0 puntos. En cualquier caso, las descripciones que acompañan a la puntuación se basan de forma general en que se cumpla (o no) el indicador, es decir: se presentan (o no) de manera clara y correcta, las proposiciones fundamentales sobre porcentajes, se adaptan (o no) al nivel educativo al que se dirigen y se presentan (o no) de forma clara la conexión con las magnitudes directamente proporcionales. Para algunos EPM que han valorado con 2 puntos este componente, la conexión con las magnitudes proporcionales viene establecida a través de la regla de tres. Este es el caso de E30:

> Se presentan de manera clara las proposiciones fundamentales de los porcentajes como la relación entre el número total y el 100%, el % a través de la regla de tres o la razón entre el porcentaje de una cantidad. Una conexión directa con magnitudes directamente proporcionales [..] se observa claramente en la regla de tres.

El 36.07% de los EPM coincidieron con las investigadoras al valorar con 1 punto el componente procedimientos, basándose en que los procedimientos no son suficientemente claros. Por ejemplo, E18 señala “se presentan de forma correcta los procedimientos fundamentales del cálculo con porcentajes para el nivel educativo correspondiente pero no de manera clara”. Otros apuntan como E8 a que “el primer vídeo usa la equivalencia de fracciones y porcentaje con dos pasos a seguir, un poco confusos al no explicar de manera clara la relación”. Los participantes que valoran con 2 puntos este componente, un 49.18% de ellos, afirmaron como E21 que “los procedimientos tanto de cálculo de porcentajes como la regla de tres se explican de manera clara y sencilla en diferentes situaciones”, o consideraron positiva la presencia de “trucos” como “el método de eliminar los ceros, para así simplificar la operación y verla más sencilla” (E39).

La mayoría de los participantes consideraron que las proposiciones y procedimientos relativas al uso y cálculo de porcentajes se justifican de forma adecuada al nivel educativo correspondiente. Sólo el 14.75% de los EPM valoraron con 0 puntos el componente argumentos, mencionando como E46 que “no se explican ni argumentan las proposiciones y procedimientos, sino que dice ‘esto es así y sí lo tenéis que aprender de memoria’”.

Sólo 11 (18.03%) EPM coinciden con las investigadoras en puntuar con 0 puntos el componente relaciones. Cuando lo hacen, identifican adecuadamente que sólo se establecen relaciones de los porcentajes con fracciones, sólo se identifica el porcentaje como relación parte-todo y la única relación de los porcentajes con la proporcionalidad se da mediante la regla de tres y de forma no clara. En el caso de los EPM que valoran con 1 punto, las descripciones hacen referencia a los mismos aspectos, sin embargo, la inclinación a juzgar como pertinencia media en lugar de baja se basa en que consideran que se han establecido las suficientes relaciones y que se identifican suficientes significados del porcentaje. Por ejemplo, E6 indica “se utilizan la mayoría de los significados de los porcentajes: número, fracción, número decimal, relación parte-todo y operador. Sin embargo, no se establece ninguna relación entre estos ni con la relación de proporcionalidad”.

Más de la mitad de los EPM asignan 1 punto al componente errores, considerando que se cometen algunos errores, pero que estos no afectan de forma significativa al aprendizaje del contenido. Por otro lado, cinco EPM (8.20%) asignan 0 puntos, por lo que asumen que estos errores sí afectan de forma significativa al aprendizaje.

En la tabla III se incluyen las categorías de errores indicados por los EPM en sus informes y la frecuencia según la clasificación establecida en la consigna. Dentro de los errores de tratamiento aritmético-algebraico, nueve EPM señalan un uso incorrecto del signo igual en expresiones como “10=100”, “12=100” y 11 EPM indican errores de tipo aritmético en el cálculo de multiplicaciones, divisiones o expresión de porcentajes como “20/100=20%”. Siete indican dentro de esta categoría imprecisiones referidas a la faceta interaccional, como “falta explicación” (E62) o que “se cometen errores de tratamiento aritmético –algebraico, ya que al explicar tan rápido desde mi punto de vista puede producir algunos errores en el alumnado” (E3).

TABLA III
Tipos y frecuencia de errores e imprecisiones indicados por los EPM

	Categorías de errores		*Frecuencia (%)*
De tratamiento aritmético - algebraico	Uso incorrecto del signo igual		9 (14.75)
	Errores aritméticos (multiplicación, división)		11(18.03)
	Otras (explicación inadecuada)		7(11.48)
		Total	27(44.26)
En las definiciones	Definición incorrecta de porcentaje		13(21.31)
	No precisa correctamente que es la regla de tres		10 (16.40)
	Ausencia de definiciones		17 (27.87)
	Definiciones ambiguas		11(18.03)
		Total	51 (83.61)
En proposiciones / procedimientos	Falta de detalle en procedimientos		18(29.51)
	Ausencia de conexiones / justificaciones		6(9.84)
		Total	24(39.34)
Otros	Faceta epistémica (situaciones, argumentos, lenguaje...)		11(18.03)
	Faceta cognitivo - afectiva		5 (8.20)
	Faceta instruccional	Interacción	11(18.03)
		Calidad del recurso	4(6.56)
		Secuenciación	4(6.56)
		Total	35 (57.38)

En la categoría de errores en definiciones, 13 EPM indican de manera expresa que la definición del porcentaje es inadecuada o incompleta. Por ejemplo, E1 indica:

> Creo que esta definición [la de porcentaje] puede causar un error al alumnado que puede confundir que el total siempre es cien aunque sea otra cantidad, y no comprenda por qué en un porcentaje se realiza la parte de 100 debido a que se realiza la proporción entre cien y la cantidad total.

Respecto a la ausencia de otros significados del porcentaje, E28 sugiere "al ofrecer una definición de porcentaje como relación parte-todo, limita la comprensión del alumnado únicamente a lo relacionado con dicho significado". Otros 10 EPM indican imprecisión en la determinación de qué es y para qué sirve la regla de tres o su vínculo con la relación de proporcionalidad ("la definición de la regla de tres es imprecisa cuando habla de calcular el cuarto dato con respecto al tercero", E37). Además 17 EPM indican de manera general que faltan definiciones o que son insuficientes y otros 11 EPM que éstas son confusas.

Como errores en proposiciones/procedimientos, 18 EPM indican que los procedimientos no están suficientemente detallados o no están claros del todo los pasos a seguir ("la profesora no explica con detenimiento los procedimientos a seguir en las resoluciones de los ejercicios", E7). Siete EPM indican expresamente que los procedimientos no están conectados y que faltan justificaciones para éstos ("tampoco explica de manera clara los procedimientos y proposiciones ni establece conexiones", E7). En particular, se menciona la falta de claridad y argumentación de la multiplicación en cruz en la aplicación de la regla de tres. Por ejemplo, E41 indica "en el segundo video hace los cálculos sin explicación ninguna. Solamente dice que la regla de 3 se hace multiplicando en cruz, hace las operaciones y pone el resultado."

Dentro de la categoría "otros", los EPM han incluido imprecisiones tanto en la faceta epistémica como en la cognitivo-afectiva e instruccional. En relación con la faceta epistémica incluyen en esta categoría la falta de argumentos (E21, "no se argumentan los procedimientos que se llevan a cabo para calcular porcentajes, ya que realiza las actividades de una forma mecánica"), la poca variedad de situaciones ("ejemplos muy simples e iguales", E25) o imprecisiones en el lenguaje. Entre los errores que corresponderían al aspecto cognitivo-afectivo, los EPM mencionan que no se advierte de posibles dificultades, se asume que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios, y que la presentación que hace la autora resulta "aburrida y repetitiva". Finalmente, como limitaciones de tipo instruccional, 11 EPM destacan que la exposición no está bien organizada, "algunas explicaciones son muy rápidas y pueden dar lugar a confusión" (E38), o que la autora persigue que los alumnos aprendan las rutinas de forma mecanizada sin reflexionar. Encontramos también referencias a la calidad del recurso (audio mejorable, carácter poco ameno) y a la secuenciación ("no se presenta la proporcionalidad directa", E8; "da por hecho situaciones no planteadas anteriormente", E59).

4.1.2. *Valoración de la idoneidad cognitivo - afectiva*

Como se parecía en la Tabla II, más de la mitad de los EPM coincidieron con el equipo investigador en valorar con 1 punto el componente aprendizajes, alegando que "faltan situaciones con mayor dificultad" (E61), o que no se emplean diversas estrategias ("en cada vídeo se utilizan las mismas estrategias", E30; "los dos ejercicios resueltos en el vídeo se resuelven de la misma manera por lo que no muestra situaciones con diferentes niveles de dificultad", E33). También señalan que todas las situaciones propuestas tienen el mismo nivel de complejidad ("que en este caso es un nivel bastante bajo", E10) aquellos que lo valoraron con 0 puntos. Por otro lado, los EPM que puntúan con 2 puntos (18.03%) indican de manera similar a E20: "los contenidos están adaptados al nivel educativo y se presentan diversas estrategias y niveles de complejidad".

También coincidieron con el equipo investigador la mayoría de los EPM al valorar la idoneidad afectiva como baja. Los EPM que puntúan con 0 o con 1 punto el componente actitudes concuerdan en que se plantean "situaciones muy similares que no promueven el interés" (E25), "no justifica la utilidad en la vida cotidiana, descuentos en rebajas, utilización de escalas en un mapa, etc." (E37), "no se fomenta la flexibilidad de resolución, sino que simplemente se enseña un método para resolverlos" (E44) ni la "búsqueda de métodos alternativos" (E62). Aquellos que, en cambio, la han valorado con 2 puntos, sostienen que el contenido es de interés y aplicabilidad a la vida cotidiana, así como que las ilustraciones son adecuadas para captar el interés de los alumnos.

4.1.3. *Valoración de la idoneidad instruccional - ecológica*

Teniendo en cuenta el tipo de proceso que se analiza, en el aspecto interaccional, los EPM deben observar si la autora hace una presentación clara y bien organizada, prestando especial atención a los conceptos fundamentales del tema, así como si usa diversos recursos argumentativos para captar la atención de los alumnos. Los EPM que valoran con 0 puntos (22.95%) puntualizan carencias en ambos aspectos, mientras que aquellos que puntúan con 1 punto sólo indican una de ellas (32.79%). Por ejemplo, E57 asigna 0 puntos tras observar: "no hay presente una introducción del tema a tratar, ni los conceptos clave [..]. No se utilizan diversos recursos para captar la atención, se basa en la enseñanza tradicional". En cambio, E34 lo valora con 1 punto argumentando que "el autor hace una introducción en la que explica brevemente los conceptos, pero no usa recursos argumentativos para captar la atención de los alumnos".

Como se deduce de la Tabla II, más de la mitad de los participantes han valorado la idoneidad de la calidad del recurso como media o baja, lo que atribuyen a que no se contemplan otros recursos a parte de la pizarra (“se utiliza únicamente una pizarra cuando se podría disponer de muchos más recursos visuales gracias a internet”, E9) o que la presentación es desordenada “la presentación audiovisual no es clara, en ocasiones ocupa espacios de otras actividades para realizar operaciones, no se distribuye adecuadamente la información en la pizarra, pretende abarcar muchas cosas en poco espacio” (E28).

En la valoración como de grado medio (40.98%) o bajo (21.31%) el componente temporal, los EPM consideran de forma pertinente que no se dedica tiempo a las explicaciones que deberían acompañar al contenido, ni a presentar las definiciones necesarias, o que el tiempo dedicado a todas las actividades es el mismo y no se incluyen actividades más complejas que precisarían de más tiempo. Algunos estudiantes especifican también que la explicación del procedimiento de regla de tres debería preceder al cálculo de porcentajes. Aquellos EPM que dan 2 puntos consideran contrariamente que la secuenciación es adecuada, dedica el tiempo suficiente a las distintas prácticas (“dedica tiempo incluso a la realización de operaciones secundarias, en vez de poner el resultado directamente”, E19) y más espacio a las actividades más complejas, en este caso, la regla de tres (“[..] gastando un poco más de tiempo en aquellas actividades con mayor complejidad como pueden ser las relacionadas con la regla de tres”, E2).

Finalmente, el 63.93% de los EPM asignan correctamente 1 punto a la componente adaptación al currículo, precisando que no se han tratado todos los contenidos curriculares correspondientes a porcentajes y su relación con la proporcionalidad. Por ejemplo, E8 apunta: “según el currículo tienen que dar: Porcentajes y proporcionalidad, relación con fracciones simples y complejas, aumentos, descuentos, proporcionalidad directa, regla de tres con la ley del doble, triple y mitad”. También sugieren como E37 que los porcentajes no aparecen relacionados con otros contenidos: “no hay relación con otras disciplinas, ni dentro de las matemáticas (geometría, probabilidad…) ni con otra ciencia (física…)”.

4.2. *Valoración global de la idoneidad didáctica*

A continuación, los EPM debían tener en cuenta el análisis previo en las distintas facetas y las puntuaciones asignadas, para valorar justificadamente como baja, media o alta la idoneidad global del proceso de instrucción planteado a través del visionado de ambos vídeos. En la Tabla IV se incluyen las categorías de valoración encontradas en los informes de los participantes y sus frecuencias.

TABLA IV
Valoraciones globales de la idoneidad didáctica y frecuencias (n=61)

Valoración global asignada por los EPM	*Frecuencia (%)*
Baja	14 (22.95)
Media-baja	6 (9.84)
Media	23 (37.70)
Media-alta	10 (16.39)
Alta	8 (13.11)

Al respecto, 39 de los 61 EPM (63.93%) basaron sus juicios en las descripciones y puntuaciones numéricas asignadas previamente según las distintas componentes e indicadores de idoneidad, y 33 de ellos hacen una valoración bastante pertinente, que compartían varios de los argumentos indicados por E21:

> Se podría afirmar que la idoneidad del proceso de instrucción planteado a través del visionado de ambos vídeos es baja.
>
> Observamos una idoneidad epistémica baja, ya que en general, se emplea de forma muy escasa una muestra de tareas que permiten contextualizar y aplicar porcentajes [..] De igual forma, se propone una única forma de abordar los problemas.
>
> Respecto al lenguaje, se emplean escasos tipos de expresión y representación […] En cuanto a los conceptos, no existen conceptos fundamentales sobre porcentajes. Excepto, al inicio del vídeo aparece una pequeña definición de porcentaje [..] aunque esta no es clara y mucho menos completa. Tampoco se define la naturaleza proporcional en el porcentaje, [..] ni siquiera la conexión con las magnitudes directamente proporcionales.
>
> Predominan los contenidos procedimentales. No obstante, estos no se abordan de forma muy clara y en ocasiones son confusos [..] fomentando en el alumno una reproducción mecánica de la resolución de problemas. Se puede apreciar una ausencia de argumentos y justificación de los mismos.
>
> Asimismo, en ninguna ocasión, se explica la utilidad del contenido […] ni menos aún se llevan a cabo relaciones explícitas con temas anteriores que se trabajan en esta unidad (fracciones equivalentes, proporcionalidad...). Se pueden contemplar además errores de tratamiento aritmético-algebraico, en las definiciones, procedimientos, entre otros.
>
> La idoneidad desde el punto de vista cognitivo y afectivo es en general también baja. No se promueven diversas estrategias, situaciones con diferentes

> niveles de dificultad ni se advierte a los alumnos de posibles errores y dificultades. No existen tareas de interés ni se proponen situaciones para que los alumnos exploren ideas matemáticas [..]
>
> Respecto a la idoneidad instruccional-ecológica, no existe una presentación clara y bien organizada, enfatizando los conceptos claves del tema, [..] no se usan recursos y materiales para captar la atención del alumno más allá de os dibujos e ilustraciones que podamos encontrar, [..] la posición del docente es continuamente cambiante realizando cuentas en cualquier lado de la pizarra, entre otros, por lo que no permite captar la atención de los alumnos.
>
> En cuanto a la secuenciación de contenidos y actividades, esa no es adecuada ya que, por ejemplo, explica la regla de tres después de haber explicado los porcentajes […]. Por último, los contenidos se adaptan al currículo, pero no se relacionan con otros contenidos disciplinares.

Los 22 EPM restantes (36.06%) no basaron su juicio en el análisis previo por lo que sus valoraciones no se pueden considerar pertinentes. Por ejemplo, se entiende no adecuada la valoración de E40:

> Creo que la valoración que le doy a ambos vídeos es una alta idoneidad debido a que en ellos se pueden comprender y entender de forma clara contenidos matemáticos, en este caso concretamente los porcentajes. Los alumnos pueden aprender y consultar dudas de una manera adecuada, cuando mejor les venga… los planteamientos de ejercicios y simbología son acertados porque son temas un tanto llamativos para los alumnos de educación primaria.

Este EPM basa su juicio en aspectos genéricos que no guardan relación con la valoración previa del recurso por medio los indicadores de idoneidad.

4.3. *Sugerencias de mejora*

El propósito final del análisis de la idoneidad didáctica es plantear posibles mejoras del proceso de instrucción diseñado o efectivamente implementado. Teniendo en cuenta las carencias que habían encontrado tras la visualización de los vídeos, se pedía a los EPM que sugiriesen posibles mejoras del recurso. Una puntuación de 0 o 1 en algún componente, supone que hay aspectos que mejorar para que se pueda considerar de una alta idoneidad (puntuación 2). En la Tabla V comparamos las frecuencias de EPM que asignaron puntuación 0-1 con aquellos que describen explícitamente sugerencias de mejora en las distintas componentes. En la última columna se incluyen las categorías más frecuentes de recomendaciones (clasificadas según facetas y componentes).

TABLA V
Sugerencias de mejora según componentes y sus frecuencias

Facetas y componentes	*Frecuencia (%) de EPM que asignan 0-1*	*Frecuencia (%) de EPM que sugieren mejora*	*Descripción de las sugerencias de mejora*
Idoneidad epistémica			
Situaciones-problema	36 (59.02)	25 (40.98)	− Incluir situaciones y tareas más variadas/significativas
			− Contextualizar los problemas, situaciones más cotidianas
			− Incluir diversas formas de resolución
Lenguajes	26 (42.62)	4 (6.56)	− Incluir representaciones más variadas (gráficas, tabulares, etc.)
Conceptos	38 (62.30)	26 (42.62)	− Incluir y explicar las definiciones clave de conceptos ausentes
			− Mejorar definición de porcentaje; incluir otros significados
Proposiciones	26 (42.62)	0 (0)	
Procedimientos	26 (42.62)	0 (0)	
Argumentos	38 (62.30)	13 (21.31)	− Justificar procedimientos (Explicar el por qué)
Relaciones	48 (78.69)	8 (13.11)	− Relacionar porcentajes con fracciones y decimales, conectar con magnitudes directamente proporcionales
Errores	40 (65.57)	0 (0)	
Idoneidad cognitiva-afectiva			
Aprendizaje	40 (65.57)	17 (27.87)	− Incluir actividades con distinto grado de dificultad
			− Advertir posibles errores

Actitudes	42 (68.85)	15 (24.59)	– Incluir ejemplos de interés/ situaciones más motivadoras – Incluir situaciones que promuevan la flexibilidad y reflexión en los alumnos
Idoneidad instruccional - ecológica			
Interacción	34 (55.74)	10 (16.39)	– Planificar y organizar el tema, mejorar la explicación/ comunicación
Calidad del recurso	32 (52.46)	29 (47.54)	– Formato más dinámico y ameno (más atractivo; recursos más innovadores) – Mejorar la presentación/gestión en la pizarra
Secuenciación	38 (62.30)	15 (24.59)	– Dedicar más tiempo a los contenidos más difíciles
Currículo	42 (68.85)	12 (19.67)	– Relacionar con otros contenidos/ Introducir temas transversales mostrar utilidad

Como se aprecia en la tabla V, a pesar de que todas las sugerencias propuestas son pertinentes, la frecuencia de EPM que no asignaron la máxima puntuación a los distintos componentes no coincide con la frecuencia de quienes precisaron recomendaciones a la autora de los videos, estando en ocasiones bastante alejada. Esto es especialmente notorio en la faceta epistémica, en la que fueron ampliamente puntuados con 0-1 procedimientos, proposiciones (ambos por un 42.62 % de los EPM) y errores (por un 65.57%), mientras que ningún EPM incluyó de manera explícita sugerencias de mejora al respecto. Tuvieron mayor éxito cuando propusieron mejoras en lo cognitivo-afectivo (aprendizajes, actitudes) e instruccional (calidad del recurso), donde, por otro lado, el número de indicadores a valorar es menor que en lo epistémico. Aun así, las sugerencias no son suficientemente específicas.

5. Síntesis e implicaciones

El objetivo de este trabajo ha sido describir los resultados de una acción formativa con EPM centrada en el desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica. Dada la repercusión y potencialidad del uso de lecciones de vídeo como método eficaz para el aprendizaje cuando la docencia presencial se ha visto limitada (Bullo, 2021), empleamos este recurso como medio de reflexión. Así, se pedía a los participantes que valorasen unos vídeos educativos en línea sobre porcentajes para alumnos de 6º curso de primaria que su maestra había recomendado visualizar durante el confinamiento. El análisis a priori del vídeo hecho por las investigadoras reveló carencias importantes en las distintas facetas de la idoneidad didáctica, siendo especialmente relevante aquellas detectadas en la faceta epistémica.

El instrumento de evaluación usado mejora el de Burgos et al. (2020), en tres aspectos. En primer lugar, junto con la valoración cuantitativa se solicita una descripción de las observaciones sobre los indicadores, aplicadas al contenido concreto, el porcentaje. Con esto, se pretendía evitar la variabilidad en la asignación de las puntuaciones que habían mostrado los participantes en dicha investigación. El que las valoraciones globales de la idoneidad didáctica que realizaron la mayoría de los EPM fuesen pertinentes (un 70.49% la consideraron entre baja y media) basando su juicio en la precisión sobre los indicadores de los distintas componentes y su puntuación previa, muestra que la adaptación en este sentido ayudó a obtener mejores resultados.

En segundo lugar, se incluyen aspectos de las facetas cognitivo-afectiva e instruccional-ecológica, adaptadas al tipo de recurso educativo que se analiza y que son susceptibles de ser evaluadas. Los EPM valoraron con éxito estas dimensiones; en concreto más de la mitad coincide con la valoración experta del componente aprendizajes, casi un 40% en el componente actitudes, un porcentaje similar en relación con la calidad del recurso, y un 64% en la adaptación curricular. En menor medida, en la calidad de exposición (sólo el 23%) y la secuenciación (21%), aspectos que deberán reforzarse en futuras implementaciones.

En tercer lugar, se incluye la toma de decisiones para la mejora del proceso instruccional planificado por medio de los vídeos. Se entiende que la reflexión debe abarcar describir la situación, interpretarla (justificar y evaluar las acciones) y, por último, formular estrategias de acción alternativas (Richter et al., 2022). Los resultados obtenidos muestran que, aunque las sugerencias de mejora indicadas son bastante oportunas, no todos los EPM que identifican carencias en los vídeos logran formular explícitamente cambios al recurso. Al respecto, el que la mayoría de los participantes consideraran que los errores no afectaban al aprendizaje de los alumnos (aunque un 44.26% encontraron algún error de tipo aritmético-algebraico y un 39.34% en proposiciones-procedimientos), pudo influir en que ninguno plantease una revisión de los desajustes encontrados como cambio necesario en el recurso.

Aprender a discernir los elementos relevantes en la enseñanza de las matemáticas para promover su aprendizaje (Groenwald y Llinares, 2022), por ejemplo, reconocer los significados de los objetos matemáticos implicados, establecer relaciones entre las potenciales dificultades de los alumnos y las estrategias que emplea el profesor para resolver los problemas, percibir la pertinencia del discurso matemático, de la argumentación empleada o la secuenciación de contenidos, es una tarea desafiante para los estudiantes para profesor (Humes et al., 2019). Resultados de investigaciones como las de Russell et al. (2022) indican que los profesores no se involucraban satisfactoriamente con las matemáticas de la lección que estaban analizando a través de los vídeos, y carecían de un discurso matemático profesional sobre los objetos matemáticos de la lección o la presencia de diferentes soluciones o representaciones.

La Teoría de la Idoneidad Didáctica y su desglose en componentes e indicadores observables (Godino, 2013) constituye un marco de referencia que permite orientar la reflexión sobre los procesos instruccionales. Los criterios de idoneidad didáctica ayudan a los profesores a expresar sus ideas en términos formales, empleando un lenguaje profesional, lo que se considera una evidencia de mejora en la competencia reflexiva por parte de los EPM. Sin embargo, esta reflexión requiere conocimientos didáctico-matemáticos sólidos, que no solo permitan "mirar profesionalmente" (Groenwald y Llinares, 2022) los elementos esenciales de las matemáticas al valorar el proceso instruccional en las distintas facetas (especialmente en la epistémica) sino, fundamentalmente para concretar aspectos de mejora. A la luz de los resultados de este trabajo, se requiere una formación específica en estos aspectos para que la competencia de análisis de la idoneidad didáctica, esto es, la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Godino et al., 2007) pueda ser plenamente desarrollada.

De cara a futuras investigaciones, sería necesario brindar a los futuros profesores espacios de interacción y discusión compartida, para negociar los significados y progresar en el uso pertinente de instrumentos conceptuales que les permitan interpretar y valorar la enseñanza de las matemáticas a través de procesos como los vídeos educativos en línea (Contreras, 2021), ofreciendo la posibilidad de que ellos adapten e implementen efectivamente los recursos didácticos en sus aulas (Russell et al., 2022).

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI /10.13039 / 501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Alsina, À., y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 7–32.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57–79.

Beltrán - Pellicer, P., Giacomone, B., y Burgos, M. (2018) Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación, 30*(4), 633–662. https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651

Ben - Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. (2012) *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. y Petzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 113–135. https://doi.org/10.1080/10986060903022714

Blomberg, G., Renkl, A., Sherin, M. G., Borko, H. y Seidel, T. (2013). Five research-based heuristics for using video in preservice teacher education. *Journal of Educational Research Online, 5*(1), 3–33.

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S. y Aguilar, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM, 48*(5), 589–610. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255–278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Bullo, M. (2021). Integration of video lessons to Grade-9 science learners amidst COVID-19 pandemic. *International Journal of Research Studies in Education, 10*(9), 67–75. https://doi.org/10.5861/ijrse.2021.670

Burgos, M. y Castillo, M. J. (2021). Criterios de idoneidad emitidos por futuros maestros de primaria en la valoración de vídeos educativos de matemáticas. *Uniciencia, 35*(2), 1–17. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.19

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Desarrollo de la competencia de análisis de idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas en futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía, 78*(275), 27–45. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa, 48*, e238787. https://doi.org/10.1590/S1678-esp

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Contreras, O. (2021). Construcción de conocimiento sobre la enseñanza de la matemática en estudiantes para profesores de matemática a través de vídeos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24*(1), 61–82. https://doi.org/10.12802/relime.21.2413

Dabbagh, B. y Kitsantas, A. (2012). Personal Learning Environments, social media, and self-regulated learning: A natural formula for connecting formal and informal learning. *The Internet and Higher Education, 12*(1)*, 3–8.* https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2011.06.002

Davies, R. S., Dean, D. L. y Ball, N. (2013). Flipping the classroom and instructional technology integration in a college-level information systems spreadsheet course. *Educational Technology Research and Development*, *61*(4), 563–580.

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, *35* (1), 38–54. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa, 44*, 1–21. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111–132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 117–150.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*, 167–200.

Groenwald, C. L. O. y Llinares, S. (2022). Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(2), e202202. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.29

Howard, E., Meehan, M. y Parnell, A. (2017). Live lectures or online videos: students' resource choices in a first-year university mathematics module. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(4), 530–553. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1387943

Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A. (2019). Combined use of the lesson study and didactic suitability for the development of reflection on the own practice in the training of mathematics teachers. *Acta Scientiae, 21*(1), 64–82. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968

Myllykoski, T. (2016). *Educational videos and use of tools in mathematics remedial instruction* [Tesis de maestría no publicada]. Tampere University of Technology. https://trepo.tuni.fi/bitstream/handle/123456789/23734/Myllykoski.pdf?sequence=3&isAllowed=y

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421–481.

Portugal, K. O., Arruda, S. D. M. y Passos, M. M. (2018). Free-choice teaching: how YouTube presents a new kind of teacher. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *17*(1), 183–199. https://reec.uvigo.es/volumenes/volumen17/REEC_17_1_9_ex1217.pdf

Ramírez, A. (2010). Youtube y el desarrollo de la competencia matemática. Resultados de una investigación cuasi-experimental. *Contextos Educativos*, *13*, 123–138.

Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 233–265.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2016). An approach to the notion of reflective teacher and its exemplification on mathematics education. *Systemic Practice and Action Research*, *30*(1), 85–102. https://link.springer.com/article/10.1007/s11213-016-9383-6

Richter, E., Hußner, I., Huang, Y., Richter, D. y Lazarides, R. (2022). Video-based reflection in teacher education: Comparing virtual reality and real classroom videos. *Computers & Education, 24*(3), 104601. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2022.104601

Russell, J. L., DiNapoil, J. y Murray, E. (2022). Documenting professional learning focused on implementing high-quality instructional materials in mathematics: the AIM–TRU learning cycle. *International Journal of STEM Education, 9*(46), 1–17. https://stemeducationjournal.springeropen.com/articles/10.1186/s40594-022-00362-y

Santagata, R. y Yeh, C. (2014). Learning to teach mathematics and to analyze teaching effectiveness: evidence from a video- and practice-based approach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(3), 491–514. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9263-2

Santos, J. A. (2018). *Valoración de vídeo tutoriales de matemáticas disponibles en internet. Nuevos instrumentos para el análisis de los procesos educativos* [Tesis de doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/tesis_Santos.pdf

Autoras

María Burgos. Universidad de Granada, España. mariaburgos@ugr.es

https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

María José Castillo. Universidad de Costa Rica, Costa Rica. mariajosecastilloc.24@gmail.com

https://orcid.org/0000-0002-8046-8927

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* es una revista científica indizada que busca diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, es decir, *relativos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático*, en escenarios y contextos diversos. *Publica cuatrimestralmente* artículos inéditos y arbitrados, con resultados originales de investigación científica en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores, docentes de Matemáticas y Ciencias, estudiantes de licenciatura y posgrado y tomadores de decisiones relacionados con el campo disciplinar.

La Relime es la publicación oficial de investigación del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (Clame)*, asociación científica y académica sin fines de lucro. Actualmente, la Relime se edita y pública desde la Ciudad de México, México.

Los objetivos de la Relime son:

- Ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa; sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
- Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe, y en el resto del mundo.
- Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
- Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
- Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

Las contribuciones enviadas a la Relime deben ser manuscritos originales (nuevo conocimiento) e inéditos (no haber sido publicados en ningún otro medio, ni estar en proceso de evaluación en otra revista), pertinentes y relevantes para la Matemática Educativa.

En cada número, la Relime publica una editorial y cuatro artículos con una política de acceso abierto vía diamante. Los artículos pueden ser:

- *Artículos de investigación empírica*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios clínicos o *in situ*.

- *Artículos de investigación documental*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios sobre el curriculum, libros de texto, historia de la educación, entre otros.
- *Ensayos teóricos y filosóficos*: Texto producto del estudio y la reflexión académica de un tópico de interés para la comunidad científica en Matemática Educativa.
- *Revisiones bibliográficas*: Estados del arte, delimitados, sobre tópicos especializados en nuestro campo disciplinar. La revisión debe contribuir en el entendimiento profundo del tópico y proporcionar un análisis académico y crítico sobre las aportaciones de la investigación, así como trazar una prospectiva original para su estudio.

Se reciben manuscritos dentro de los periodos: *1 de enero al 30 de junio*, y *1 de septiembre al 31 de octubre*. Estos deben presentarse en versión electrónica, vía correo electrónico a *editorial@relime.org*; deben ser de una extensión máxima de 9,000 palabras en su primer envío, sin excepciones, incluyendo cuadros, gráficas, referencias y anexos; tener una redacción clara, buena ortografía y una estructura coherente al tipo de artículo enviado.

Para más información sobre el formato de las contribuciones y las normas editoriales de la Relime, favor de visitar la página oficial de la revista *https://relime.org*

En este último número del vigésimo quinto volumen de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Relime*, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. A través de sus comentarios críticos nuestros revisores contribuyen no solamente a mantener la calidad de los manuscritos publicados sino al desarrollo de nuestra disciplina en un ambiente de pluralidad a fin de fortalecer la escuela latinoamericana.

EVALUADOR / A	INSTITUCIÓN, PAÍS
Adrián Gómez Árciga	Universidad Autónoma de Baja California, México
Agustín Grijalva	Universidad de Sonora, México
Alejandro S. González-Martín	Université de Montréal, Canada
Álvaro Sebastián Bustos Rubilar	Universidad de Valparaiso, Chile
Astrid Morales	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Audy Salcedo	Universidad Central de Venezuela, Venezuela
Carlos Valenzuela García	Universidad de Guadalajara, México
Cecilia Crespo Crespo	Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico, Argentina
Celi Lopes	Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Brasil
César Romero Félix	Universidad de Sonora, México
Claudia Gisela Espinosa Guía	Colegio Valle de Filadelfia, México
Claudia Regina Flores	Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil
Daysi García Cuellar	Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil
David Zaldívar	Universidad Autónoma de Coahuila, México
Diana Patricia Salgado	Universidad Nacional del Sur, Argentina
Diana Violeta Solares Pineda	Universidad Autónoma de Querétaro, México
Diana Torres	Instituto Tecnológico de Sonora, México
Edgar Alberto Guacaneme Suárez	Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
Edvonete Souza de Alencar	Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil
Eleazar Silvestre Castro	Universidad de Sonora, México
Eric Flores	Universidad Autónoma de Puebla, México
Erika García Torres	Universidad Autónoma de Querétaro, México
Gabriela Buendía	Investigadora independiente, México
Gloria Sánchez-Matamoros	Universidad de Sevilla, España
Guadalupe Lugo Armenta	Universidad de los Lagos, Chile
Guadalupe Simón	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México

Hélia Pinto	Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Leiria, Portugal
Jaime Huincahue	Universidad Católica del Maule, Chile
Javier Diez Palomar	Universidad de Barcelona, España
Javier García García	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Javier Lezama	Investigador independiente, México
Jéssica Lins	Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil
Jhony Alexander Villa-Ochoa	Universidad de Antioquia, México
Joana Mata-Pereira	Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal
João Pedro da Ponte	Universidade de Lisboa, Portugal
Jorge Gaona	Universidad de Playa Ancha, Chile
Jose Luis Cortina	UPN, México
Judith Hernández	Universidad Autónoma de Zacatecas, México
Kesia Ramires	Universidad Federal da Grande Dourados, Brasil
Liliana Suárez Téllez	IPN, México
Luis Fabián Gutiérrez-Fallas	Universidade de Costa Rica, Costa Rica
Luis Moreno Armella	Cinvestav – IPN, México
Manuel Joaquim Saraiva	Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal
María del Socorro García González	Universidad Autónoma de Guerero, México
Maria Helena Martinho	Universidade do Minho, Portugal
Maria Ivete Basniak	Universidade Estadual do Paraná, Brasil
Mario Caballero	Universidad del Valle de México, México
Milton Rosa	Pontificia Universidade Católica de Campinas, Brasil
Nuria Climent	Universidad de Huelva, España
Paulo Vilhena da Silva	Universidade Federal do Pará, Brasil
Pedro Huerta	Universidad de Valencia, España
Pedro Vidal-Szabó	Pontifica Universidad Católica de Valparaiso, Chile
Rebeca Flores	Unidad de Estudios de Posgrado de la Benemérica Escuela Normal Veracruzana, México
Rosa Mabel Licera	Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina
Samantha Quiroz	Universidad Autonoma de Coahuila, México
Silvia Ibarra	Universidad de Sonora, México
Verónica Díaz Quezada	Universidad de los Lagos, Chile
Verónica Molfino	Consejo de Formación en Educación, Uruguay
Verónica Vargas Alejo	Universidad de Guadalajara, México
Victor Larios	Universidad Autónoma de Querétaro, México
Zenia Yacir Testa Rodríguez	Consejo de Formación en Educación, Uruguay

VOLUMEN 0, 1997

Presentación de Relime / R. M. FARFÁN / La investigación en matemática educativa en la Reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior.

VOLUMEN 1, 1998

I. GUZMÁN / Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. L. RICO / Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. M. ARTIGUE / Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? F. CORDERO / El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones.

VOLUMEN 2, 1999

H. J. DE LEÓN / Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. V. A. LÓPEZ / Historia de los inicios de la enseñanza del cálculo infinitesimal en México: 1785-1867. L. D. MELGAREJO / Modelos para la representación y procesamiento del conocimiento pedagógico en tutoriales inteligentes. E. MORALES / Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de 9º grado de educación básica.

M. ANIDO, H. E. RUBIO / Un ejemplo de aprendizaje en el sentido de Polya. B. GÓMEZ / Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de “compañías”. C. RIZO, L. CAMPISTROUS / Estrategias de resolución de problemas en la escuela. L. RADFORD / La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica.

VOLUMEN 3, 2000

D. DENNIS, J. CONFREY / La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. B. D’AMORE, B. MARTINI / Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. E. DUBINSKY / De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. M. SIERRA, M. T. GONZÁLEZ, C. LÓPEZ / Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad.

Y. O’FARRILL / Sistema entrenador inteligente con tecnología multimedia. Óptima-Geometría. G. MUÑOZ / Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. M. B. FERNÁNDEZ / Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. C. CUBILLO, T.ORTEGA / Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las Matemáticas. M. F. LASALVIA, J. D. PIQUET / Construcción de gráficos de funciones: “Continuidad y prototipos”.

M. ACEVEDO, M. FALK / Formación del pensamiento algebraico de los docentes. R. CANTORAL, H. MIRÓN / Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. A. CAÑADA / Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de onda y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. B. D'AMORE / Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. P. FLORES, C. BATANERO, J. D. GODINO / Aplicación del análisis de textos mediante técnicas multivariantes al estudio del cambio de concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. G. GARCÍA, C. SERRANO / Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: El caso de la función.

VOLUMEN 4, 2001

O. L. LEÓN, D. I. CALDERÓN / Validación y argumentación de lo matemático en el aula. R. A. OLFOS / Entendiendo la clase de matemática. G. T. BAGNI / La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. R. ZAZKIS / Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes.

F. CORDERO / La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. J. GASCÓN / Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. J. LEZAMA, R. M. FARFÁN / Introducción al estudio de la reproducibilidad.

C. ACUÑA / Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA / Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. A. CAMACHO, M. AGUIRRE / Situación didáctica del concepto de límite infinito. M. R. OTERO, M. FANARO, I. ELICHIRIBEHETY / El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad.

VOLUMEN 5, 2002

A. CAMACHO / Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite. A. CASTAÑEDA / Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. G. MARTÍNEZ / Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. L. SIÑERIZ / La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos.

A. CONTRERAS, M. CONTRERAS, M. GARCÍA / Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. F. CORDERO, E. MIRANDA / El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. I. ELICHIRIBEHETY, M. R. OTERO, M. A. FANARO / Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. M. M. SOCAS / Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática.

C. DOLORES, G. ALARCÓN, D. F. ALBARRÁN / Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: El caso de la velocidad y la trayectoria. A. GARCIADIEGO / El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. T. ORTEGA, M. ORTIZ / Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula.

VOLUMEN 6, 2003

C. BROITMAN, H. ITZCOVICH, M. E. QUARANTA / La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. R. CANTORAL, R. M. FARFÁN / Matemática Educativa: Una visión de su evolución. M. C. PAPINI / Algunas explicaciones vigostkianas para los primeros aprendizajes del álgebra.

L. ANDRADE, P. PERRY, E. GUACANEME, F. FERNÁNDEZ / La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación? L. J. BLANCO, M. BARRANTES / Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. R. CANTORAL, E. RESÉNDIZ / El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar.

A. BERGÉ, C. SESSA / Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. K. BARBOSA / La enseñanza de inecuaciones con el punto de vista de la teoría APOE. D. E. MEEL / Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. B. D´AMORE / Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática.

VOLUMEN 7, 2004

G. T. BAGNI / Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. A. BRUNO, J. A. GARCÍA / Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. S. M. SEGURA / Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Y. SERRES / Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática.

P. AGUILAR, A. OKTAÇ / Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. M. FERNÁNDEZ, C. RONDERO / El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. L. RADFORD / Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. L. ORTIZ-FRANCO / Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica.

C. DOLORES / Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. M. E. QUARANTA, P. TARASOW / Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. M. E. VALDEMOROS / Lenguaje, fracciones y reparto.

VOLUMEN 8, 2005

C. ACUÑA / ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. M. MARCOLINI, J. PERALES / La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación Universitaria. H. PARRA / Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. F. PLUVINAGE / Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades.

C. CASTELA / A propósito de los conocimientos que no se enseñan explícitamente, empero necesarios para tener éxito en las matemáticas escolares. M. F. DELPRATO / Educación de adultos: ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos? L. DÍAZ / Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. S. GARBIN / ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. G. MARTÍNEZ / Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. G. MONTIEL / Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada.

C. BATANERO / Significados de la probabilidad en la educación secundaria. F. CORDERO / El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. C. CRESPO, R. M. FARFÁN / Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. M. FALSETTI, M. RODRÍGUEZ / Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿Qué perciben los alumnos? J. LEZAMA / Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. M. ROSA, D. CLARK / Las raíces históricas del programa Etnomatemáticas. B. D´AMORE / Oscar Reutersvärd.

VOLUMEN 9, 2006

E. APARICIO, R. CANTORAL / Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. A. BERGÉ / Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del conjunto de los números reales. A. CONTRERAS, L. ORDOÑEZ / Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. L. GARCÍA, C. AZCÁRATE, M. MORENO / Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. J. D. GODINO, V. FONT, A. CONTRERAS, M. WILHELMI / Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. M. R. OTERO, L. BANKS-LEITE / Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media.

S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA, S. N. GATICA, J. BENEGAS / Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. A. BRUNO, M. NODA, R. AGUILAR, C. GONZÁLEZ, L. MORENO, V. MUÑOZ / Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. G. BUENDÍA / Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. A. CASTAÑEDA / Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. O. PEREZ / ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? E. RUIZ, M. E. VALDEMOROS / Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina.

R. CANTORAL / ¿Publicar o perecer, o publicar y perecer? A. ALSINA i PASTELLS / ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. J. J. DÍAZ, V. BERMEJO / Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. U. MALASPINA / Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. C. R. MURO, P. CAMARENA, R. C. FLORES / Alcances de la Teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. M. L. RODRÍGUEZ, L. RICARDO / El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana.

VOLUMEN 11, 2008

R. CANTORAL / ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad? V. ABOITES, G. ABOITES / Filosofía de la matemática en el nivel medio superior. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO, J. GIMÉNEZ / Modelos matemáticos a través de proyectos. C. STENGER, K. WELLER, I. ARNON, E. DUBINSKY, D. VIDAKOVIC / A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. M. E. VALDEMOROS, E. F. RUIZ / El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos.

R. CANTORAL / El papel de las revistas especializadas en las agendas de investigación en Matemática Educativa. S. CASTILLO / Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A. MATOS, J. P. DA PONTE / O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. º ano. A. B. RAMOS, V. FONT / Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. G. SÁNCHEZ-MATAMOROS, M. GARCÍA, S. LLINARES / La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.

R. CANTORAL / En defensa de "lo nuestro". M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. J. GALLARDO, J. L. GONZÁLEZ, W. QUISPE / Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. G. SCHUBRING / Gauss e a tábua dos logaritmos. C. VALDIVÉ, S. GARBIN / Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

VOLUMEN 12, 2009

R. CANTORAL / Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). G. BUENDIA, A. ORDOÑEZ / El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. C. CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. U. T. JANKVIST / On empirical research in the field of using history in Mathematics Education. M. I. ROCHA, H. A. MENINO / Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos.

VOLUMEN 13, 2010

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2010

F. CORDERO, C. ÍMAZ, S. URSINI / Matemática Educativa en México. Aspectos sociales y cognitivos. G. BUENDÍA / Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. A. CAMACHO, B. SÁNCHEZ / Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Una socioepistemología de lo logarítmico. G. MONTIEL / Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. R. PULIDO / La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. E. RESÉNDIZ / El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación. C. ACUÑA / Las funciones figurales y epistémicas de los dibujos. J. A. LANDA / Acercamiento a funciones con dos variables. V. LARIOS, N. GONZÁLEZ / Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. A. LÓPEZ / Interpretación de estudiantes de bachillerato sobre la identidad de la variable en expresiones algebraicas. T. MENDOZA, D. BLOCK / El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. R. RODRÍGUEZ / Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2010

F. CORDERO, C. ÍMAZ, S. URSINI / Matemática Educativa en México. Aspectos sociales y cognitivos. C. DOLORES / El lenguaje variacional en el discurso de la información. A. GALLARDO, E. BASURTO / La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. G. MARTÍNEZ / Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. G. MUÑOZ / Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. J. G. SÁNCHEZ, S. URSINI / Actitudes hacia las matemáticas, género y tecnología: estudios con alumnos mexicanos de educación básica. L. SUÁREZ, F. CORDERO / Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. R. ÁVILA, S. IBARRA, A. GRIJALVA / El contexto y el significado de los objetos matemáticos. S. MOCHÓN / La relación del comportamiento del profesor con el avance cognitivo de los estudiantes al introducir un software educativo en el aula. A. OKTAÇ, M. TRIGUEROS / ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? C. RONDERO / Cálculo promedial. El caso de la media aritmética. E. SÁNCHEZ / Una jerarquía de razonamiento estadístico sobre la noción de predicción/incertidumbre elaborada con profesores de secundaria. M. VALDEMOROS / Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones.

VOLUMEN 14, 2011

R. CANTORAL / La Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa. G. GÁLVEZ, D. COSMELLI, L. CUBILLOS, P. LEGER, A. MENA, E. TANTER, X. FLORES, G. LUCI, S. MONTOYA, J. SOTO-ANDRADE / Estrategias cognitivas para el cálculo mental. L. RUIZ-HIGUERAS, F. J. GARCÍA / Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. J. DÍEZ-PALOMAR, J. M. MENÉNDEZ, M. CIVIL / Learning mathematics with adult learners: drawing from parents' perspective. M. C. RICOY, M. J. V. S. COUTO / As TIC no ensino secundário na matemática em Portugal: a perspectiva dos professores.

VOLUMEN 15, 2012

VOLUMEN 16, 2013

R. CANTORAL / Tendencias: Los métodos de investigación para profesionalización docente en matemáticas. N. CLIMENT, J. ROMERO, J. CARRILLO, M. C. MUÑOZ, L. C. CONTRERAS / ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?. A. ALVARADO, M. T. GONZÁLEZ / Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. E. ALONSO / Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. S. SANHUEZA, M. C. PENALVA, M. FRIZ / Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría.

R. CANTORAL / *Relime:* DOI y OJS. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO / Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. S. INZUNSA, J. V. JIMÉNEZ / Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. M. JARERO, E. APARICIO, L. SOSA / Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior. J. RUIZ, P. DÁVILA, J. ETXEBERRIA, J. SARASUA / Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005.

R. CANTORAL / El talón de Aquiles. L. ALBARRACÍN, N. GORGORIÓ / Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. A. M. OLLER, J. M. GAIRÍN / La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. J. PRIOR, G. TORREGROSA / Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. L. A. DE SOUZA, A. V. MARAFIOTI GARNICA / As matemáticas modernas: um ensaio sobre os modos de produção de significado ao(s) movimento(s) no ensino primário brasileiro.

VOLUMEN 17, 2014

R. CANTORAL / El quehacer del matemático educativo: el pasaje del *sujeto* a su *entorno*. I. M. ESCUDERO, J. M. GAVILÁN, G. SÁNCHEZ / Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. P. LEGER, G. GÁLVEZ, M. INOSTROZA, L. CUBILLOS, G. LUCI, E. TANTER, D. COSMELLI, J. SOTO / ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: características de su diseño y resultados preliminares. G. OBANDO, C. E. VASCO, L. C. ARBOLEDA / Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. S. E. PARADA, F. PLUVINAGE / Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: *Relme*, *Clame* y *Relime.* / J. JUSTIN, C. L. OLIVEIRA, L. MORENO / Registros de representação semiótica e geometría analítica: uma experiência com futuros professores. S. PALMAS, D. BLOCK / Acceso a la representación escrita de los números naturales: una secuencia didáctica para adultos de baja o nula escolaridad. H. J. RUIZ, Y. RIASCOS / ¿4^3 se puede leer como “cuatro subido a la tres”?: un estudio sobre las estrategias de construcción de la representación polinomial. C. SÁENZ, A. LEBRIJA / La formación continua del profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva para una enseñanza centrada en el aprendiz.

R. CANTORAL / No hay revista sin comunidad, ni comunidad sin diálogo. V. ALBANESE, F. J. PERALES / Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de la práctica artesanal soguera. C. FONSECA, J. GASCÓN, C. OLIVEIRA / Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. A. MORALES, F. CORDERO / La graficación-modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. F. VISEU, L. MENEZES / Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2014

A. KUZNIAK, P. R. RICHARD / Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. J. C. RAUSCHER, R. ADJIAGE / Espaces de travail et résolution d'un problème de modélisation. B. PARZYSZ / Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. A. BRACONNE / Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec et pour les futurs enseignants ? K. NIKOLANTONAKIS, L. VIVIER / Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve. S. COUTAT / Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? X. XISTOURI, D. PITTA, A. GAGATSIS / Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. P. MICHAEL, A. GAGATSIS / Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. E. MONTOYA, A. MENA, J. MENA / Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. I. ELIA, K. EVANGELOU, K. HADJITTOOULI, M. VAN DEN HEUVEL / A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2014

R. I. BARRERA / Un Espace de Travail Mathématique pour la mise en evidence des significations géométriques de la multiplication de nombres réels et complexes : mediation semiotique et parcours des élèves. A. GAGATSIS, E. DELIYIANNI / Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. V. CARRIÓN, F. PLUVINAGE / Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. D. TANGUAY, L. GEERAERTS / Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : Comment intégrer le travail avec les LGD ? M. TESSIER, P. R. RICHARD, N. LEDUC, M. GAGNON / Conception et analyse de geogebratutor, un système tutoriel intelligent : genèse d'un espace de travail géométrique idoine. M. BLOSSIER, P. R. RICHARD / Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. J. MITHALAL / Initier un processus de preuve mathématique dans un environnement de géométrie dynamique 3D. I. M. GÓMEZ, J. ESCRIBANO / Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. A. KUZNIAK / Travail mathématique et domaines mathématiques. S. R. DE COTRET / Espaces de travail / espaces de connaissances : Peut-on imaginer une navette pour y voyager ? D. ZALDÍVAR, C. CEN, E. BRICEÑO, M. MÉNDEZ, F. CORDERO / El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. O. FIGUERAS, P. FLORES, F. PLUVINAGE / La mediación docente y los espacios de trabajo matemático.

VOLUMEN 18, 2015

R. CANTORAL, G. MONTIEL, D. REYES-GASPERINI / El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. J. ARRIETA, L. DÍAZ / Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. A. MAZ-MACHADO, L. RICO / Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas en los siglos XVIII y XIX. L. SOLANILLA, A. CELI TAMAYO, G. A. PAREJA / Memoria sobre la emergencia de las funciones elípticas. V. H. G. DE SOUZA, R. NOGUEIRA DE LIMA, T. M. M. CAMPOS / A functional graphic approach to inequations.

P. PEÑA-RINCÓN, C. TAMAYO-OSORIO, A. PARRA / Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos. A. P. AIRES, H. CAMPOS, R. POÇAS / Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. B. D'AMORE, M. FANDIÑO, M. IORI, M. MATTEUZZI / Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". J. GARCÍA-GARCÍA, F. M. RODRÍGUEZ, C. NAVARRO / Las estrategias utilizadas por los niños *Tee Savi* en la resolución de problemas aritméticos. V. C. LLANOS, M. R. OTERO / La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un recorrido de estudio y de investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado.

P. VALERO, M. ANDRADE-MOLINA, A. MONTECINO / Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. G. A. MARMOLEJO, M. T. GONZÁLEZ / Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. A. MENA-LORCA, J. MENA-LORCA, E. MONTOYA-DELGADILLO, A. MORALES, M. PARRAGUEZ / El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. J. PEIXOTO / Gestos, sinais e esquemas de aprendizes surdos na multiplicação. E. A. SÁNCHEZ, A. L. GÓMEZ-BLANCARTE / La negociación de significado como proceso de aprendizaje: el caso de un programa de desarrollo profesional en la enseñanza de la estadística.

VOLUMEN 19, 2016

A. MÁRQUEZ, I. ORDORIKA, A. DÍAZ-BARRIGA, R. CANTORAL, W. DE VRIES / Consorcio Mexicano de Revistas de Investigación Educativa. P. ARTEAGA, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS, G. CAÑADAS / Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. M. J. CARVALHO, A. FREITAS / Nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência: um caso de estudo no ensino secundário português. M. POCHULU, V. FONT, M. RODRÍGUEZ / Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. R. RODRÍGUEZ, S. QUIROZ / El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

matemáticas: incidencia de la gravedad de las dificultades. A. BAROJAS, I. GARNICA / Comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos [17-21]: estudio de casos. S. ESTRELLA, R. OLFOS, S. MORALES, P. VIDAL / Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas.

VOLUMEN 21, 2018

R. CANTORAL / Educación comparada en América Latina. El caso de la educación alternativa en Oaxaca: Matemáticas y práctica social. / Y. T. HOFFMANN, D. A. COSTA / História da educação matemática: conservação da cultura escolar. R. RAMÍREZ, P. FLORES, I. RAMÍREZ / Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. M. RODRÍGUEZ, M. PARRAGUEZ, M. TRIGUEROS / Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2. A. ZAPATERA / Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje.

O. PÉREZ / La Matemática Educativa en Camagüey: incidencia social de un programa de maestría. H. ALVARADO, L. RETAMAL, S. ESTRELLA, M. GALINDO / Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. N. MARTÍNEZ P. R. GARZÓN, N. R. RODRÍGUEZ / Estrategias de los niños en la resolución de situaciones multiplicativas: reconocimiento y uso de unidades. V. ROJO, J. VILLARROEL, J. M. MADARIAGA / The affective domain in learning mathematics according to students' gender. G. SÁNCHEZ, M. MORENO, P. PÉREZ, M. L. CALLEJO / Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil.

M. PARRAGUEZ / Posgrado en didáctica de la matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: un multiproceso en búsqueda de la construcción ciudadana. L. ESPINOZA, A. VERGARA, D. VALENZUELA / Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. L. A. RAMOS, L. M. CASAS / Concepciones y creencias de los profesores de Honduras sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas. G. ESPINOZA, D. ZAKARYAN, J. CARRILLO / El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. C. BATANERO, M. M. GEA, P. ARTEAGA, J. M. CONTRERAS, C. DÍAZ / Conocimiento del contenido sobre correlación y regresión de futuros profesores.

VOLUMEN 22, 2019

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI, B. CASTRO, D. W. RÍOS / RELIME: Construcción, desarrollo y consolidación ¿A dónde nos dirigimos? / E. SANTANA, L. SERRAZINA, C. NUNES / Contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. E. GOMES, J. CERQUEIRA / A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática.

VOLUMEN 23, 2020

application. V. CASTILLO RIQUELME / Enseñanza de la estadística inferencial mediante una aplicación móvil.

R. CANTORAL / 2020. S. PASCUAL PIZARRO / Una secuencia didáctica para la enseñanza de la transformación lineal: Unificación de métodos y problemas, modelización y explicitación del aprendizaje. A. CASADIEGO CABRALES, K. AVENDAÑO CASADIEGO, G. CHÁVARRO MEDIA, G. AVENDAÑO CASADIEGO, L. X. GUEVARA SALAZAR, A. AVENDAÑO RODRÍGUEZ / Criterios de clasificación en niños de preescolar utilizando bloques lógicos. M. LAGUNA, D. BLOCK SEVILLA / Reconstrucción de situaciones didácticas de matemáticas en el aula. Un estudio en preescolar. A. MARTÍNEZ ZARZUELO, J. M. RODRÍGUEZ MANTILLA, E. ROANES LOZANO, M. J. FERNÁNDEZ DÍAZ / Efecto de Scratch en el aprendizaje de conceptos geométricos de futuros docentes de primaria.

VOLUMEN 24, 2021

R. CANTORAL / Notas sobre la publicación e inserción de posgraduados en Matemática Educativa. U. ESCOBAR DURÁN, F. TIRADO SEGURA / Pensamiento relacional en la escolarización de la jerarquía de operaciones y álgebra temprana en primaria. C. PESTANO, C. GONZÁLEZ, M. C. GIL / Analysis of the Critical Attitude of University Social Sciences Students Toward the Use of Computing Software. O. GUERRERO / Construcción de conocimiento sobre la enseñanza de la matemática en estudiantes para profesores de matemática a través de vídeos. M. MONTES, M. I. PASCUAL, N. CLIMENT / Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK.

R. CANTORAL / 23 Desafíos matemáticos "Debemos saber. Lo sabremos". Z. TAŞPINAR ŞENER, Y. DEDE / Mathematical modeling from the eyes of preservice teachers. L. SOLANILLA CHAVARRO, A. C. TAMAYO ACEVEDO / Anamnesis de la teoría de los indivisibles de Cavalieri. K. SEPÚLVEDA OBREQUE, J. LEZAMA ANDALÓN / Epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático escolar: un estudio de caso. M. C. NAYA-RIVERO, T. F. GÓMEZ-SÁNCHEZ, M. B. RUMBO-ARCAS, M. E. SEGADE-PAMPÍN / Estudio interregional comparado de la educación matemática en la formación inicial del profesorado de educación primaria.

R. CANTORAL / Revistas de corriente principal: Relime y JCR. A. BETANCUR SÁNCHEZ, S. ROA FUENTES, S. J. BALLESTEROS / Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. M. H. C. MARTÍNEZ DE LA MORA, U. XOLOCOTZIN ELIGIO, R. QUINTERO ZAZUETA / Las relaciones entre entidades componentes del valor posicional y su didáctica. C. PEAKE, V. ALARCÓN, V. HERRERA, K. MORALES / Desarrollo de la habilidad numérica inicial: aportes desde la psicología cognitiva a la educación matemática inicial. A. CAMACHO RÍOS / Función normativa de las prácticas asociadas a la construcción de templos antiguos.

VOLUMEN 25, 2022

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 25, Número 3

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Noviembre de 2022
Impresión bajo demanda