EDITORIAL

Identidad y visibilidad. El binomio ideal.
Relime en los índices nacionales, regionales y mundiales
Ricardo Cantoral, Daniela Reyes – Gasperini

ARTÍCULOS

The role of context and context familiarity on mathematics problems
Felipe J. Almuna Salgado

Intervención en dificultades de aprendizaje de las matemáticas: incidencia de la gravedad de las dificultades
Débora Areces, Marisol Cueli, Trinidad García, Celestino Rodríguez, Paloma González - Castro

Comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos [17-21]: estudio de casos
Andrea Barojas Gómez, Ignacio Garnica Dovala

Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas
Soledad Estrella, Raimundo Olfos, Sergio Morales, Pedro Vidal - Szabó

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

AGRADECIMIENTO A ÁRBITROS

CONTENIDO POR VOLÚMEN

RELIME 20-3

02003

9 771665 243002

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 20, Núm. 3, noviembre 2017

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 20, Núm. 3, 2017

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARÍA FARFÁN
Director Editorial: RICARDO CANTORAL
Editora Asociada: GISELA MONTIEL
Editora: DANIELA REYES

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Comité Científico

Luis Carlos Arboleda, *Universidad del Valle*, COLOMBIA • Abraham Arcavi, *Weizmann Institute*, ISRAEL • Michèle Artigue, *Université Paris 7*, FRANCE • Fernando Cajas, *Universidad de San Carlos*, GUATEMALA • Luis Campistrous, *Instituto Central de Ciencias Pedagógicas*, CUBA • Terezinha Carraher, *University of Oxford,* UNITED KINGDOM • Francisco Cordero, *Cinvestav*, MÉXICO • Bruno D´Amore, *Università di Bologna*, ITALIE • João Pedro da Ponte, *Universidade de Lisboa*, PORTUGAL • Ed Dubinsky, *Florida International University*, USA • Rosa María Farfán, *Cinvestav*, MÉXICO • Enrique Galindo, *Indiana University*, USA • Carlos Imaz †, *Cinvestav*, MÉXICO • Delia Lerner, *Universidad Nacional de Buenos Aires*, ARGENTINA • Luis Montejano, *Universidad Nacional Autónoma de México*, MÉXICO • León Olivé †, *Universidad Nacional Autónoma de México*, MÉXICO • Luis Radford, *Université Laurientenne*, CANADA • Luis Rico, *Universidad de Granada*, ESPAÑA • Ana Sierpinska, *Concordia University*, CANADA.

Comité de Redacción

Juan Antonio Alanís, *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey,* MÉXICO • David Block, *Cinvestav*, MÉXICO • Marcelo Borba, *Universidade Estadual Paulista en Rio Claro,* BRASIL • Gabriela Buendía, *Instituto Politécnico Nacional,* MÉXICO • Alberto Camacho, *Instituto Tecnológico de Chihuahua II*, MEXICO • Ida Ah Chee, *Faculty of Education The University of Hong Kong*, CHINA • Cecilia Crespo, *Instituto del Profesorado J. V. González*, ARGENTINA • Evangelina Díaz, *Universidad Nacional de Heredia,* COSTA RICA • Leonora Díaz, *Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación,* CHILE • Crisólogo Dolores, *Universidad Autónoma de Guerrero,* MÉXICO • Javier Lezama, *Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN,* MÉXICO • Maria Laura Magalhães, *Universidade Federal de Minas Gerais*, BRASIL • Gustavo Martínez, *Universidad Autónoma de Guerrero,* MÉXICO • Cristina Ochoviet, *Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores*, URUGUAY • Martín Socas, *Universidad de La Laguna,* ESPAÑA • Marta Valdemoros, *Cinvestav*, MÉXICO • Paola Valero, *Aalborg University,* DENMARK.

Coordinación técnica: Martha Maldonado Rosales
Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica; *Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 20, Núm. 3, noviembre, 2017. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2017 Impreso en México

Volumen 20 – Número 3 – 2017

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

DIRECCIÓN EDITORIAL:
R. CANTORAL, *CDMX, México*

EDITORA ASOCIADA:
G. MONTIEL, *CDMX, México*

EDITORA:
D. REYES, *CDMX, México*

DIRECTORA FUNDADORA:
R. M. FARFÁN, *CDMX, México*

COMITÉ CIENTÍFICO

L. C. ARBOLEDA, *Bogotá, Colombia*
A. ARCAVI, *Rehovot, Israel*
M. ARTIGUE, *París, Francia*
F. CAJAS, *San Carlos, Guatemala*
L. CAMPISTROUS, *La Habana, Cuba*
T. CARRAHER, *Oxford, Inglaterra*
F. CORDERO, *CDMX, México*
B. D´AMORE, *Bologna, Italia*
J. P. DA PONTE, *Lisboa, Portugal*
E. DUBINSKY, *Kent, EUA*
R. M. FARFÁN, *CDMX, México*
E. GALINDO, *Indiana, EUA*
C. ÍMAZ †, *Cuernavaca, México*
D. LERNER, *Buenos Aires, Argentina*
L. MONTEJANO, *Querétaro, México*
L. OLIVÉ †, *CDMX, México*
L. RADFORD, *Sudbury, Canadá*
L. RICO, *Granada, España*
A. SIERPINSKA, *Montreal, Canadá*

COMITÉ DE REDACCIÓN:

J. A. ALANÍS, *Monterrey, México*
D. BLOCK, *CDMX, México*
M. BORBA, *Río Claro, Brasil*
G. BUENDÍA, *CDMX, México*
A. CAMACHO, *Chihuahua, México*
I. A. CHEE, *Hong Kong, China*
C. CRESPO, *Buenos Aires, Argentina*
E. DÍAZ, *Heredia, Costa Rica*
L. DIAZ, *Santiago de Chile, Chile*
C. DOLORES, *Chilpancingo, México*
J. LEZAMA, *CDMX, México*
M. L. MAGALHÃES, *Belo Horizonte, Brasil*
G. MARTÍNEZ, *CDMX, México*
C. OCHOVIET, *Montevideo, Uruguay*
M. SOCAS, *La Laguna, España*
M. VALDEMOROS, *CDMX, México*
P. VALERO, *Aalborg, Denmark*

2017

Volumen 20 Número 3 Noviembre de 2017

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.clame.org.mx/relime.htm, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 20, Número 3, se terminó de imprimir en noviembre de 2017, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, CDMX.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Todos los artículos de la Relime están bajo la Licencia Creative Commons Reconocimiento - No Comercial (CC BY-NC 4.0) https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

EDITORIAL

IDENTIDAD Y VISIBILIDAD. EL BINOMIO IDEAL. RELIME EN LOS ÍNDICES NACIONALES, REGIONALES Y MUNDIALES

IDENTITY AND VISIBILITY THE IDEAL BINOMIAL. *RELIME ON NATIONAL, REGIONAL AND GLOBAL INDEXES*

RICARDO CANTORAL, DANIELA REYES – GASPERINI
Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN – México

En este vigésimo aniversario (Volumen 20, Número 3), cerramos con una editorial que se encuentra precedida por una variedad de acontecimientos positivamente relevantes como describimos a continuación. Por un lado, Relime tuvo un sensible incremento del factor de impacto en ISI Web of Science al alcanzar el 0.708 (Cantoral y Reyes – Gasperini, 2017). La invitación a Relime para participar en las actividades académicas del Congreso Nacional de Investigación Educativa en San Luis Potosí, México (COMIE – 2017). El rol de Relime como revista líder en la reunión de editores de El Colegio Mexiquense en Zinacantepec, Estado de México, México (Red de Editores – 2017). Las más recientes clasificaciones regionales que ubican a Relime al alza y para concluir con la reciente actualización del Índice Mexicano de Revistas – Conacyt, la cual nos ubica en el cuartil Q3, tanto en ISI WoS como en Scopus. En todos estos casos, gracias a la presencia de la Relime en los índices, se dan muestras claras de *visibilidad* y, sobre todo, debemos enfatizar que se logra sin perder el rasgo de *identidad* que le caracteriza (Cantoral, 2009).

RELIME EN EL ISI WOS

Presentamos a continuación algunas tablas y gráficas de la presencia y visibilidad nacional, regional y mundial de Relime.

CC BY NC
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (3): 255-264.
DOI: 10.12802/relime.17.2030

TABLA I

Países de Lengua Romance con revistas incluidas en el JCR del ISI WoS, SSCI en la sub disciplina de EDUCATION & EDUCATIONAL RESEARCH (Italia, España, Brasil y México).

1.	Comunicar	España	Q1	2.212
2.	Revista Educación	España	Q2	1.185
3.	Educación XXI	España	Q3	1.094
4.	**Relime**	**México**	**Q3**	**0.708**
5.	Enseñanza de las Ciencias	España	Q4	0.549
6.	Revista Española de Pedagogía	España	Q4	0.429
7.	Porta Linguarum	España	Q4	0.426
8.	Movimento	Brasil	Q4	0.247
9.	Cadmo	Italia	Q4	0.0

Algunos países, como Francia, Portugal, Argentina, Chile, Colombia, Cuba y Puerto Rico no tienen revistas incluidas en este índice en la sub disciplina descrita. Destaca la presencia de la revista *Comunicar* que, por su temática, está ubicada en el área de comunicación, más que específicamente de investigación educativa.

En este sentido, Relime se encuentra en el cuarto lugar de las publicaciones regionales en Educación e Investigación Educativa, a la vez que ocupa el primer lugar de las revistas latinoamericanas en investigación educativa incluidas en el WoS. Este ascenso se nota progresivamente en el curso de las evaluaciones que ha vivido en el Social Science Citation Index como se muestra a continuación.

TABLA II

Indicadores clave de Relime

Key Indicators

Year	Total Cites Graph	Journal Impact Factor Graph	Impact Factor Without Journal Self Cites Graph	5 Year Impact Factor Graph	Immediacy Index Graph	Citable Items Graph	Cited Half-Life Graph	Citing Half-Life Graph	Eigenfacto Score Graph	Article Influence Score Graph	% Articles in Citable Items Graph	Normalizec Eigenfacto Graph	Average JIF Percentile Graph
2016	79	0.708	0.708	0.590	0	8	Not ...	>10.0	0.00...	0.158	100.00	0.01...	27.447
2015	67	0.292	0.250	0.328	0.167	12	Not ...	>10.0	0.00...	0.063	100.00	0.00...	8.442
2014	46	0.400	0.400	0.361	0.250	12	Not ...	>10.0	0.00...	0.172	100.00	0.01...	22.545
2013	31	0.120	0.080	0.279	0	12	Not ...	>10.0	0.00...	0.028	100.00	0.00...	4.338
2012	9	0.125	0.041	Not ...	0	13	Not ...	8.2	0.00...	Not ...	100.00	Not ...	5.251
2011	5	0.167	0.041	Not ...	0	12	Not ...	9.9	0.00...	Not ...	100.00	Not ...	7.039
2010	6	0.083	0	Not ...	0	12	Not ...	8.9	0	Not ...	100.00	Not ...	4.076

BY-NC

En la Tabla III, se observa el ascenso progresivo en el número de citas y, en consecuencia, en el Factor de Impacto. Esto implica que su ubicación por cuartiles también suba, quedando por primera vez ubicada en el cuartil inmediato superior: Q3, pues más revistas quedan colocadas con un menor factor de impacto como se observa en la siguiente tabla.

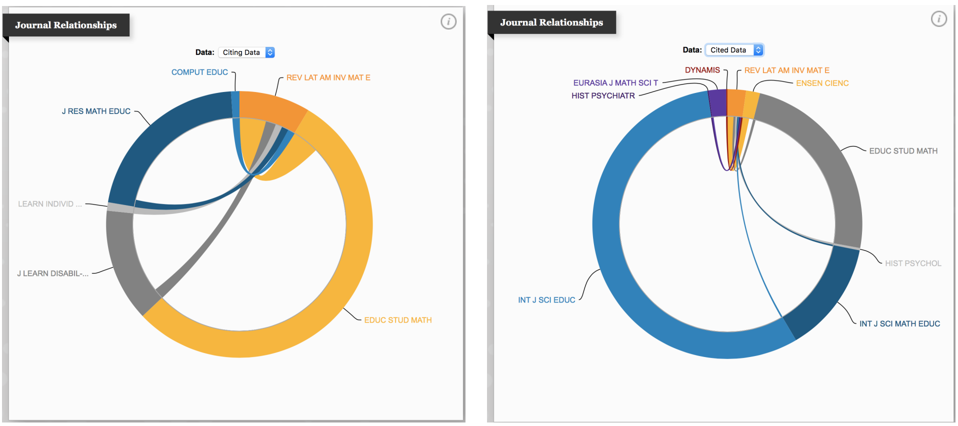
TABLA III
Journal Citation Report, Factor de impacto y Cuartil

JCR Impact Factor

JCR Year	EDUCATION & EDUCATIONAL RESEARCH		
	Rank	Quartile	JIF Percentile
2016	171/235	Q3	27.447
2015	212/231	Q4	8.442
2014	174/224	Q4	22.545
2013	210/219	Q4	4.338
2012	208/219	Q4	5.251
2011	192/206	Q4	7.039
2010	177/184	Q4	4.076

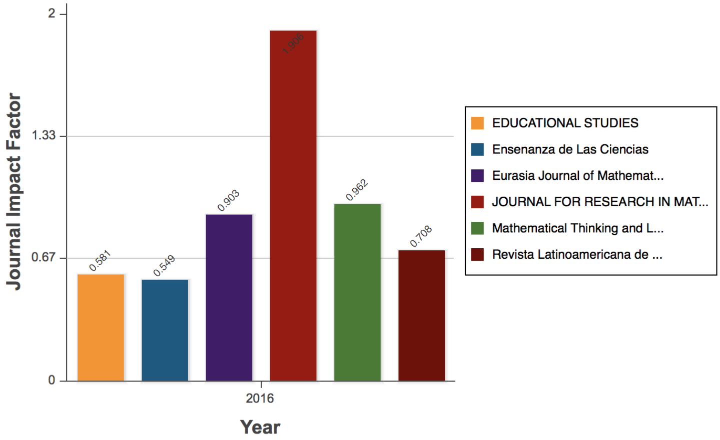
Como se puede observar de la Tabla III, en el año 2010, estando en cuartil Q4, sólo se tenía un factor de impacto mayor a 7 revistas del índice, ahora en el año 2016 tenemos un factor mayor que el de 64 revistas. Este ascenso es notable si consideramos el año inmediato anterior para el cual teníamos sólo 19 revistas en esta condición.

Gráfica 1



 BY-NC

TABLA IV
Comparativo del factor de impacto de las revistas de
Matemática Educativa en el ISI WoS



Respecto a nuestra comunidad de referencia, a nivel mundial, con base en el factor de impacto ubicamos el trabajo latinoamericano que publica Relime en el cuarto lugar internacional, sólo por debajo de revistas muy prestigiosas: Journal for Research in Mathematics Education, Mathematics Thinking and Learning y Euroasia Journal of Mathematics Science and Technology Education, pero sobre Enseñanza de las Ciencias y Educational Studies in Mathematics.

Una característica de las publicaciones regionales en Latinoamérica, España y Portugal es que suelen usar el índice SJR de Scopus para ponderar a las revistas de las Ciencias Sociales, pero no así en Ciencias Físico Matemáticas e Ingeniería o Médico Biológicas. Pensamos, en consecuencia, en el Congreso Nacional de Investigación Educativa que recientemente organizó el COMIE, mostrar algunos aspectos comparativos entre algunas publicaciones mexicanas incluidas en JCR y SJR.

La siguiente tabla permite repensar el asunto de cómo ampliar y robustecer nuestra comunidad de referencia. Idea clave para la vida plena de nuestras publicaciones.

TABLA V

Nombre	Wos + CyT	ISI WoS			Scopus			
		JCR	Eigenfactor	Citas	Cites Score	SJR	SNIP	H index
Rev. Lat. Inv. Mat. E.	Q3 + Q3	0.708	0.00014	79	0.12	0.134	0.419	5
Rev. Mex. Inv. Educ.	NA + Q2	NA	NA	NA	0.37	0.39	1.036	4
Perfiles Educativos	NA + Q4	NA	NA	NA	0.15	0.164	0.314	3
Rev. Iber. Educ. Sup.	NA + Q4	NA	NA	NA	0.19	0.136	0.087	2
Rev. Educ. Sup.	NA + CN	NA	NA	NA	0.09	0.115	0.090	NA
Trim. Económico	Q4 + Q4	0.102	0.00008	96	0.09	0.166	0.109	9
Rev. Mex. Astro. Ast.	Q4 + Q2	0.712	0.00186	677	1.95	0.127	0.792	21
Atmósfera	Q4 + Q3	0.673	0.00068	344	0.87	0.537	0.5	4
Rev. Mex. Física	Q4 + Q3	0.482	0.00068	651	0.54	0.229	0.556	20
Ann. Hepatology	Q4 + Q2	1.678	0.00295	136	1.56	0.646	0.642	43
Salud Pública Mex.	Q3 + Q2	1.253	0.00325	1792	1.08	0.828	0.903	44
Perf. Latinoam.	Q4 + Q4	0.324	0.00013	68	0.21	0.118	0.171	4
Rev. Mex. Sociologìa	NA + Q3	NA	NA	NA	0.47	0.198	1.187	5

Relime permite publicar en cuatro lenguas, pero no traduce los textos, estos quedan en el idioma en que los mande el autor y se buscan árbitros que hablen dicha lengua. En su mayoría, los escritos que llegan están en castellano, el siguiente grupo de artículos llega en portugués y finalmente el inglés. Llama la atención en la Tabla V, que Relime es la única revista que estando en Q3 dentro de ISI mantiene su posición en Scopus. En general dominan los ascensos del WoS al Scopus (pasan de Q3 a Q2 o de Q4 a Q2). Esto muestra que los índices no miden lo mismo, sus criterios valorativos se diferencian sensiblemente.

Debemos señalar finalmente, que los índices son oscilantes y se mueven como oscile la citación de la comunidad de referencia de cada revista. Estos pueden aumentar, si las revistas forman consorcios o buscan algún tipo de visibilidad aumentada, por ejemplo, que sus páginas de internet promuevan a las demás revistas que formen parte de los espacios de publicación de la comunidad autoral específica.

La identidad de Relime la garantiza que sigue siendo latinoamericana para analizar y coadyuvar a la región a la vez que contribuye al conocimiento internacional. Cada vez más, un artículo revisado a doble ciego, recibe más señalamientos de mejora. Consideramos que la presencia de la lengua es fundamental para ampliar dicha comunidad, pero es más importante aún que siga estudiando los problemas que su realidad le señala.

Como solemos decir, con Relime, la nao va …

San Luis Potosí, SLP.

 BY-NC

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. (2009). Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(2): 145 – 150.

Cantoral, R., Reyes – Gasperini, D. (2017). 0.708. Nuevo factor de impacto en WoS. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 20*(2): 133 – 136. DOI: 10.12802/relime.17.2020

BY-NC

Felipe J. Almuna Salgado

THE ROLE OF CONTEXT AND CONTEXT FAMILIARITY ON MATHEMATICS PROBLEMS

RESUMEN

La literatura en educación matemática promueve el uso de problemas matemáticos en diferentes contextos, y de ahí que en diferentes programas internacionales de estudios escolares de la asignatura de matemática han incorporado dicha recomendación. Un número de argumentos teóricos avalan el uso de contexto en problemas de matemáticos, sin embargo, la influencia del contexto y en especial el rol de la familiaridad del contexto en el rendimiento estudiantil es una problemática aún no entendida completamente. Después de una revisión de literatura se argumenta, en este artículo, que alrededor de noventa años de investigación del impacto del contexto de un problema matemático en el rendimiento estudiantil, nada concreto puede aún ser afirmado sobre esta relación; lo anterior, se debe a escasa evidencia en esta relación. Dado que el término contexto posee múltiples significados asociados, el artículo clarifica primeramente este término y lo diferencia de otros. Luego, argumentos teóricos y de investigación empírica son revisados en relación al rol del contexto y la familiaridad del contexto de un problema matemático en el rendimiento estudiantil.

PALABRAS CLAVE:

- *Contexto de un problema matemático*
- *Familiaridad del contexto*
- *Rendimiento estudiantil*

ABSTRACT

The mathematics education literature advocates the use of mathematics problems embedded in different contexts and therefore different mathematics curricula reflect this recommendation. A number of theoretical arguments support this, but the influence of context, and specifically the role of context familiarity, on students' performance is an issue that is not yet fully understood. After a literature review, it is argued in this paper that ninety - odd years of research on problem context and students' performance suggest that nothing firm can be said about this relationship, because evidence about this relationship is undeniably sparse. Given that context takes on a number of meanings in the literature, this paper starts by clarifying and differentiating this term from others. Then, theoretical arguments and empirical research are reviewed in relation to the role of context and context familiarity on students' performance.

KEY WORDS:

- *Mathematical problem context*
- *Context familiarity*
- *Students' performance*

CC BY NC

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (3): 265-292.
Recepción: Septiembre 26, 2016 / Aceptación: Octubre 28, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2031

RESUMO

A literatura sobre a educação de matemática defende o uso de problemas matemáticos incorporados em diferentes contextos e, portanto, vários currículos de matemática refletem esta recomendação. Uma série de argumentos teóricos suportam a afirmação anterior, mas a influência do contexto e, especificamente, o papel da familiaridade com o contexto sobre o desempenho dos alunos é uma questão que ainda não está totalmente compreendido. Depois de uma revisão da literatura, argumenta-se neste artigo que noventa e tantos anos de pesquisa sobre o contexto dos problemas e do desempenho dos estudantes sugerem que não podemos concluir nada decisivo sobre essa relação, porque a evidência sobre essa relação é inegavelmente escassa. Atendendo ao fato que contexto tem vários significados na literatura, este artigo começa por esclarecer e diferenciar este termo de outros. Em seguida, argumentos teóricos e pesquisas empíricas são analisados em relação ao papel do contexto e da familiaridade com o contexto sobre o desempenho dos alunos.

PALAVRAS CHAVE:

- *Contexto de problemas matemáticos*
- *Familiaridade com o contexto*
- *Desempenho dos alunos*

RÉSUMÉ

De récentes recherches en didactique des mathématiques semblent indiquer qu'il serait bénéfique d'inciter les élèves à travailler sur des problèmes mathématiques lorsque ceux-ci sont intégrés dans des contextes authentiques ; une recommandation conséquemment souvent miroitée dans les réformes curriculaires. Nombreux sont les arguments théoriques qui soutiennent ce point de vue, cependant l'influence du contexte, et plus précisément le rôle du degré de « familiarité » (des élèves) avec ledit contexte sur la performance reste floue et incertaine, un problème qui est adressé dans cet article. Je suggère ici de retracer les quelques dernières quatre - vingt dix années de recherche à ce sujet et proposer une définition plus approfondie des termes jusqu'alors employés dans ce domaine (en particulier celle de « contexte ») pour ensuite conduire une étude théorique et empirique afin d'étudier plus finement le rôle que joue le contexte d'un problème mathématique et le degré de familiarité dudit contexte perçu par les élèves sur leur rendement.

MOTS CLÉS:

- *Contexte d'un problème mathématique*
- *Degré de familiarité*
- *Rendement des élèves*

1. Introduction

The existing research in mathematics education recommends measuring how well students are able to apply their knowledge and mathematical skills and use them to solve mathematical problems embedded in meaningful contexts for students (Blum,

(cc) BY-NC

Galbraith & Niss, 2007). Thus, the incorporation of context in problems have been highly recommended by current reform documents and mathematics curricula around the globe (see for example, NCTM, 2011 and OECD, 2013) which started to develop new forms of connectedness of the instructional mathematical content by focussing on problem solving, applications and modelling on school mathematics.

The latter was not only because of the potential for "motivating students and for the meaningful development of new mathematics concepts and skills" (Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2010, p.138), but also to develop in students the capability to apply and communicate efficiently the mathematics they know in different real - world and everyday contexts (Blum, Galbraith & Niss, 2007; Boaler, 1993; Depaepe et al., 2010; OECD, 2013; Wedege, 1999). This is a major educational aim that continues being highlighted globally through curriculum documents (Galbraith, 2012).

Despite the frames for recommendations, the fact that the influence of context on students' performance in mathematical problems is a matter that cannot be disregarded in school mathematics is confirmed by ample research. For instance, De Lange (2007) examines the use of the real - world as a context for problems in international studies. After reviewing concerns expressed from researchers, this author concludes that:

> The influence of contexts should be studied much more systematically than is presently the case, and we researchers should refrain from strong statements that we have proven to be of disputable quality until we have firmer evidence (De Lange, 2007, p. 1120).

Additionally, factors affecting problems set in context, such as context familiarity of a problem, have been investigated as earlier as 1920s (e.g., Washburne & Osborne, 1926a, 1926b). In general, evidence is sparse. This may be because knowledge of the findings of individual studies (rather than the body of evidence) highlights that there is a lack of a firm body of convincing empirical evidence for the effects (in any direction) of the context of a problem on students' performance (Stacey, 2015).

In this vein, this paper represents an attempt to review and outline the existing literature related to the influence of problem context and problem context familiarity on students' performance. The purpose of this paper is therefore:

- to examine problem context definitions
- to examine arguments for embedding mathematical problems in contexts, and
- to identify and describe the influence and implications of students' context familiarity of a problem on students' performance.

 BY-NC

2. Problem context

Context is a term that takes a number of meanings in the mathematics education literature. For example, Bishop (1993) discusses a range of ways in which the term context is used, to describe different aspects of the learning environment. He suggests various layers of contextual influence that impinge on the student. Layers suggested by Bishop (1993) are, namely: the socio - political context in which learning is situated, the physical context of a mathematical activity and the socio and cultural context of the classroom. Although it is acknowledged that mathematical problems are embedded within a social context, and the influence of social contexts and how students' individual perception of a problem context on students' solutions cannot be denied, this paper is primarily concerned with the context in which a mathematical problem is embedded. For more information on these aspects see Busse (2011), Niss, Bruder, Planas, Turner, and Villa - Ochoa (2016), and Civil and Planas (2004).

Greatorex (2014) points out that problem context is a term that is particularly difficult to define. As a matter of fact, in the literature can be found several names and meanings for problem context. Terms such as: cover history[1] (Chapman, 2006; Fuchs, Fuchs, Hamlett & Appleton, 2002; Lewis & Mayer, 1987; Silver, 1981), thematic content[2] (Pollard & Evans, 1987; Ross, McCormick, & Krisak, 1986), content effects (Chipman, Marshall & Scott, 1991), situation[3] (OECD, 2013) and setting[4] are used as alternatives names for the term problem context on the research literature.

Given the plethora of names for problem context, Clarke and Helme (1996) use the term figurative context to define the context of a mathematical problem. They define figurative context as "the scenario where the task [problem] is encountered" (Clarke and Helme, 1996, p. 4) to clarify and distinguish it from the others terms stated above. Busse and Kaiser (2003) further refine the notion

---

1 This term was usually used in mathematics word - problems and problem solving.

2 This denomination is frequently employed in reasoning studies related to problem context.

3 This name is occasionally put to use when mathematical problems are embedded in real-world contexts.

4 *Situation* and *setting* are also used frequently when referring to context. For instance, within PISA mathematics, situation is used "alternatively as context" (Stacey, 2015, p. 74). However, according to the author of this paper, they relate to a different matter, particularly in the constructivism research and theories of situated learning. In this vein, *situations* are characterised by "social, physical, historical, and temporal aspects" (Roth, 1996, p. 491) under which students operate. On the other hand, the term *setting* is used specifically to refer the physical real-world sites in which human activities take place (Lave, 1988).

BY-NC

of figurative context by distinguishing between objective figurative context and subjective figurative context. According to these authors, the objective figurative context refers to “the description of the scenario given in the task [problem]” (Busse & Kaiser, 2003, p. 4) contrasting with the subjective figurative context associated to the “individual interpretation of the objective figurative context” (Busse & Kaiser, 2003, p. 4). According to these authors, the objective figurative context is “often implicitly meant by researchers when referring to the context” (Busse & Kaiser, 2003, p. 4).

However, it is considered by the author of this paper that the definition of objective figurative context, close to what researchers may intuitively call *context*, is limited. This is because, the objective figurative context, in the way it is stated, seems to draw only attention on what is described in a problem’s statement rather than on extra information that might be packed within the context in which a mathematical problem, which students may also need to decode sensibly when mathematising a problem.

The above stance relates to an issue of continuous debate within the Mathematics Education community; this issue connects to the value of the real - world when doing Mathematics. To some, Mathematics is a universal practice that emphasises (factual) content knowledge and procedural skills; from the latter, this position, context is used evidently as a mean to put it in practice. This author, however, focuses on the mathematical relevance of contexts to put in practice mathematical thinking for solving mathematical problems. That is to say, the attention is on the application and communication of mathematics in a variety of contexts in order to perceive the links and transfer between mathematical concepts and procedures, and the real - world. The latter position is taken, for example, by the OECD on its PISA frameworks for mathematical literacy.

To make sense of the above contention, consider the following example. A problem can be related to the estimation of the number of fans attending to a sold out rock concert taking place at a given rectangular field (see Table i below). The rock concert context of the problem is required to find the estimation of the number of people that can be accommodated per square metre. In this problem, context provides a chance to identify assumptions and constraints to use a mathematical model and validate the answer in relation to the context in which the problem is embedded. Of course, the above is a very precise example that highlights that what is described in a scenario of a given problem cannot always be regarded exclusively as problem context; there is information that surrounds an objective figurative context, which may be also used in the problem.

Therefore, and for the purpose of this paper, an operational definition bounding what problem context means is required. Thus, (problem) context has been defined previously as follows:

 BY-NC

> Context is the information that is contained and, at the same time surrounds the statement of a mathematical problem that needs to be mathematised. The containing and surrounding information might be necessary or unnecessary for the mathematisation of the problem, but is independent from the problem's syntax and stimulus (Almuna Salgado, 2016, p. 109).

In the above definition, problem's *syntax* refers to the problem's grammar structure whereas stimulus refers to the actual material about the problem that is presented to the student. While syntax encompasses words, stimulus can involve pictures, graphs, diagrams and formulas, or even to its physical and visual layout, and multimedia material. To clarify and exemplify the intended definition of context, consider the example provided in Table i below:

TABLE I
Problem context example

For a rock concert, a rectangular field of size 100 m by 50 m was reserved for the audience. The concert was completely sold out and the field was full with all the fans standing. Which one of the following is likely to be the best estimate of the total number of people attending the concert?
A 2 000
B 5 000
C 20 000
D 50 000
E 100 000
Source OECD (2006, p. 94)

In the example above, the context is related to a rock concert to be held in a rectangular field of size 100 m by 50 m with all the fans standing. Context involves aspects such as dimensions of the rectangular field, facilities for the crowd (e.g., inside or outside the rectangular field, emergency exists, etc.), and more general aspects of the concert including the purchasing of the tickets, and venue details (e.g., in a stadium). However, not all of them are necessary to mathematise this problem. In fact, only the lengths of the field (which are provided to students) and the density of the crowd in a rock concert are needed.

The estimation of a static crowd, in theory, is straightforward (i.e., area of the field multiplied by density of the crowd). The density rule for static crowd estimation[5] is that in a loose crowd the density is about 1 person/m^2, in a solid

[5] The American journalist, Herbert Jacobs, originally introduced this rule in 1967 when estimating the size of the crowd of the Berkeley riots. The court where students gathered to protest the Vietnam War was marked into grid squares, then "a simple way to estimate the crowd was to count the number of squares and estimate how many students were in each square on average" (Watson & Yip, 2011, p. 105).

crowd has about 2 persons/m^2 and very dense crowds have about 4 persons/m^2 (Watson & Yip, 2011). The problem requires students to make and relate their own estimation of the amount of area that a person would take up in such a type of concert in order to solve this problem. The clues *field was full, completely sold out* and *fans standing* are there to guide students in their estimation. The fact that this is a multiple - choice question further helps them. In the above example the words and the gramatical structure give the syntax, whereas the physical and visual layout (i.e., the set of words that is presented to the students) provide the stimulus.

Although it is acknowledged that mathematical problems are embedded within a social context, and the influence of social context on students solutions cannot be denied, this paper is primarily concerned with the context in which a mathematical problem is embedded.

2.1. *What are problems set in context? A general view*

A clear meaning of mathematical problems and ideas (not entirely within the mathematical world e.g., the idea of addition) in context is needed, because of their close relationship to the literature to be reviewed. In this manner, Galbraith (1987) establishes that mathematical problems embedded in contexts are often called applications. Generally, applications require a translation of the problem into a suitable representation to produce the problem comprehension, interpretation, and a mental representation of the problem. Then they require a formulation of a mathematical model, which is linked with that representation, and the successful choice and use of relevant mathematics involved in solving the problem. Taking the above into account, four different kinds of applications are distinguished in the literature, namely: (a) Word Problems, (b) Standard Applications problems, (c) Realistic Mathematics Education (RME) problems and (d) Modelling problems. These kinds of applications sometimes blur because of the degree of variation of context considerations to be incorporated and then required in the solution process of the application problems, but in the examination of their nature, there are fine distinctions that reveal essential differences among them. As Stillman and Galbraith (1998) explain correspondingly:

> Various intermediate stages exist between completely structured word problems and open modelling problems where the structuring must be supplied entirely by the modeller. One such stage involves contexts where the aim of the problem is well defined, where the problem is couched in everyday language, but where some additional mathematical information must

 BY-NC

> be inferred on account of the real world setting in which the problem is presented. This is a level between textbook word problems and modelling problems contextualised fully within real - life settings (p.158).

Word problems are often presented as applications of mathematics. They usually involved a question for finding a solution with a context added. They are just dressing up to purely mathematical problems in words trying to link them to a context real or imagined (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007). In word problems, context can act merely as a camouflage, because the intention of the writer or teacher is to practise, through word problems, mathematical concepts and ideas. Hence, the solving process consists only of the direct use of mathematics; hence word problems are a fixed procedure (a mathematical recipe approach) of translating mathematics and words. Example (1) in Table ii below is a pattern of a word problem.

TABLE II
Example of a word problem and a standard application problem

Type of applications	*Example*
Word problems	(1) Jim has 16 marbles and wins 10 more. How many does he have now? Source Van den Heuvel-Panhuizen (2005, p. 5).
Standard Applications	(2) A return train ticket to Sydney is $145.00. From next 1st of March, the price will be increased by 5%. What will be the new price of a return train ticket?

Example (1), from Table ii, is a problem involving marbles; context is not relevant to practise addition. Besides, as a matter of fact, if the word marble was blocked out, this problem still can be solved. Additionally, the context can be exchanged for another context without altering the demands of problem. To some extent different to word problems, standard applications problems are embedded in either real - world contexts. Nevertheless, standard application problems tends to “focus on the direction: mathematics → reality” (Blum, Galbraith & Niss, 2007, p. 10) and therefore they generally emphasises the mathematical concepts involved. In simple words, “with applications we are standing inside Mathematics looking out: Where can I use this particular piece of mathematical knowledge” (Blum, Galbraith & Niss, 2007, p. 10). They are characterised by the fact that the “appropriate [mathematical] model is immediately at hand” (Blum, Galbraith

& Niss, 2007, p. 12). The latter suggests that in standard applications, students need to be taught specifically about how a mathematical concept applies before practising it. Example (2) in Table ii above, provides an illustration of this kind of problems. The mathematical concept of percentages is embedded in a real life situation (the purchasing of travel tickets); the mathematical model to solve the problem is immediately at hand (145 x 1.05 = 152.5, therefore the new price is $152.50), extra information is not needed because it is widely assumed by the teacher that students know how to use a particular model in a range of contexts (i.e., the mathematical model has been taught to students for its relevance to everyday life). Hence, the context plays a secondary role, that is to say, the context is treated routinely because students have been taught how to use a particular piece of mathematics which fits into a predetermined model or technique.

Features of word problems and standard application problems referred previously indicated that context is a mere add-on to these categories of mathematical problems; this is because, context provides a conservative condition to put in practice mathematical knowledge within acknowledged mathematical models by students. This is not the case for Realistic Mathematics Education problems (RME) or modelling problems, which will be now reviewed. Within these sorts of application problems, context plays a central role in the solving process, although there is a degree of variation in which solving these problems requires different engagement with the context. This variation determines the differences between RME and modelling problems. In RME problems, contexts are required for students to develop understandings of mathematical concepts through 'educational modelling'. To accomplish the mathematical conceptual understandings in students, contexts must be rich in terms of mathematical organisation because in RME, contexts need to be mathematised (De Lange, 1999; Treffers, 1987; Van den Heuvel-Panhuizen, 1999) by students. Before proceeding, it is worth considering what is understood by mathematisation. Briefly and conventionally, the verb mathematising or the noun thereof mathematisation denotes organising reality using mathematics ideas and concepts (De Lange, 1999). Mathematisation is also referred in PISA documents as a mathematical competency which is related to the process of "transforming or interpreting a problem, a mathematical object or information in relation to the situation [context] presented into a mathematical form" (Turner, 2011, p. 4).

To make sense of the mathematisation process, in RME problems, it is important to acknowledge that two processes articulate it, namely: (i) horizontal and (ii) vertical mathematisation. The first, horizontal, is the process of going from the context to the mathematical world. It occurs when students use their informal strategies to describe and solve the problems. Horizontal mathematisation demands activities such as: identifying the specific mathematics in a general context, schematising, formulating and visualising the problem, discovering relations and regularities, recognising similarities in different problems (De

 BY-NC

Lange, 1999; Treffers, 1987). In contrast to horizontal mathematisation, vertical mathematisation arises within the mathematical world with the development of mathematical tools in order to solve a situation that requires to be mathematised. In this process, the students' informal strategies to solve the problems influenced students to solve them using mathematical language and tools (Treffers, 1987). As De Lange (1999) highlights, the process of vertical mathematisation can be recognised by the following activities: representing a relation in a formula, proving regularities, refining, combining, adjusting, and integrating mathematical models, and generalising. It is important to acknowledge that for mathematisation purposes reality is not conceived necessarily as a synonymous of the real - world. Instead, reality denotes that "the context of the problems is imaginable for students" (Van den Heuvel - Panhuizen, 2005). This implies that non real - world contexts can be suitable contexts for mathematical tasks [problems] as long as they are "real in the students' minds and they can experience them as real for themselves" (p. 2); this is because of the 'educational modelling' approach rather than for a practical purpose.

From the students' point of view, students' experience of reality consent a sense of problem's meaningfulness to them which assists students to learn, organise, and apply mathematics flexibly (Van den Heuvel - Panhuizen, 2005). This flexibility should not be understood superficially, instead it reflects the fact that mathematical problems can be solved in different ways rather than conducting a fixed procedure, in this manner the later then offers opportunities to students to develop high order reasoning through the mathematisation process (De Lange, 1999; Treffers, 1987).

Finally, it should be recognised that the related use of context in RME problems is dependent on how a real - world context can be inspiration of the learning of a mathematical concept or "for a mathematical theory or an application of it, or both" (Stacey, 2015, p.74). As De Lange (1999) acknowledges, in problems in context the mathematisation process varies according the complexity of a problem's demands.

To a certain extent different from RME problems, modelling problems tend to focus on the direction: real - world → mathematics rather than reality → mathematics as realistic mathematics problems do. Therefore, modelling problems generally highlight an interaction process between context and mathematics. In the formulation stage of these kind of problems, the students face a question situated in a real - word context, and then by trimming away gradually aspects of the real - word context a mathematical model must be formulated, solved, and interpreted (modelling process). Then, the proposed solution must be evaluated mathematically and in terms of the real - world context in which the problem is presented. Modelling (i.e., applied modelling) and RME problems (i.e., educational modelling) are reasonably analogous; they involve an entire process consisting of structuring, also working mathematically, interpreting, and validating (Blum, 2002). This can be explained by the fact that the aspiration of modelling problems are to "develop skills appropriate to obtaining a mathematically productive outcome for a problem with genuine real - world connections" (Galbraith, Stillman & Brown, 2006, p. 237). However, RME problems provide an alternative scenario for students to "learn mathematical concepts and structures that are relevant for the problem situation" (Van den Heuvel - Panhuizen, 2003, p. 13), where mathematical models are seen as vehicles to support progressive mathematisation (Treffers, 1987). The essence of modelling problems, which make them particularly unique in the spectrum of applications, is that, in simple words, [with modelling problems] "we are standing outside mathematics looking in: Where can I find some mathematics to help me with this problem?" (Blum, Galbraith & Niss, 2007, p. 10). Figure 2 below illustrates an example of a modelling problem. As described above, modelling problems highlights the process of students working through the problem in which interaction with the problem context, techniques as well as meta - knowledge are just as important as the result. Although in standard applications problems, a translation into a suitable mathematical representation of the problem statement is required (i.e., students have learned how to do this in context), modelling problems require much more; a real - world context needs to be trimmed away by the solver to recognise and employ mathematical relations and models in order to solve the problem in mathematical terms. Then, mathematical results need to be interpreted and validated with explicit reference to the context in order to produce a solution that addresses the problem in terms of the problem context. The latter is crucial to modelling problems.

Along this vein, in modelling problems students do not know either data or the mathematical model already. It has not been taught because the problem is not common or important enough in real life to teach all students. However, in modelling problems[6] the context, which is derived from the real - world, plays an important role because the either information (data) or mathematical model to solve the task is usually found in the problem context. To conclude, in modelling problems the context plays an important role because the information (data) to solve the problem is usually found in the problem context (Almuna Salgado, 2010). This reference to the context involves a purposeful interpretation of contexts in order to produce a relevant mathematical representation of the underlying problem and therefore a solution that addresses the problem, as exemplified in the problem presented in Table i.

[6] The characteristics of modelling problems offered in the above paragraphs are a very simplified interpretation of them. For a detailed insight into modelling, see for example Stillman (2002). She offers, among other insights, a comprehensive literature review of how modelling has been understood since its inception in different educational systems.

 CC BY-NC

While the importance of using mathematical problems in context seems to be well acknowledged, the “degree to which the context of a task [problem] affects students’ performance is widely underestimated” (Boaler, 1993, p. 13). Although Boaler made this statement more than twenty years ago, it has not lost its relevance; many issues remain to be resolved about the effects of problem context on students’ performance. These issues will be discussed along next sub-sections.

2.2. *Arguments for embedding mathematical problems in contexts*

The emphasis of the curriculum documents on problems in context can be furthered by a set of theoretical arguments for which context should be used in mathematics. These are:

- *The formative argument*
  The emphasis is put on the application of mathematics in context as a means for developing general competencies, attitudes, and skills orientated towards fostering creative and problem solving abilities as well as “open - mindedness, self - reliance, and confidence in their [students’] own powers” (Blum & Niss, 1991, p. 42).
- *The critical competence argument*
  This argument highlights the importance of preparing mathematically literate students to enable them to “see and judge independently, to recognise, understand, analyse, and assess representative examples of the uses of mathematics, including solutions to socially significant problems” (Blum & Niss, 1991, p. 43).
- *The utility argument*
  Problems in context may enhance the transfer of mathematics to other contexts. They may increase the chance of students applying mathematics that they had learned at school in other areas in later studies, everyday contexts or future employments. Mathematics is seen under this argument as a service subject or as a subject of instrumental interest (Helme, 1994). This argument relies on the assumption that the ability to use mathematics in context “does not result automatically from the mastering of pure mathematics but requires some degree of preparation and training” (Blum & Niss, 1991, p. 43).
- *The picture of mathematics argument*
  This argument stresses the importance of providing students with a rich and comprehensive picture of mathematics in all its facets, “as a science, as a field of activity in society and culture” (Blum & Niss, 1991, p, 43). That is to say, mathematics in context reflects the nature of mathematics as a human activity (Van den Heuvel - Panhuizen, 2005).

- *Promoting mathematical learning argument*
  This argument insists that mathematics in context is well suited to assist students in "acquiring, learning, and keeping mathematical concepts, notions, methods, and results, by providing motivation for and relevance of mathematical studies" (Blum & Niss, 1991, p, 44); contributing to train students who can think mathematically within and outside of mathematics.
- *The use of mathematics in real - worlds contexts argument*
  The use of contexts may assist in overcoming the common perception of mathematics as a "remote body of knowledge" (Boaler, 1993, p. 13) with no connection to the real - world. Mathematical problems in real - world contexts may allow students to understand the connection between mathematics and the real - world (Felton, 2010, p. 61) highlighting that mathematics has a relevant meaning in the real - world. Moreover, when assessing mathematics embedded in real - world contexts it allows students to "discover whether students have been well prepared mathematically for future challenges in life and work" (Stacey & Turner, 2015, p. 7).
- *The halo - effect argument*
  Last but not least, Pierce and Stacey (2006) show that some teachers use contexts that appeal to students (for example a problem about a dog) to improve students' attitude towards learning mathematics by associating the subject with pleasant things. This association of mathematics with pleasurable parts of students' lives is what Pierce and Stacey (2006) call the *halo - effect.*

3. The role of context on students' performance

Research studies in the field of cognition (Fiddick, Cosmides & Tooby, 2000; Marsh, Tood, & Gigerenzer, 2004) account in general that the contexts in which problems are embedded influence the strategies that "individuals choose to solve problems and the success of those strategies" (Leighton & Gokiert, 2005, p. 2). Cognitive experiments started to take place in the early 1970s. These experiments aimed to study the role of context in reasoning. They were stimulated mainly by the work of Piaget's theory of formal operations[7]. British psychologists Peter Wason and Philip Johnson - Laird devise an experiment on deductive reasoning

[7] According to Inhelder and Piaget (1958) at the age of 11 years old approximately, children gain the ability to think in an abstract manner, the ability to combine and classify pieces of information in a more sophisticated way, and the capacity for higher-order reasoning. Therefore, problem solvers should be guided by problem's logic, content and structure rather than problem's context.

 CC BY-NC

which is known today as the four - card problem (Johnson - Laird & Wason, 1970). The original experiment -and its later variations- show that people, when solving a problem in context, usually rely on some problem's contextual features (e.g., context familiarity) rather than abstracting from the content as suggested early by Piaget's theory of formal operations (Johnson - Laird & Wason, 1970).

At the broad - spectrum, the experiment conducted by the British researchers aimed to test people's deductive reasoning by applying the logic conditional rule (i.e., if… then) when following an introduced rule. In the original version of the experiment -presented in Table iii below- a problem involving whether or not cards which contained vowel / consonant letters printed on one side have odd / even numbers on the other side.

TABLE III
Example of the four - card problem

Here are four cards. You know that each has a number in one side and a letter on the other. The uppermost face of each card is like this:

A	D	4	7

The cards are supposed to be printed according the following rule: If a card has a vowel on one side, it has an even number on the other side. Which among the cards do you have to turn over to be sure that all four cards satisfy the rule?

Source Johnson-Laird & Wason (1970, p. 134)

Participants were presented with four cards, showing respectively A, D, 4, 7. It is known that every card has a letter on one side and a number on the other. Participants were then given the rule: *If a card has a vowel on one side, then it has an even number on the other side, and were told: Your task is to say which of the cards you need to turn over to find out whether the rule is true or false.* Out of 128 undergraduate university students, only five chose the two right cards (Johnson - Laird & Wason, 1970).

Due to the low frequency of correct answers, a later study examines the effects of adopting a more realistic appearance of the card problem. In this manner, Johnson - Laird, Legrenzi and Legrenzi (1972) decide to employ a different context, a postal context. At the time of the experiment, there were two rates for mailing envelopes -first and second class rates[8] - in England and Ireland. In this manner, researchers used the following rule in the experiment:

[8] At that time, if a person mails an envelope sealed it requires a first - class stamp, but if a person decides to mail the envelope unsealed then a second - class stamp was needed.

If a letter is sealed, it has a 50 Lire stamp on it. Then participants were asked to imagine themselves as post - office workers sorting letters; then five envelopes were presented to them and they were instructed to: *select those envelopes that you definitely need to turn over to find out whether or not they violate the rule.* This cognitive problem embedded in a realistic context resulted easier than the symbolic one, 22 out of 24 undergraduate university students at one university in London turned over the correct envelopes (Johnson - Laird et al., 1972). These authors then infer that the better rate of response in this problem compared to the four - card problem can be attributed to the postal context. They refer to the improvement in correct responses as the *thematic - materials effects.*

Some American researches in the 1980s questioned the reliability of this effect as no facilitation of correct response was observed in their replication experiments using context (Manktelow & Evans, 1979). One hypothesis for no such a replication of results could be the fact that participants were inexperienced with postal regulations. Hence, Griggs and Cox (1982) create a closer context version (see Table iv below) to their participants (one - hundred and forty undergraduate university students at one American university). Within this context, what needs to be checked is both the type of drink of the person who is under 19 years old and the age of the person who drinks beer.

TABLE IV

Example of a familiar context to the four - card problem

You are in charge of a party that is attended by people ranging in age. The party is being held in a state where the following law is enforced: *If you are under 21 you cannot drink alcohol.*

Under 19	Over 19	Drinking soda	Drinking beer

Of these four, who do you need to check in order to make sure that the law is not broken?

Source Griggs and Cox (1982).

The results on this experiment show that “74% of the participants made a correct selection of the drinking problem while no one did for the abstract problem” (Griggs & Cox, 1982, p. 415). The data also provides evidence that “participants’ extra - experimental experience has a significant impact on the performance on the Wason selection task [problem]” (Griggs & Cox, 1982, p. 501).

The results of the cognitive experiments presented do not show that human reasoning is not logical, but that the traditional logic is not a proper normative under certain conditions. Highlights on these well - designed and tested cognitive

 BY-NC

experiments show that context can aid or obstruct a solver getting the correct response. These experiments have the same logic structure, but they appear to be solved using different approaches. The original four - card experiment is a problem in pure logic; whereas the envelope and drinking versions of the original experiment may not be problems in pure logic. In the variations, the success of given the right answer has been shown to depend whether or not the context of the problem is familiarly meaningful to the solver. It seems that embedding the original problem in sufficient familiarity with the context, prevented participants from making the logical errors occurred in the four - card problem. For example, the drinking rule in Florida -the state from which the participants of the drinking - age problem took place- was well debated in 1980. At that year, this state in its general legislation raised the age of drinking from 18 to 19 years of age (for more information see The Florida Legislature Service Bureau, 1980). Hence, it can be inferred that undergraduate students had specific familiarity of the context to reason adequately about it.

The results of the above experiments do not suggest necessarily that students need to have familiarity with the context present in a mathematics problem. On the contrary, it can be suggested that the relevant question raised by the findings of these experiments is in line with the contemporary issue of embedding mathematics problems in context, that is to say: how context and context factors such as context familiarity, of a problem may influence students' performance? Some insights to this question have been made previously, although the next section offers more understandings on role of context familiarity on students' performance.

4. The role of context familiarity on students' performance

The effects of context familiarity on students' performance had been researched and reported as early as 1920s. In general, evidence is sparse and findings are inconclusive. This is because knowledge of the findings of individual studies highlights that there is a lack of a firm body of convincing empirical evidence for the effects (in any direction) of familiarity of the context of a problem on students' performance. Thus, this section represents an attempt to scrutinise a possible effect of context familiarity in the students' performance.

Whether performance in solving problems is affected by the familiarity of the context has been studied by many. One early classic study on familiarity was carried out by Washburne and Osborne (1926a,1926b) who report a two years research on the difficulties that students from Year 3 to Year 7 have when solving arithmetic problems. The study involved 23 American schools. The number of students tested in all the study varied from "three hundred to more than a thousand" (Washburne & Osborne, 1926a, p. 219). One of the difficulties studied was the effect of the unfamiliarity of the problem context, or with the materials with which the problem deals causing failure to solve the problem correctly. This aspect was studied in two schools by giving students across Year 3 and Year 7 ten arithmetic problems. The problems consisted in a pair of five problems with the same mathematical difficulty; one problem dealt with a less familiar situation or with less familiar materials than the other. The way in which the familiarity of the problems was determined was not stated. Presumably, the researchers classified familiar vs. unfamiliar contexts from their point of view.

Results indicated that in average, 80.5% of students in schools answered correctly problems embedded in more familiar context to students and 67.5% answered correctly the problems embedded in unfamiliar contexts. These authors conclude that unfamiliarity with materials and contexts is a small factor in causing difficulty with problem - solving, but unfamiliarity is not a large element as may be supposed (Washburne & Osborne, 1926a, 1926b).

At the beginning of research into the influence of familiarity of context on performance, there was conflicting evidence on this relationship. For example, Brownell and Stretch (1931) research whether the success in performance of Year 5 students in America (n=256) in solving the arithmetic of problems was conditioned by either the familiarity or lack of familiarity of the four contexts in which the problems were embedded. It should be noted that the original problem was in a context of boys scouts from which students needed to decode the expression to compute (i.e., $3 \cdot 34 - 91$) and the three remained presented students the arithmetic expression to compute but it was embedded in different contexts (i.e., soldiers cavalry, refining oil plant, and Hindu village). The variation in familiarity of the contexts presented to students was determined from the researchers' point of view. Students solved all of the four versions of the problem. Results indicated that significant increase in difficulty was observable as context familiarity decreased. Eighty percent of the students were unaffected by the changes in familiarity. This can be explained by the fact that students could have recognised the problems presented to them as similar, as they had to solve all the four versions, or by the fact that students were given the arithmetic expression to compute in the unfamiliar contexts. In any case, the conclusion of these researchers was that problems were not made unduly difficult for children by unfamiliar contexts.

Although, there were few studies between the 1930s and the 1960s investigating the effects of familiarity on performance (see for example, Post, 1958; Sutherland, 1942), one of them highlights in the merit of its conclusions. Lyda and Franzén (1945) in their study involving approximately two thousands

 BY-NC

Year 7 to Year 11 American students provide an interesting connection for the triad context familiarity, performance and students' age. These researchers find students' age as a major factor conditioning students' performance. Their findings suggested that as students developed in age -from Year 7 to Year 11, their performance in problems set in familiar / unfamiliar contexts "gradually diminishes for the obvious reason that the pupils [students] have the ability to see similarities between the situation [contexts] of the problem, those of other problems, and those they had in real life" (Lyda & Franzén, 1945, p. 295). These authors do not discuss the exact nature of this effect, although this can be explained by the fact that in their research they used arithmetic and algebraic problems in which procedural knowledge can be applied in different contexts from remembering methods and recognised when they needed to be applied.

The introduction of large - scale assessments in America and the new approaches to data analysis and interpretation have opened new potentials to revisit the study of context and its impact on performance from different perspectives. Hembree (1992), for example, conducts a meta - analysis of forty - four studies, involving Year 4 to undergraduate American students, in which the problem context differed in terms of (i) abstract (using symbolic or intangible subjects and objects) vs. concrete (involving a real situation and objects) contexts, (ii) factual (simply describing) vs. hypothetical (not only describing but using if-then statements to contemplate possible changes) contexts, (iii) familiar vs. unfamiliar contexts, and (iv) imaginative (using fantasy or unusual circumstances) vs. personalised (using the solver's own interests and characteristics to write the problem) while the corresponding mathematical structure remained constant.

The meta - analysis results show that better performance was statistically significant and most strongly associated with familiar contexts, whereas mean effects with borderline significance was associated in (i) and (ii) categories, and no context effects were found in category (iv) (Hembree, 1992).

However, in this meta - analysis from the forty - four studies analysed, only four of them (n=1608) corresponded to studies of standard mathematical problems embedded in familiar vs. unfamiliar contexts with students of Year 5, 6 and 12. However, theoretical considerations of familiarity were omitted in his meta - analysis which may suggest that changes in problem contexts (familiar vs. unfamiliar) could result in statistical significance difference of performance under certain statistical conditions.

The treatment of familiarity and its impact on statistical results is an issue that Chipman, Marshall, and Scott (1991) address in their research. In a careful design study, these authors analyse the way in which the context of problems might affect solving performance in undergraduate students (n=256) at one American university. Sixty-four algebra problems were embedded in four different contexts, namely: masculine, feminine, neutral familiarity and neutral unfamiliar. The

BY-NC

researchers test two hypotheses. One was that students' performance might be affected by contexts typed as appropriate for the opposite sex. No statistical support was found for this hypothesis.

The other hypothesis was that student's performance might be affected negatively by unfamiliar contexts. Students of both sexes were more likely to "omit problems of neutral but unfamiliar content and less likely to solve such problems correctly" (Chipman et al., 1991, p. 910). This hypothesis was supported statistically, but small in magnitude. Hence, context familiarity assisted in the performance of both genders. As the authors report, the result was obtained in an experiment (n_1=128) in which the problems' context familiarity was controlled, hence they can attribute this result to context.

Along with these hypotheses and results, these researchers carried out a preliminary rating study on two variables under study (i) sex stereotype of the context and (ii) personal familiarity of the context. This was done primarily in order to guide the construction of the sixty - four problems. Nevertheless, when analysing the results of the rating study on familiarity, researchers realise that students' judgements on context familiarity seemed to measure familiarity of the underlying problem structure (i.e., problem familiarity) rather than context familiarity. Therefore, in factoring context - familiarity out the problem, Chipman et al. (1991) find that problem familiarity might strengthen the problem difficulty and hence, students' performance.

The exact nature of this effect is not discussed explicitly by these authors, but it can be inferred from their work that a familiar problem structure might induce well establish solving routines, which can account for producing correct solutions; consequently, these two different types of familiarity / unfamiliarity need to be distinguished at all times.

The literature that relates real - world problems and the students' performance also support the positive effects of problems set in familiar contexts. Empirical studies such as those by Cooper and Dunne (1998) and Carraher, Carraher and Schliemann (1985, 1987) that show that students' socioeconomic background can influence students' activation of the real - world knowledge, and hence the use of the context familiarity, when they solve mathematical problems set in a more realistic or a real - world context. It seems that activation of real - world knowledge in such socioeconomic disadvantage students (e.g., street sellers) dealing with familiar contexts in a direct mathematical experience appears to be as supportive of effective problem solving. These students have presented to exhibit more advance mathematical reasoning as well as better performance.

A seminal couple of studies in this area are: Mathematics in the streets and in the schools (Carraher et al., 1985) and Written and oral mathematics (Carraher et al., 1987). In Carraher at al. (1985) study, young Brazilian street sellers (n=5, aged 9 to 15 years old) performance on mathematical problem presented in real

 BY-NC

- life contexts was greater to that on school - type mathematical problems and on context - free computational problems involving the identical numbers and operations. From this study, Carraher at al. (1985) infer that students might benefit from contexts designed to activate real - world knowledge.

Based on the findings and the hypothesis above, Carraher et al. (1987) conduct a follow - up study with 16 Brazilian Year 3 students. Three sets of arithmetic problems were given to students, but embedded in three different contexts, namely: (i) in a simulated store situation in which students played either the role of the store owner or the customer, (ii) embedded in a standard application word exercise, and (iii) in symbolic computation exercises. In that way, Carraher, et al. (1987) find that Brazilian students showed significant differences in performance when they solved simulated store contexts (outside school contexts, usually presented in verbal form), than problems inside school contexts presented in written form, and symbolic computation exercises.

Results confirmed that students performed better in solving store problems than in solving symbolic computation exercises; the average difference in facility being about 20% between store problems and symbolic computation ones. Finally, differences in the way students approached the altered problems versions were also detected by the researches because in the stimulated store contexts students had to deal with money (a concrete real - world construct), which changed the arithmetic demand of the problems. In that case, Carraher, et al. (1987) suggest that embedding problems in contextualised real - world contexts can be meaningful for students due to the activation of real - world knowledge facilitates problem's accessibility, hence it can lead them to a greater performance.

Some studies tried to replicate the above finding; however, it was found that students did not normally performed better on mathematical problems embedded in real - world contexts, which conflicted with the findings reviewed in the above paragraphs. For instance, Baranes, Perry, and Stigler (1989) intend to replicate Carraher et al. (1987)'s findings with Year 3 American students. Baranes et al. (1989) find that no contextual effects were found in either performance or strategy use for success with the American sample (n=18); that is to say, the students did not generally activate their real - world knwoledge and representation of it in the solution of the problems. Participating students in this research activated their real - world knowledge in some specific cases. It took place when numbers used in the word problems presented to them made it possible to induce students to stimulate knowledge of "a culturally constituted system of quantification, such as money" (Baranes et al., 1989, p. 316).

McNeil, Uttal, Jarvin and Sternberg (2009) acknowledge that although the results of the study above differed from the findings of Carraher et al. (1985, 1987), the results do correspond with other research (Carpenter, Lindquist, Matthews & Silver, 1983; Verschaffel, De Corte & Greer, 2000; Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994; Yoshida, Verschaffel & De Corte, 1997) in terms of students' activation of the real - world knowledge. The above body of replication studies highlight overall that students show difficulties in activating their real - world knowledge and it has been found that students do not normally performed better on mathematical problems embedded in real - world contexts. Nonetheless, this can be explained probably by the fact that students in those studies did not work as street sellers and almost certainly had more consistent schooling than the Brazilian students that Carraher and colleagues' studies had. However, some empirical research evidence points out that familiarity of the context may be associated with either negative or neutral impact on students' performance. For instance, Helme (1994) investigates the impact of context familiarity on the responses of nine adult women students (full - time - return - to - study program at a vocational education and training provider) to eighteen mathematical problems in six different content areas. Findings reveal that students did not perform better on more familiar problems to them, on average than problems without context or problems set in unfamiliar contexts. Helme (1994) accounts that individual differences -such as language barriers and individual performance on specific problems- overshadowed group trends; these may be responsible for the not significant performance on more familiar contexts to students.

Along this same matter, Huang (2004) explores to what extent four everyday shopping mathematical problems set in familiar vs. unfamiliar contexts for students influenced their performance and perception of problem difficulty in forty - eight Year 4 students from two classes of a public elementary school in Taipei, Taiwan. In the study, the hypothesis of familiar contexts assist students in their performance was not supported from the data obtained. The results revealed interestingly that students did not perform better than that problems embedded in unfamiliar contexts. The difference was statistically significant. Moreover, students spent a longer time in solving problems with familiar contexts; this difference was as well statistically significant.

From this result, it might be implied that the set of familiar problems presented to students appeared more difficult to them. From the integration of the above results with the data obtained from the students' perception on problem difficulty, Huang (2004) conjectures that familiarity of the context would promote the conscious representation from a situation to its mathematical structure -as Bernardo (1994) also did-. However, the above "effect does not seem to be strong enough to influence deep - level processes, such as identification of relevant information for figuring out a correct calculation for an accurate solution" (Huang, 2004, p. 286).

In other study reported by Shannon (2007), she tests the same mathematical content (linear function) embedded in three different contexts, namely: supermarket trolleys, shopping baskets, and paper cups. The three problems

 BY-NC

consisted in diagrams with common objects that could be nested when stacked. Students needed to formulate the corresponding linear function describing how the height of the pile of objects would vary with the numbers of objects stacked. Despite of the similarities of the mathematical process to create a formula that represents the height of the pile of objects in every case, students were more successful when working with cups. Next, she analyses how students abstracted salient features of geometry of the contexts above into variables required to solve the problem. In her analysis, she determines that the specific geometrical structure of the cups facilitated the students' success with this variant, rather than the familiarity of the context. She also highlights, as Chipman et al. (1991) did, the issue of relative familiarity with the problem.

Almuna Salgado (2010), in other small scale study, tries to scrutinise how the performance of thirty Year 10 students on four PISA items compares with performance on variants with more familiar contexts. Results show that performance was not better when they solved problems with more familiar contexts. This might be explained by the fact that the greater familiarity of problems in this study was not empirically determined, but was only established from the researcher' opinion. It may also be explained if the new and more familiar problem were not technically as well constructed as the multiply - trialled PISA items, but as Almuna Salgado (2010) points out this may be unlikely because the PISA items were such a close model for their variants.

However, one latent issue with problems set in contexts is the potential differential effect of context familiarity on students' performance. Van den Heuvel - Panhuizen (1999), for example, acknowledges -from a theoretical point of view- that the use of mathematical problems embedded in familiar contexts are not always helpful to students and may also generate difficulties in students' performance. Some students may ignore the context, while others may focus on context aspects that are not necessary for the problem and fail to engage with the necessary mathematics required to solve the problem.

In this vein, Almuna Salgado and Stacey (2014) argue that one difficulty with familiar contexts is that they tend to elicit responses in students that may be based on integration of personal knowledge and values with mathematics in order to build an intended solution. Familiar contexts also may be borderline cases where the relatively stronger understanding of a problem plays a role when students communicate an answer; students may assume that it is not necessary to give a very detailed answer because everyone already knows the arguments.

However, it follows from above that familiar contexts may not always helpful to students and may generate difficulties in students' problem solving. Familiar contexts can hinder some students finding an answer, while others may focus on contextual aspects and fail to engage with the necessary mathematics required to solve the problem. As can be seen below, some research findings indicate that familiar contexts can distract students from a problem's mathematical structure.

For example, in an often cited small scale study, Boaler (1994) analyses the performance of 50 female students on two sets of questions intended to assess the same mathematical content (equivalence of fractions) but set in different contexts (i.e. soccer season, planting plants, cutting pieces of wood, and a fashion workshop). Results show that females underachieved in contexts with which they were probably more familiar (e.g. fashion rather than soccer). They often took excessive account of contextual information in the problems. Boaler (1994) speculates that the relative underachievement on a fashion problem was because the attractive and familiar context distracted the students from the mathematical structure.

Almuna Salgado (2010) small study supports the above. Qualitative evidence from the students' interviews on this study revealed that in more familiar contexts, some students tended to bring personal information into arguments rather than using a mathematical argument. A familiar context was in certain cases (i.e., money and robberies context) interpreted and judged as personal rather than from a mathematical point of view (Almuna Salgado & Stacey, 2014), which did not produce a very detailed answer.

The unpredictable differential effect of the context familiarity, which may be positive or negative in contextualised problems seems to be clear. The above research literature suggests that it makes sense to consider that evidence "indicate that one cannot say anything firm about the relationship context familiarity to success rate" (De Lange, 2007, p. 1119), because the results so far are variable.

5. Final comments

Although studies considered in this review are not directly comparable due to different methodologies and age and school level of participants, results of individual studies suggest that problem context can affect students' performance in variable ways. In this vein, the previous review of research and commentary on all of the aforementioned studies have raised several issues on how problem context and context familiarity might influence on students' performance, which this paper aims to examine.

From the literature, it is clear that evidence is undeniably sparse on this relationship. In general, a number of studies reviewed in this paper seem to suggest that familiarity of a context may have a larger effect than unfamiliar contexts (especially on cognitive studies); in this case, literature tends to finds that

 CC BY-NC

a high level of context familiarity may have a positive effect on performance. In addition, students' socioeconomic background can influence students' activation of the real - world knowledge, and hence the use of the context familiarity, when they solve mathematical problems set in a more realistic or a real - world context. Besides, it appears that familiar contexts can result in easier problems for students, but the abstraction and transfer of the corresponding mathematical structure remains difficult.

On the other hand, empirical evidence of small studies points out that either neutral or negative effect of context familiarity can be associated to the students' performance. For instance, in a more familiar context, some students may tend to bring personal information into arguments rather than using a mathematical argument. A familiar context may be in certain cases interpreted and judged as personal rather than from a mathematical point of view. Nonetheless, due to the nature of these small studies, it is difficult to make strong claims.

Ninety - odd years of floundering on research of problem context leads to infer that the relationship between context and students' performance needs more careful research with new methodologies, deeper analyses (both quantitatively and qualitatively) and experimental control of the way in which context is involved.

As an example, the line of research of the author of this paper is on the relationship of the effects of three contextual features (i.e., context familiarity, context engagement, and use of the context) on mathematical problems with the same mathematical core whilst varying contextual features. It is believed that perusing this particular line of research may generate not only answers to unsolved questions, but also it may assist to synthetise and create a body of empirical research on the relationship of problem context and the students' performance.

It also may be particularly helpful in offering another view in the way in which context is treated at the mathematics classroom by teachers and students. In this vein, it is anticipated that understanding the relationship between context and students' performance can provide deeper and finer understandings of how some context factors may influence students' performance, thereby contributing to the improvement of assessments among teachers, policy makers, and assessment writers. In addition, it is expected that this study has implications for the teaching practice of mathematics. On one hand, it is hypothesised that carefully chosen contexts can facilitate performance and promote cognitive strategies when solving problems in context. When one of the goals of mathematics is to provide a model for students to think with, problems in context provide an opportunity to do so. Hence, better information about how context affects students' performance might help to teachers to instruct students how to work more effectively with problems in context.

References

Almuna Salgado, F. (2016). Investigating the impact of context on students' performance. In White, B., Chinnappan, M. & Trenholm, S. (Eds.), *Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp.100-107). Adelaide: MERGA. ISBN 978-1-920846-29-9

Almuna Salgado, F. (2010). *Investigating the effect of item - context on students' performance on Mathematics items*. Master's thesis. Available from University of Melbourne's Catalogue (melb.b4103780)

Almuna Salgado, F., & Stacey, K. (2014). Item context factors affecting students' performance on mathematics items. In J. Anderson, M. Cavanagh & A. Prescott (Eds.), *Proceedings of the the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp.55-62). Sydney: MERGA. ISBN: 978-1-920846-27-5

Baranes, R., Perry, M., & Stigler, J. W. (1989). Activation of real - world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*, *6* (4), 287-318. doi: https://doi.org/10.1207/s1532690xci0604_1

Bernardo, A. B. I. (1994). Problem-specific information and the development of problem-type schemata. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *20* (2), 379-395.

Bishop, A. J. (1993). Conceptualising cultural and social contexts in mathematics education. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carss & G. Booker (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Brisbane: MERGA.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *51* (1), 149-171.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*. New York: Springer.

Blum, W., Galbraith, P., & Niss, M. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 3-32). New York: Springer.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1, 37-68.

Boaler, J. (1994). When Do Girls Prefer Football to Fashion? An Analysis of Female Underachievement in Relation to 'Realistic' Mathematic Contexts. *British Educational Research Journal*, *20*, 5, 551-564. doi: 10.2307/1500676

Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do They Make Mathematics More 'Real'? *For the Learning of Mathematics*, *13*, 2, 12-17. doi: 10.2307/40248079

Brownell, W. A., & Stretch, L. B. (1931). *The effect of unfamiliar settings on problem - solving.* Durham, N.C: Duke University Press.

Busse, A. (2011). Upper secondary students' handling of real - world contexts. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 37-46). Dordrecht: Springer Netherlands.

Busse, A., & Kaiser, G. (2003). Context in application and modelling - An empirical approach. In Q. X. Ye, W. Blum, S. Houston & Q. Y. Jiang (Eds.), *Mathematical modelling in education and culture: ICTMA 10* (pp. 3-15). Chichester, UK: Albion Publishing.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W., & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *The Mathematics Teacher*, *76* (9), 652-659. doi: 10.2307/27963780

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, *3* (1), 21-29. doi: 10.1111/j.2044-835X.1985.tb00951.x

 BY-NC

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1987). *Written and Oral Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education*, *18* (2), 83-97. doi: 10.2307/749244

Chapman, O. (2006). Classroom Practices for Context of Mathematics Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62* (2), 211-230. doi: 10.1007/s10649-006-7834-1

Chipman, S. F., Marshall, S. P. & Scott, P. A. (1991). Content Effects on Word Problem Performance: A Possible Source of Test Bias? *American Educational Research Journal*, *28* (4), 897-915. doi: 10.3102/00028312028004897

Civil, M. & Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, *24* (1), 7-12

Clarke, D., & Helme, S. (1996). Context as Construction. In C. Keitel, U. Gellert, E. Jablonka & M. Muller (Eds.), *Proceedings of the 47th meeting of the International Commision for the Study and Improvement of Mathematics Teaching in Berlin* (pp. 379-389). Berlin: CIEAM.

Cooper, B. & Dunne, M. (1998). Anyone for tennis? Social class differences in children's responses to national curriculum mathematics testing. *The Sociological Review*, *46* (1), 115-148.

De Lange, J. (2007). Large - Scale Assessment and Mathematics Education. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1111-1142). Charlotte, NC: Information Age Publising Inc.

De Lange, J. (1999). *Framework for Classroom Assessment in Mathematics*. Madison, WI: NICLA / WCER.

Depaepe, F., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*, *26* (2), 152-160. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tate.2009.03.016

Felton, M. (2010). Is math politically neutral? *Teaching Children Mathematics*, *17* (2), 60-63.

Fiddick, L., Cosmides, L. & Tooby, J. (2000). No interpretation without representation: the role of domain - specific representations and inferences in the Wason selection task. *Cognition*, *77* (1), 1-79. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0010-0277(00)00085-8

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlett, C. L. & Appleton, A. C. (2002). Explicitly Teaching for Transfer: Effects on the Mathematical Problem - Solving Performance of Students with Mathematics Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *17* (2), 90.

Galbraith, P., Stillman, G. & Brown, J. (2006). Identifying key transition activities for enhanced engagement in mathematical modeling. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 237-245). Adelaide: MERGA.

Galbraith, P. (2012). Scoring points: Goals for real world problem solving. *Australian Senior Mathematics Journal*, *26* (2), 51-62.

Galbraith, P. (1987). Modelling - teaching modelling. *The Australian Mathematics Teacher*, *43* (4), 6-9.

Greatorex, J. (2014). Context in Mathematics questions. *Research Matters*, *17*, 18-23. Retrieved from http://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/164660-research-matters-17-january-2014.pdf

Griggs, R. A. & Cox, J. R. (1982). The elusive thematic - materials effect in Wason's selection task. *British Journal of Psychology*, *73* (3), 407-420.

Helme, S. (1994). *Mathematics Embedded in Context: The Role of Task Context in Performance, Task Perceptions and the Solution Methods of Adult Women Students*. Master of Education, Australian Catholic University, Melbourne.

Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta - Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23* (3), 242-273. doi: 10.2307/749120

Huang, H. (2004). The impact of context on children's performance in solving everyday mathematical problems with real - world settings. *Journal of Research in Childhood Education*, *18* (4), 278-292.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures* (Vol. 22). New York: Routledge & Kegan Paul PLC.

Johnson - Laird, Legrenzi, P. & Legrenzi, M. S. (1972). Reasoning and a sense of reality. *British Journal of Psychology*, *63* (3), 395-400.

Johnson - Laird, P. & Wason, P. (1970). A theoretical analysis of insight into a reasoning task. *Cognitive Psychology*, *1* (2), 134-148.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leighton, J., & Gokiert, R. (2005). *The Cognitive Effects of Test Item Features: Informing Item Generation by Identifying Construct Irrelevant Variance*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education (NCME), Quebec, Canada.

Lewis, A. B. & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *79* (4), 363-371.

Lyda, W. J. & Franzén, C. G. (1945). A Study of Grade Placement of Socially Significant Arithmetic Problems in the High - School Curriculum. *The Journal of Educational Research*, *39* (4), 292-295. doi: https://doi.org/10.1080/00220671.1945.10881432

Manktelow, K., & Evans, J. (1979). Facilitation of reasoning by realism: Effect or non - effect? British Journal of Psychology, 70 (4), 477-488.

McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L. & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction*, *19* (2), 171-184. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.03.005

Marsh, B., Tood, P. M. & Gigerenzer, G. (2004). Cognitive heuristics: Reasoning the fast and frugal way. In J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.), *The Nature of Reasoning* (pp. 273-290). New York: University Cambridge Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2011). *Focus in high school mathematics : fostering reasoning and sense making for all students*: Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R. & Villa - Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM*, *48* (5), 611-632. doi: https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3

Organisation for Economic Co-Operation and Development. (2013). PISA 2015 Draft mathematics framework. Retrieved January 6, 2015, from https://goo.gl/HdttDk

Organisation for Economic Co-Operation and Development. (2006). PISA released items - Mathematics Retrieved May 22, 2013, from http://www.oecd.org/pisa/38709418.pdf

Pierce, R. & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM*, *38* (3), 214-225. doi: https://doi.org/10.1007/BF02652806

Pollard, P. & Evans, J. (1987). Content and Context Effects in Reasoning. *The American Journal of Psychology*, *100* (1), 41-60. doi: 10.2307/1422641

Post, R. (1958). *A study of certain factors affecting the understanding of verbal problems in arithmetic*. Doctoral dissertation, Columbia University, New York.

Ross, S. M. McCormick, D., & Krisak, N. (1986). Adapting the Thematic Context of Mathematical Problems to Student Interests: Individualized versus Group - Based Strategies. *Journal of Educational Research*, *79* (4), 45-252 doi: https://doi.org/10.1080/00220671.1986.10885685

Roth, W. M. (1996). Where Is the Context in Contextual Word Problems?: Mathematical Practices and Products in Grade 8 Students' Answers to Story Problems. *Cognition and Instruction*, *14* (4), 487-527. doi: https://doi.org/10.1207/s1532690xci1404_3

Shannon, A. (2007). Task Context and Assessment. In A. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (pp. 177-191). New York: MSRI Publications.

Silver, E. A. (1981). Recall of Mathematical Problem Information: Solving Related Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12* (1), 54-64. doi: 10.2307/748658

Stacey, K. (2015). The Real World and the Mathematical World. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience* (pp. 57-84). Cham: Springer International Publishing.

 BY-NC

Stacey, K., & Turner, R. (2015). The Evolution and Key Concepts of the PISA Mathematics Frameworks. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy* (pp. 5-33): Springer International Publishing.

Stillman, G. (2002). *Assessing higher order mathematical thinking through applications*. Doctoral dissertation, The University of Queensland, Brisbane.

Stillman, G., & Galbraith, P. (1998). Applying mathematics with real world connections: metacognitive characteristics of secondary students. *Educational Studies in Mathematics*, *36* (2), 157-194. doi:10.1023/a:1003246329257

Sutherland, J. (1942). An investigation into some aspects of problem solving in arithmetic. *British Journal of Educational Psychology*, *12* (1), 35-46. doi:10.1111/j.2044-8279.1942.tb02178.x

The Florida Legislature Service Bureau, 1980. *Summary of General Legislation Act of 1980*. Retrieved from http://archive.law.fsu.edu/library/collection/FlSumGenLeg/FlSumGenLeg1980.pdf

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction*. The Netherlands, Dordrecht: Reidel.

Turner, R. (2011). Exploring mathematical competencies. *Research Developments*, *24* (5), 2-7.

Van den Heuvel - Panhuizen, M. (2005). The Role of Contexts in Assessment Problems in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *25* (2), 2-23.

Van Den Heuvel - Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54* (1), 9-35. doi:10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Van den Heuvel - Panhuizen, M. (1999). Context problems and assessment: Ideas from the Netherlands. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 130-142). Buckingham, UK: Open University Press.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Greer, B. (2000). *Making sense of word problems*. Exton, PA: Swets & Zeitlinger Publishers.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, *4* (4), 273-294. doi: http://dx.doi.org/10.1016/0959-4752(94)90002-7

Washburne, C. W. & Osborne, R. (1926a). Solving Arithmetic Problems. I. *The Elementary School Journal*, *27* (3), 219-226. doi: https://doi.org/10.1086/461989

Washburne, C. W. & Osborne, R. (1926b). Solving Arithmetic Problems. II. *The Elementary School Journal*, *27* (4), 296-304. doi:https://doi.org/10.1086/462005

Watson, R. & Yip, P. (2011). How many were there when it mattered? *Significance*, *8* (3), 104-107. doi: 10.1111/j.1740-9713.2011.00502.x

Wedege, T. (1999). To know or not to know – Mathematics, that is a question of context. *Educational Studies in Mathematics*, *39* (1-3), 205-227. https://doi.org/10.1023/A:1003871930181

Yoshida, H., Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, *7* (4), 329-338. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00007-8

Autor

Felipe J. Almuna Salgado. Universidad de Melbourne, Australia. felipe.almuna@uach.cl

Débora Areces, Marisol Cueli, Trinidad García,
Celestino Rodríguez, Paloma González - Castro

INTERVENCIÓN EN DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: INCIDENCIA DE LA GRAVEDAD DE LAS DIFICULTADES

Intervention in learning difficulties in mathematics: influence of the severity

RESUMEN

La Representación Dinámica Integrada (RDI) es una estrategia de intervención que pretende mejorar las competencias matemáticas básicas y la resolución de problemas. El presente trabajo tiene como objetivo analizar la eficacia de la RDI en estudiantes con *dificultades de aprendizaje en matemáticas* (DAM) con un nivel de gravedad leve y moderado. Para ello, un total de 80 estudiantes (6-9 años) que presentaban DAM de forma leve o moderada, fueron clasificados en grupo comparativo (GC; 40 estudiantes que seguían la metodología habitual) y grupo tratamiento (GT; 40 estudiantes que trabajaron con la RDI). Los resultados mostraron la efectividad de la RDI frente a la metodología tradicional para los dos niveles de DAM. El GT mejoró en la totalidad de las competencias independientemente del nivel de gravedad. El GC mostró una mejora en algunas de las competencias en el nivel de gravedad leve. Los resultados sugieren que la RDI proporciona buenos resultados en estudiantes con un nivel de gravedad leve y moderado.

PALABRAS CLAVE:

- *Competencias matemáticas informales*
- *Competencias matemáticas formales*
- *Dificultades de aprendizaje en matemáticas*
- *Intervención*
- *Estrategias*

ABSTRACT

The Integrated Dynamic Representation (IDR) is a strategy that attempts to improve basic mathematic skills and problem solving. The present study is aimed at analyzing the effectiveness of the IDR in *learning difficulties in mathematics* (LDM) depending on their severity levels. A sample of 80 students (age range: 6-9) with mild and moderate LDM took part in the study. They were assigned to two groups: control group (CG; 40 students who followed the traditional methodology), and treatment group (TG; 40 students who received intervention with IDR). Results demonstrated the

KEY WORDS:

- *Informal mathematics skills*
- *Formal mathematics skills*
- *Learning difficulties in mathematics*
- *Intervention*
- *Strategies*

CC BY NC

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (3): 293-315.
Recepción: Febrero 20, 2017 / Aceptación: Octubre 30, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2032

effectiveness of the intervention with IDR in comparison to the traditional methodology in both severity levels. The TG presented improvements in all the competencies analyzed, regardless the severity level; while the CG showed some improvements in informal and formal skills, but only within the mild severity level. These findings suggest that IDR strategy leads to better results in students with mild and moderate LDM.

RESUMO

A Representação Dinâmica Integrada (RDI) é uma estratégia de intervenção que pretende melhorar as competências matemáticas básicas e a resolução de problemas. O presente trabalho tem como objetivo analisar a eficácia da RDI em estudantes com *dificuldades de aprendizagem em matemática* (DAM) com um nível de gravidade leve e moderado. Participaram 80 alunos (6-9 anos) que apresentavam DAM de forma leve ou moderada. Estes alunos foram classificados em grupo de comparação (GC; 40 alunos que seguiram a metodologia habitual) e grupo de tratamento (GT; 40 alunos que trabalharam com a estratégia RDI). Os resultados mostraram a efetividade da intervenção com a DRI face à metodologia tradicional para os dois níveis de gravidade analisados. O GT melhorou na totalidade das competências independentemente do nível de gravidade. O GC mostrou uma melhoria em algumas das competências, no nível de gravidade leve. Os resultados sugerem que a RDI proporciona melhores resultados em alunos com um nível de gravidade leve e moderado.

PALAVRAS CHAVE:
- *Competências matemáticas informais*
- *Competências matemáticas formais*
- *Dificuldades de aprendizagem em matemática*
- *Intervenção*
- *Estratégias*

RÉSUMÉ

La Représentation Dynamique Intégrée (RDI) est une stratégie d´intervention qui vise à améliorer les compétences de base en mathématiques et la résolution de problèmes. Ce document a comme objectif d´analyser l´efficacité de la RDI en des étudiants avec *des difficultés d´apprentissage mathématiques* (DAM) avec un niveau de gravité léger et modéré. Pour cela, un total de 80 étudiants (6-9 ans) qui représentent DAM de forme légère et modérée, ont été classés en groupe comparatif (GC; 40 étudiants qui ont suivi la méthodologie habituelle) et le Groupe de traitement (GT; 40 étudiants qui ont travaillé avec l´stratégie RDI). Les résultats ont montré l´efficacité de la RDI pour les deux niveaux analysés de gravité. Le GT a améliorer dans toutes les compétences, quel que soit le niveau de gravité. Toutefois, le GC, a montré une amélioration dans certaines des compétences, seulement au niveau de sévérité légère. Les résultats suggèrent que la stratégie RDI donne de meilleurs résultats un étudiants avec un niveau de gravité léger et modéré.

MOTS CLÉS:
- *Compétences en mathématiques informelles*
- *Compétences en mathématiques formelles*
- *Des difficultés d´apprentissage mathématiques*
- *Intervention*
- *Stratégies*

BY-NC

1. Introducción

La actual quinta versión del manual diagnóstico y estadístico de trastornos mentales de la Asociación Americana de Psiquiatría (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders DSM-5; APA, 2014), incluye en la categoría de trastornos específicos del aprendizaje aquellos desórdenes o problemas para la adquisición de habilidades académicas a pesar de las intervenciones oportunas. Estas dificultades deben presentarse desde los primeros años de escolaridad, sin ser atribuibles a otros déficits o síndromes específicos (déficit cognitivo, desorden del desarrollo u otros desórdenes motores o neurológicos), y se reflejan en una mayor problemática para el aprendizaje de la lectura, la escritura o las matemáticas. En este sentido, aproximadamente el 20% de la población muestra bajas habilidades numéricas (Kadosh, Dowker, Heine, Kaufmann y Kucian, 2013) y en función del criterio diagnóstico, entre el 3 y el 13% presenta dificultades más específicas como son las Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas (DAM) (Butterworth, 2010), las cuales, conviene tener en cuenta de cara a minimizar el riesgo de mayor problemática futura (Powell, Cirino y Malone, 2017). Dado que las matemáticas son un componente crítico del currículo para el éxito futuro (Kingsdorf y Krawec, 2014), y dada la prevalencia de las DAM, resulta especialmente relevante analizar la eficacia de una intervención basada en la resolución de problemas sobre la competencia matemática de estudiantes clasificados en función del grado de gravedad de las DAM. Con la aparición del DSM-5, se incorporan los niveles de gravedad de las dificultades de aprendizaje distinguiendo entre leve, moderado y grave (APA, 2014) lo que permite ajustar las necesidades e intervenciones al perfil de dificultades del estudiante.

Las DAM resultan un importante desorden caracterizado por ser resistente a la instrucción y aparecer en los primeros estadios del desarrollo (Presentación, Siegenthaler, Pinto, Mercader y Miranda, 2014). Los estudiantes con DAM presentan grandes dificultades para la comprensión y procesamiento de las magnitudes numéricas (De Smedt y Gilmore, 2011; Miranda y Gil-Lario, 2001) asociadas a un déficit neuronal en el surco intrapariental (Kaufmann et al., 2013). Las investigaciones previas, han analizado diferentes dimensiones del conocimiento matemático asociadas a las DAM como el cálculo, los hechos numéricos o la comparación de cantidades que condicionan la eficacia en la resolución de problemas (Raghubar et al., 2009). Concretamente, siguiendo a Geary (2003), los estudiantes con DAM manifiestan dificultades para la aplicación de diferentes habilidades cognitivas reflejadas en un déficit a tres niveles. En primer lugar, un déficit en la memoria semántica que genera dificultades en la recuperación de datos y respuestas matemáticas y mayor número de errores (Miranda, Meliá y Taverner, 2009; Romero y Lavigne, 2005). En segundo

 BY-NC

lugar, un déficit procedimental y, como consecuencia de ello, dificultades en la retención de la información, en la memoria de trabajo y en la monitorización o control de los procesos de conteo. En tercer lugar, deficiencias en el área visoespacial, caracterizadas por dificultades en la representación numérica de las relaciones y en la interpretación y comprensión de la información espacial. Todo ello, afecta a las competencias específicas necesarias para calcular y para aprender procedimientos algorítmicos y heurísticos. Los estudiantes con DAM se caracterizan por no recordar ciertas combinaciones y patrones numéricos, por lo que presentan frecuentes dificultades en la manipulación numérica y en la interpretación lingüística a la hora de resolver determinados tipos de problemas (Krawec, Huang, Montague, Kressler, y Melia, 2012; Romero y Lavigne, 2005). Además, muestran importantes dificultades para representar los enunciados y para decidir cómo resolverlos (Montague, 2011). En definitiva, estos estudiantes presentan déficit en las competencias matemáticas básicas y en la resolución de problemas específicos, que precisan de una detección, evaluación y, al mismo tiempo, de un entrenamiento e intervención temprana (Butterworth, 2010; Krawec et al., 2012).

En lo que respecta al entrenamiento en la resolución de problemas, el modelo de Mayer (2004), proporciona una clara descripción de los procesos implicados en la resolución y las habilidades necesarias para llevarlos a cabo. De acuerdo con los procesos, Mayer identifica cuatro fases principales: La traducción, la integración, la planificación y la ejecución. Para llevar a cabo estos procesos, son necesarias una serie de habilidades o competencias matemáticas (Kingsdorf y Krawec, 2014), las cuales, deben estar presentes en las intervenciones dirigidas a las DAM con el fin de resultar eficaces en la mejora de los déficits específicos.

En este sentido, para trabajar los procesos implicados en la resolución, una estrategia es la representación, la cual, ha mostrado ser crítica en el desarrollo de la comprensión matemática (Pape y Tchoshanov, 2001; van Garderen, Scheuermann y Jackson, 2012). Siguiendo a van Garderen et al. (2012) la representación es una combinación de lo escrito en el papel, el objeto físico y el constructo o idea mental. Existen diferentes tipos de representación (mental, imagen, lenguaje escrito, lenguaje oral, acciones, símbolos, entre otros; Zawojewski y Lesh, 2003). Aunque todos estos sistemas de representación son importantes, para el desarrollo de la comprensión matemática, las formas visuales y concretas son comúnmente las más recomendadas en la instrucción, sobre todo, en los primeros niveles educativos y ante la presencia de DAM dadas las dificultades de los estudiantes a este nivel (Gersten et al., 2009; Pape y Tchoshanov, 2001; van Garderen y Montague, 2003).

Con respecto a las habilidades o competencias matemáticas, los diferentes trabajos han mostrado que las intervenciones resultan más eficaces cuando se desarrollan bajo un modelo de referencia lógico, incluyendo una serie de estrategias específicas (Gersten et al., 2009; Swanson, Hoskyn, y Lee, 1999). Gersten et al. (2009) y Swanson et al. (1999) identificaron que la instrucción directa y explícita (guiada y dirigida por el profesor de forma sistemática) era una técnica eficaz para la intervención en DAM. Otros autores como Ise y Schulte - Körne (2013) realizaron un metaanálisis con el fin de distinguir qué factores permiten que una intervención resulte efectiva o exitosa. Sus resultados mostraron seis aspectos relevantes: la individualización de la intervención; la adaptación al nivel previo del estudiante; la estructuración y jerarquización en función del grado de dificultad; la combinación de contenidos externos al currículo junto con contenidos propios del mismo; la repetición continuada y frecuente; y el incremento de la motivación y la reducción de la ansiedad. Con respecto a estos dos últimos factores, siguiendo a Kucian y vonAster (2015), los programas de ordenador proporcionan o contribuyen a mejorar estos dos aspectos. Trabajos como el de Cueli, González - Castro, Rodríguez, Núñez y González - Pienda (2018) han reflejado que, frente a otras variables afectivo - motivacionales, los programas de ordenador contribuyen en mayor medida a la reducción de la ansiedad hacia las matemáticas. Además, estos programas pueden adaptarse al nivel del estudiante y así contribuir a la mejora de las necesidades presentes (Cueli, Rodríguez, Areces, García, y González - Castro, en prensa). De ahí, la importancia de que los programas adaptados a través del ordenador permitan la inclusión de estas características y, favorezcan la mejora de los procesos y habilidades relacionadas con la resolución de problemas y la competencia matemática.

Teniendo en cuenta todos estos aspectos, se desarrolló la estrategia Representación Dinámica Integrada (RDI) (González - Castro, Cueli, Areces, Rodríguez y Sideridis, 2016; González - Castro, Cabeza, Álvarez - García y Rodríguez, 2014), dirigida a trabajar la resolución de problemas a través de la mejora de los procesos y habilidades relacionadas con la competencia matemática siguiendo una metodología de instrucción directa y explícita. Para ello, la estrategia se lleva a cabo a través de un programa informatizado dados los beneficios de cara a la individualización y adaptación de la intervención al perfil del estudiante con ejercicios y tareas repetitivas y jerarquizadas en función del grado de dificultad. Además, con la RDI se potencian aspectos previos al currículo educativo (competencias matemáticas informales) y aspectos propios del mismo (competencias matemáticas formales). González - Castro et al. (2014) observaron que la RDI resultaba eficaz en estudiantes sin dificultades en la mejora de la competencia matemática frente a la metodología tradicional que recibía el grupo control.

El desarrollo de la estrategia se enmarca dentro de la psicología educativa del aprendizaje en matemáticas en el marco de la necesidad de profundizar

 BY-NC

en aquellas estrategias que potencian el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes y que favorecen el éxito posterior (Presentación, Mercader, Siegenthaler, Fernández - Andrés y Miranda, 2015). En esta línea, han surgido multitud de herramientas tecnológicas para trabajar los contenidos académicos y es preciso detectar cuáles resultan eficaces y qué criterios son los más relevantes en su desarrollo.

Con este marco de referencia, el objetivo de este estudio fue analizar la eficacia de la RDI en la mejora de las competencias matemáticas informales y formales (valoradas con un test de competencia matemática básica), en estudiantes con DAM con un nivel de gravedad leve y moderado. Teniendo en cuenta que el nuevo manual diagnóstico DSM-5 permite distinguir entre los niveles de gravedad en las dificultades de aprendizaje, resulta relevante profundizar en cómo interfieren estos niveles en la eficacia de las intervenciones. Este objetivo general se concretó en dos objetivos específicos: 1) Analizar la eficacia diferencial de la intervención con la RDI en estudiantes con DAM en función de la gravedad leve y moderada; 2) Analizar la ganancia en las competencias matemáticas básicas de los estudiantes del grupo tratamiento y el grupo comparativo tras la intervención durante tres meses con la estrategia RDI.

2. Método

Este estudio tiene un carácter cuantitativo en el que siguiendo una metodología pretest - postest se aplica la estrategia de intervención RDI durante tres meses a estudiantes con DAM con un nivel de gravedad leve y moderado. Se utilizó un diseño cuasiexperimental de dos grupos (grupo tratamiento y grupo comparativo). Los estudiantes de ambos grupos fueron evaluados en dos momentos: evaluación pretest antes del inicio de la intervención con la RDI en el grupo tratamiento y evaluación postest después de la misma.

2.1. *Participantes*

Participaron en esta investigación 80 estudiantes (44 niños y 36 niñas) de entre 6 y 8 años de edad (*M* = 7.06, *DT* = 0.68) de 11 colegios públicos y concertados del Principado de Asturias. La selección de la muestra se realizó de forma incidental, siguiendo un muestreo por conveniencia (Argibay, 2009) en colaboración con el Departamento de Orientación de los centros educativos quien, con el consentimiento de las familias, informó del alumnado con DAM. Con el fin de

(cc) BY-NC

asegurar el diagnóstico, los estudiantes debían cumplir los criterios de inclusión propuestos por Geary (2003), basados en la capacidad intelectual dentro de la media y la persistencia de las DAM. Teniendo esto en cuenta, sólo se incluyeron estudiantes con capacidad intelectual media (M = 92.95, DT = 4.80) medida con la escala de inteligencia para niños WISC-IV (Wechsler, 2005) por un psicólogo educativo especializado. Además, dado el carácter de persistencia de las DAM, participaron sólo aquellos estudiantes cuyo bajo rendimiento se mantenía más de un curso académico, valorado en función del historial académico del alumnado y las aportaciones del profesorado. Con el fin de asegurar la ausencia de trastornos asociados, el mismo profesional de la psicología educativa, realizó una entrevista de carácter estructurado DISC-IV (*Diagnostic Interview Schedule for Children Version IV*; Shaffer, Fisher, Lucas, Dulcan y Schwab - Stone, 2000). Tanto el WISC-IV como el DISC-IV fueron utilizados con el objetivo de asegurar que los estudiantes participantes no presentaban otros trastornos o comorbilidades unidas a las DAM.

En cada centro, los alumnos seleccionados fueron asignados de manera aleatoria a cada uno de los grupos. De este modo, se obtuvo un grupo tratamiento (GT) de 40 estudiantes (24 niños y 16 niñas que recibían la intervención con la estrategia RDI) y un grupo comparativo (GC) de 40 estudiantes (20 niños y 20 niñas que seguían la metodología de enseñanza habitual). Los estudiantes de los dos grupos fueron clasificados en función del nivel de gravedad de sus dificultades, tomando la puntuación en el Índice de Competencia Matemática (ICM) aportado por el test TEMA 3 (Ginsburg y Baroody, 2003). El test TEMA 3 permite una evaluación completa de las competencias matemáticas informales y formales además de aportar un índice general de la competencia matemática del estudiante en las edades que comprende la muestra actual, motivo por el que fue utilizado en el presente estudio. Contando con el ICM, se establecieron dos niveles de gravedad leve y moderado. En el caso del GT 11 estudiantes (7 niños y 4 niñas) presentaban un nivel de gravedad leve (edad M = 6.74, DT = 0.66; CI M = 93.90, DT = 5.84) y 29 estudiantes (17 niños y 12 niñas) presentaban un nivel de gravedad moderado (edad M = 7.18, DT = 0.68; CI M = 93.06, DT = 4.65). En el caso del GC 31 estudiantes (17 niños y 14 niñas) presentaban un nivel de gravedad leve (edad M = 6.94, DT = 0.646; CI M = 92.38, DT = 4.90) y 9 (3 niños y 6 niñas) un nivel de gravedad moderado (edad M = 7.44, DT = .623; CI M = 92.33, DT = 4.03).

2.2. *Instrumentos de evaluación*

TEMA 3 (Test de Competencia Matemática Básica; Ginsburg y Baroody, 2003). Prueba de aplicación individual en papel y lápiz que evalúa las competencias

 BY-NC

matemáticas informales y formales. Las competencias informales, se estructuran en torno a cuatro subpruebas: Numeración (habilidad básica para la representación de cantidades y el cálculo mental), comparación de cantidades (habilidad básica para el manejo del orden de los números -crecimiento / decrecimiento-), cálculo informal (habilidad básica para la resolución de operaciones de suma y resta) y conceptos informales (habilidad básica para agrupar conjuntos -su manipulación implica la conservación de la materia-). Las competencias formales se controlan mediante: convencionalismos (capacidad para leer y escribir cantidades), hechos numéricos (capacidad para operar de forma mental -suma, resta y multiplicación-), cálculo formal (capacidad para realizar sumas y restas de dificultad creciente) y concepto formal (capacidad para identificar el significado numérico desde el punto de vista simbólico e icónico). El instrumento ofrece un coeficiente general, el Índice de Competencia Matemática (ICM) que indica el rendimiento global del alumno en relación a su grupo de edad ($M = 100$, $DT = 15$). La prueba se encuentra validada en población española con un índice de fiabilidad (alfa de Cronbrach = .92) y validez que respaldan su uso como medida de la competencia matemática temprana (Ginsburg y Barrody, 2007).

2.3. *Programa de intervención*

De acuerdo con Mayer (2004), el proceso que lleva al aprendizaje significativo depende tanto de la forma en cómo el estudiante procesa la información, como del material que se presenta. Así, la promoción del aprendizaje depende tanto de la mejora en el procesamiento de la información de los estudiantes como de la forma en que se presentan los materiales (Valle et al., 2009). Por ello, en este trabajo, se aplicó una estrategia de intervención, concretamente la Representación Dinámica Integrada (RDI) (Cueli et al., 2017; González - Castro et al., 2016) que dada su naturaleza y fundamento teórico está dirigida a favorecer la resolución de problemas y las competencias matemáticas básicas informales y formales. Esta estrategia fue desarrollada por los autores de este trabajo bajo la dirección del profesor Luis Álvarez (Cueli et al., 2017). El desarrollo se llevó a cabo en lenguaje informatizado (herramienta de software diseñada como una aplicación web). La RDI es el elemento nuclear de los procesos heurísticos y resulta de la combinación de representaciones externas e internas. Se estructura en torno a tres componentes: Comprensión fragmentada, representación fragmentada e integración del conjunto de representaciones siguiendo el modelo de Mayer (traducción, integración, planificación y ejecución), en función del cual, se establece un proceso de aplicación de cuatro niveles de representación:

(cc) BY-NC

Representación de los conceptos, representación de los enlaces, representación de los interrogantes, reversibilidad del proceso (generalización a otros contextos).

La RDI sigue la secuencia lógica a la hora de aplicar las competencias propias del nivel educativo en el que se enmarca el programa. Los contenidos se presentan siguiendo tres tipos de presentación de la información, la presentación icónica (los conceptos o enunciados se presentan asociados a imágenes), presentación combinada (los conceptos van asociados a imágenes / palabras) y la presentación simbólica (los enunciados se presentan exclusivamente en texto lineal). Así, se trabajan competencias previas al currículo como son las competencias informales: Numeración (el conteo, teniendo en cuenta que el número crece y decrece a medida que aumenta o disminuye el número de objetos), la comparación de cantidades (dado que en la representación del enunciado los datos numéricos quedan reflejados en el número concreto de objetos en cada uno de los bolos), cálculo informal (la resolución del problema sin realizar la operación concreta sino arrastrando los objetos al último de los bolos de solución final), concepto informal (el todo incluye a las partes y el niño arrastra el número de objetos representado en el dato numérico). También competencias propias del currículo como son las competencias formales: Convencionalismos (codificación y decodificación del número; el número aparece de forma simbólica y escrita), hechos numéricos (cálculo mental; en este caso, aún no se introduce la operación sino que la solución aparece al colocar la operación en el lugar correspondiente), cálculo formal (realización de la operación mecánica), y concepto formal (concepto simbólico de número; el todo incluye a las partes y el niño ya no arrastra el número de objetos representado en el dato numérico sino un solo objeto).

En la práctica, la estrategia RDI establece una secuencia aplicada para la realización de cada ejercicio problema que se concreta en un modelo de cuatro pasos que el estudiante debe seguir en el proceso de resolución: *representación de los conceptos* (se presenta el enunciado en el que los conceptos o elementos a los que se refiere el problema se destacan en un bolo o elipse; las cantidades o los datos numéricos se destacan en un cuadrado; los verbos se sustituyen por pictogramas e indican la acción), *representación de los enlaces* (identificadas las partes del programa estas son presentadas en conjuntos de unión-intersección que aparecen en el esquema de representación externa), *representación de los interrogantes* (el esquema de representación externa finaliza con la pregunta que se destaca en los interrogantes) y *reversibilidad* (reestructura -se genera un nuevo enunciado del problema a partir del esquema de representación externa sin tener presente el enunciado de partida-) (ver Figura 1).

 BY-NC

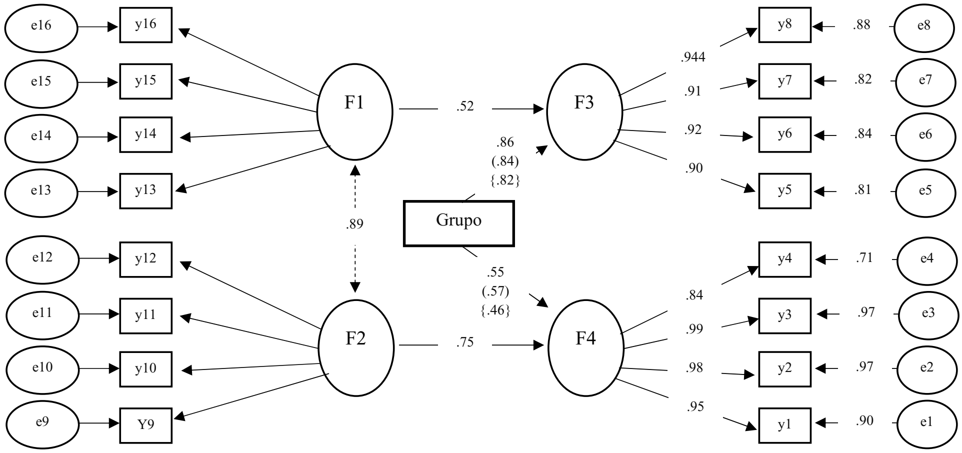


Figura 1. Modelo de medidas latentes para evaluar las diferencias inter-grupos (Modelo 1: tratamiento vs control, valores estimados expresados sin paréntesis), (Modelo 2: Control - leve vs Tratamiento - leve, estimaciones entre paréntesis) y (Modelo 3: Control - moderado vs Tratamiento - moderado LD, estimaciones entre llaves) en las variables latentes de Competencias Informales (F3) y Formales (F4) en el postest [después de controlar el rendimiento inicial de las medidas pretest (e.g. variables latentes F1 y F2 en el momento-1)]

Este proceso multinivel se lleva a cabo en 9 niveles organizados de forma secuencial en función del grado de dificultad. Cada uno de estos niveles, incluye a su vez tres grados de dificultad (amarilla, naranja y roja; con 15 ejercicios en cada uno de estos grados) por los que el estudiante debe ir pasando para alcanzar el manejo de las competencias mencionadas. En función de la secuenciación lógica de este tipo de aprendizajes, en primer lugar, las actividades se enfocan en las sumas sin llevadas (p.ej. Tengo 3 manzanas y me dan 2 manzanas, ¿cuántas manzanas tengo?), posteriormente sumas con llevadas (p.ej. Tengo 17 manzanas y me dan 8 manzanas, ¿cuántas manzanas tengo?) y restas sin llevadas (p.ej. Tengo 8 manzanas y me quitan 3 manzanas, ¿cuántas manzanas tengo?) para finalmente combinar sumas y restas. También, las cantidades numéricas se van ampliando progresivamente en los 9 niveles en intervalos que van de 1-3, 0-5, 0-9, 0-19, 0-39, etc.

Finalmente, a nivel técnico, el entorno RDI es una herramienta de software diseñada como una aplicación web, utilizando html, php y fundamentalmente tecnología java. Este lenguaje de programación posibilita crear estructuras de

BY-NC

código llamadas applets que se incrustan como pequeñas aplicaciones dentro de una página web, lo que permite el acceso a la herramienta desde cualquier navegador. La arquitectura responde al modelo cliente - servidor, lo que implica que la aplicación está alojada en un servidor web, al que se puede acceder a través de un navegador y permite trabajar con la herramienta en línea.

2.4. *Procedimiento*

La selección de la muestra se llevó a cabo a través de un procedimiento incidental dada la disponibilidad y accesibilidad, con el consentimiento informado activo de las familias. Una vez recibido, se llevó a cabo la evaluación inicial con la entrevista DISC-IV y el WISC-IV, lo que permitió asegurar que todos los estudiantes presentaban un cociente intelectual entre 80 y 130 y la ausencia de trastornos asociados. Posteriormente, se asignaron los estudiantes a los grupos GT y GC y se procedió a la evaluación de las competencias básicas con el TEMA 3 realizada por un psicólogo educativo especialista externo a los centros. Gracias a esta prueba, se obtuvo el ICM (M = 100, DT = 15) para cada uno de los estudiantes, lo que permitió la clasificación de la muestra en función del nivel de gravedad de las DAM (leve o moderado). Para ello, cuando el ICM en el pretest se encontraba una desviación típica por debajo de la media, los estudiantes fueron clasificados dentro del nivel de gravedad leve, mientras que si la puntuación se encontraba dos desviaciones típicas por debajo de la media estos estudiantes fueron clasificados dentro del nivel de gravedad moderado. En definitiva, se obtuvieron dos grupos en función de la gravedad: Nivel leve (estudiantes con ICM mayor a 71 y menor o igual a 86) y nivel moderado (estudiantes con ICM menor o igual a 70).

Posteriormente, una vez realizada la clasificación de los estudiantes se llevó a cabo la intervención basada en la estrategia RDI (González - Castro et al., 2014) durante tres meses a razón de 50 minutos por sesión cuatro días por semana (haciendo un total de 45 sesiones). Un profesional de la educación fue entrenado en la metodología de aplicación del programa para realizar el entrenamiento en el GT en aula pequeña proporcionada por el colegio y a la que asistían en horario de clase de matemáticas. Durante las sesiones el estudiante iniciaba la resolución de problemas con la estrategia en el nivel correspondiente y realizaba los cuatro pasos para la ejecución de cada uno de los ejercicios (representación de los conceptos, representación de los enlaces, representación de los interrogantes y reversibilidad). En cada sesión los estudiantes realizaban entre 15 y 20 ejercicios de resolución. Al inicio de la intervención, todos ellos manejaban la presentación icónica (imágenes) en los niveles de 1 a 3, posteriormente se introdujo la presentación combinada (imágenes asociadas a palabras) con los niveles de

 BY-NC

4 a 6 y finalmente se trabajó la presentación simbólica (palabras o texto) en los niveles de 7 a 9. El GC recibió una metodología de aprendizaje tradicional (guiada por el propio maestro del centro educativo en el aula ordinaria) basada en clases expositivas y tareas en papel y lápiz siguiendo siempre las mismas pautas recogidas en la programación de aula. Al finalizar la intervención se aplicó nuevamente el TEMA 3 en todos los grupos, con el fin de comprobar la posible evolución diferencial del pretest al postest.

2.5. *Análisis de los datos*

Dados los objetivos de este trabajo, además del estudio de los estadísticos descriptivos, se optó por realizar Análisis Univariados de la Covarianza (ANCOVA) con el fin de profundizar en el efecto de la gravedad de las DAM sobre la eficacia de la intervención. De esta forma, se tomó el grado de gravedad como variable independiente y las puntuaciones en las ocho competencias matemáticas (informales y formales) como variables dependientes. Inicialmente, se analizaron las diferencias entre el GT y GC en variables como la edad, el CI y el género. Si bien estas diferencias no resultaron significativas en función de ninguna de las tres variables (CI, edad ni género), estas fueron tomadas como covariadas para eliminar su posible efecto en cada uno de los niveles de gravedad al tratarse de grupos más pequeños. También, las puntuaciones pretest fueron tomadas como covariadas en cada uno de los ANCOVAs.

Por otro lado, con el propósito de analizar la ganancia o evolución del pretest al postest, en función del nivel de gravedad en GT y GC, se utilizó la prueba t de Student para muestras relacionadas.

Finalmente, con el fin de analizar la interacción, se realizó un modelo estructural de variables latentes (metodología de ecuaciones estructurales -SEM; structural equation modeling-). Para la realización de los análisis estadísticos, se ha utilizado el paquete estadístico SPSS en su versión 19.0 y AMOS 22.0 (Arbuckle, 2010).

3. Resultados

La tabla I muestra los estadísticos descriptivos junto con la asimetría y curtosis para cada una de las competencias. Siguiendo el criterio de Kline (2011), según el cual, puntuaciones entre 3 y -3 de asimetría y 10 y -10 de curtosis corresponden a distribuciones normales, se puede concluir que todas las variables incluidas en el estudio seguían una distribución normal.

BY-NC

TABLA I
Medias, desviaciones típicas, asimetría y curtosis para las puntuaciones PRE y POST

	Puntuaciones PRE			Puntuaciones POST		
	M(DT)	*Asimetría*	*Curtosis*	*M(DT)*	*Asimetría*	*Curtosis*
COMPETENCIAS INFORMALES						
Numeración	13.75 (3.09)	-0.333	-1.017	16.98 (3.97)	-0.300	-0.983
Comparación	3.16 (0.76)	-0.454	-0.612	4.14 (1.24)	-0.010	-0.956
Calculo informal	3.09 (0.70)	0.310	0.161	4.18 (1.27)	0.235	-0.645
Conceptos informales	2.19 (0.64)	0.386	0.557	2.93 (0.94)	-0.338	-0.562
COMPETENCIAS FORMALES						
Convencionalismos	3.75 (0.94)	-0.125	-1.017	5.16 (1.77)	0.221	-0.983
Hechos numéricos	1.29 (1.60)	1.000	-0.612	2.48 (2.43)	0.782	-0.956
Cálculo formal	1.23 (1.38)	0.675	0.161	2.51 (2.41)	0.759	-0.645
Conceptos formales	1.18 (0.69)	0.437	0.557	2.19 (1.26)	0.746	-0.562
ICM	70.51(9.17)	0.037	-0.874	89.58 (18.87)	-1.357	-0.529

Nota: M = Media; DT = Desviación Típica; ICM = Índice de Competencia Matemática; Puntuaciones PRE = valores para cada variable antes de la intervención; Puntuaciones POST = valores para cada variable después de la intervención.

3.1. *Diferencias en GT para las variables informales y formales*

En primer lugar, se llevaron a cabo diferentes ANCOVAs, con el propósito de analizar las posibles diferencias en función de la gravedad para cada una de las variables analizadas (informales y formales) tomando como covariadas el CI, la edad, el género y la puntuación pretest. En relación a las cuatro competencias informales, las diferencias entre la gravedad leve y moderada no resultaron estadísticamente significativas en ninguna de las cuatro variables, numeración $F(1, 34) = 0.486$, $p = .490$, $\eta p^2 = .014$; comparación de cantidades $F(1, 34) = 0.662$, $p = .422$, $\eta p^2 = .019$; cálculo informal $F(1, 34) = 0.752$, $p = .392$, $\eta p^2 = .022$; y conceptos informales $F(1, 34) = 0.012$, $p = .914$, $\eta p^2 = .000$.

A continuación, se analizaron las diferencias entre el nivel de gravedad leve y moderada en cada una de las cuatro competencias formales tomando como covariadas el CI, la edad, el género y la puntuación pretest. Los resultados de los ANCOVA, no aportaron diferencias estadísticamente significativas en ninguna de las cuatro variables, convencionalismos, $F(1, 34) = 1.586$, $p = .216$, $\eta p^2 = .045$; hechos numéricos $F(1, 34) = 0.612$, $p = .440$, $\eta p^2 = .018$; cálculo formal $F(1, 34) = 3.136$, $p = .086$, $\eta p^2 = .084$; y conceptos formales $F(1, 34) = 1.401$, $p = .245$, $\eta p^2 = .040$. En la tabla II se muestran la dirección de las diferencias.

 BY-NC

TABLA II
Medias, desviaciones típicas y efectos intersujetos
para las medidas PRE de las diferentes competencias

	Puntuaciones PRE			
	Gravedad leve		*Gravedad moderada*	
	GT (n=11) *M(DT)*	*GC(n= 31)* *M(DT)*	*GT (n=29)* *M(DT)*	*GC (n= 9)* *M(DT)*
COMPETENCIAS INFORMALES				
Numeración	13.09 (3.53)	14.29 (3.16)	13.41(3.17)	13.89 (2.26)
Comparación	2.81 (0.87)	3.41 (0.62)	2.93 (0.79)	3.44 (0.72)
Cálculo informal	3.00 (0.44)	3.45 (.722)	2.75 (0.63)	3.11 (0.60)
Conceptos informales	1.90 (0.30)	2.51 (.56)	1.82 (0.53)	2.55 (0.72)
COMPETENCIAS FORMALES				
Convencionalismos	3.45 (0.82)	3.83(0.82)	3.62 (1.11)	4.22 (0.83)
Hechos numéricos	0.81 (1.25)	1.32(1.66)	1.13 (1.30)	2.44 (2.29)
Cálculo formal	0.72 (1.10)	1.16(1.43)	1.24 (1.15)	2.22 (1.85)
Conceptos formales	1.00 (0.63)	1.19(1.42)	1.00 (0.70)	1.44 (0.88)
	Puntuaciones POST			
	Gravedad leve		*Gravedad moderada*	
	GT (n=11) *M(DT)*	*GC(n= 31)* *M(DT)*	*GT (n=29)* *M(DT)*	*GC (n= 9)* *M(DT)*
COMPETENCIAS INFORMALES				
Numeración	19.18 (2.71)	14.03 (3.41)	20.03 (2.29)	15.00 (2.64)
Comparación	4.90 (0.83)	3.00 (0.77)	5.17 (0.80)	3.88 (0.60)
Cálculo informal	5.27 (0.64)	3.00 (0.57)	5.27 (0.75)	3.44 (0.72)
Conceptos informales	3.45 (0.52)	2.22 (0.76)	3.68 (0.54)	2.33 (0.70)
COMPETENCIAS FORMALES				
Convencionalismos	6.54 (1.12)	3.54 (0.72)	6.72 (1.03)	4.22 (0.97)
Hechos numéricos	2.90 (2.62)	1.12 (1.40)	3.89 (2.60)	2.33 (2.00)
Cálculo formal	2.90 (2.62)	1.35 (0.60)	3.89 (2.65)	2.33 (1.87)
Conceptos formales	2.63 (1.20)	1.32 (0.65)	3.13 (1.24)	1.77 (0.66)

Nota: M = Media; DT = Desviación típica.
*<.05**<.01***<.001.

3.2. *Diferencias en GC para las variables informales y formales*

En el caso del GC, nuevamente se realizaron ANCOVAs, tomando como variable dependiente la gravedad y como covariadas el CI, la edad, el género y la puntuación pretest. En relación a las cuatro competencias informales, las diferencias no resultaron estadísticamente significativas en numeración $F(1, 34) = 0.004$, $p = .952$, $\eta p^2 = .000$; ni en conceptos informales $F(1, 34) = 1.872$, $p = .180$, $\eta p^2 = .052$. Sin embargo, las diferencias fueron estadísticamente significativas en comparación de cantidades $F(1, 34) = 5.940$, $p = .020$, $\eta p^2 = .0149$; y en cálculo informal $F(1, 34) = 4.523$, $p = .041$, $\eta p^2 = .117$.

Finalmente, en relación a las competencias formales, los ANCOVA (tomando como covariadas el CI, la edad, el género y la puntuación pretest) no aportaron diferencias estadísticamente significativos en las variables convencionalismos $F(1, 34) = 1.398$, $p = .245$, $\eta p^2 = .039$; hechos numéricos $F(1, 34) = 0.129$, $p = .721$, $\eta p^2 = .004$; cálculo formal $F(1, 34) = 0.260$, $p = .614$, $\eta p^2 = .008$; y conceptos formales $F(1, 34) = 0.629$, $p = .433$, $\eta p^2 = .018$.

3.3. *Diferencias en la evolución pretest - postest*

Por otro lado, con el fin de analizar la evolución del pretest al postest para cada una de las competencias con base en los niveles de gravedad, se realizó la prueba t de student para muestras relacionadas en los dos niveles de gravedad (leve y moderado) para el GT y el GC. Los datos recogidos de este análisis se muestran en la tabla III.

Tal y como se muestra en la tabla III, se observa que en el GT existen diferencias significativas entre todas las medidas recogidas antes y después de la intervención para los dos niveles de gravedad. Sin embargo, en el GC se observaron diferencias estadísticamente significativas en comparación de cantidades y cálculo informal para el nivel de gravedad leve, y en numeración y comparación de cantidades para el nivel de gravedad moderada. En cuanto a las competencias formales, únicamente se observaron diferencias estadísticamente significativas entre las puntuaciones pretest y postest en convencionalismos para el nivel de gravedad leve, no reflejándose diferencias entre ninguna de las competencias formales cuando el nivel de gravedad es moderado.

 BY-NC

TABLA III

Diferencia de Medias PRE-POST, Error Típico y estadístico *t* de Student

		Gravedad leve (n = 11)			Gravedad moderada (n = 29)		
		DM	*ET*	*t*	*DM*	*ET*	*t*
GT	*COMPETENCIAS INFORMALES*						
	Numeración	-6.09	0.368	-16.54***	-6.62	1.320	-26.99***
	Comparación	-2.09	0.162	-12.85***	-2.24	0.435	-27.71***
	Cálculo informal	-2.27	0.140	-16.13***	-2.51	0.574	-23.59***
	Conceptos informales	-1.54	0.157	-9.81***	-1.86	0.441	-22.73***
	COMPETENCIAS FORMALES						
	Convencionalismos	-3.09	0.250	-12.33***	-3.103	0.557	-30.00***
	Hechos numéricos	-2.09	0.435	-4.79***	-2.75	1.573	-9.42***
	Cálculo formal	-2.18	0.463	-4.70***	-2.65	1.674	-8.37***
	Conceptos formales	-1.63	0.278	-5.87***	-2.13	0.789	-14.66***
		Gravedad leve (n = 31)			Gravedad moderada (n = 9)		
		DM	*ET*	*t*	*DM*	*ET*	*t*
GC	*COMPETENCIAS INFORMALES*						
	Numeración	.25	0.266	0.969	-1.11	1.269	-2.626*
	Comparación	.41	0.120	3.474**	-.44	0.527	-2.530*
	Cálculo informal	.45	0.112	4.030***	-.33	0.500	-2.000
	Conceptos informales	.29	0.115	2.516*	.22	0.440	1.512
	COMPETENCIAS FORMALES						
	Convencionalismos	.29	.124	2.334*	0	0.500	0
	Hechos numéricos	.19	.117	1.647	.111	0.600	.555
	Cálculo formal	.03	.108	-0.297	-.111	0.333	-1.000
	Conceptos formales	.03	.098	0.329	-.333	0.707	-1.414

Nota: DM = Diferencia de Medias; ET = Error Típico de las diferencias; t = Estadístico t de Student.

*<.05**<.01***<.001.

3.4. *Análisis de la interacción*

Además, se realizaron análisis complementarios con el fin de analizar las diferencias entre los grupos. De este modo, en función de la estructura factorial y de las medidas obtenidas en el TEMA 3, los datos fueron ajustados a un modelo estructural de variables latentes (Figura 1). Este modelo ha permitido profundizar en el análisis de las mejoras estadísticamente significativas en las competencias matemáticas en el GT y el GC dada la interacción entre la gravedad de las DAM y los momentos de evaluación (pretest y postest). Además, se controló el efecto de la edad, género y CI.

Como se puede apreciar en la Figura 1, las variables latentes F1 y F2 representan las medidas de las competencias matemáticas informales y formales respectivamente, en el momento 1 (pretest). Las variables latentes F3 y F4 representan las mismas medidas en el momento 2 (postest). Las estimaciones entre la *variable latente grupo* con cada una de las variables latentes en el post - test (F3 y F4) reflejan la estimación estandarizada entre GT vs. GC (valores estimados expresados sin paréntesis); GT-leve vs. GC-leve (estimaciones entre paréntesis) y GT-moderado vs. GC (estimaciones entre llaves).

En concreto, el signo positivo podría interpretarse como indicativo de mejora tanto en las competencias informales como formales al comparar el GT con el GC (el GT-leve comparado con el GC-leve; y el GT-moderado comparado con el GC moderado).

En este sentido, los resultados derivados de los análisis complementarios, confirmaron que en términos generales el GT mejoraba más que el GC tanto en las competencias informales (b = .133, p < .05) como en las formales (b = .300, p < .05). Específicamente, en relación a la interacción, se observaron mejoras significativas en el GT-leve frente al GC-leve en las competencias formales (b = .232, p < .05), pero no así en las informales (b = .067, p = .132). Finalmente, la comparación entre GT-moderado vs GC-moderado, asociados a mayor grado de gravedad en las DAM, mostró que el GT obtenía mejoras significativas frente al GC en las competencias medidas ($b_{Informal}$ = .213, p < .05) (b_{Formal} = .393, p < .05). Estos valores, superiores a las anteriores asociaciones, explicaron un mayor efecto de la intervención en estudiantes con gravedad moderada, entre el momento 1 (pretest) y el momento 2 (postest).

4. Discusión

El objetivo planteado en este trabajo fue analizar la eficacia de la RDI (González - Castro et al., 2014) frente a la metodología de aprendizaje tradicional, en

 BY-NC

estudiantes con DAM con un nivel de gravedad leve y moderado. Los resultados de los análisis realizados, revelaron tres ideas principales: 1) Los estudiantes que trabajaron con la estrategia obtuvieron mejores resultados que el GC tanto en las competencias matemáticas informales como formales; 2) El grupo que recibió la intervención mejoró significativamente en todas las competencias informales y formales, mientras que el GC mostró una evolución significativamente positiva solo en algunas de las competencias; 3) La intervención con la estrategia resultó positiva tanto cuando la gravedad de las DAM era leve como cuando era moderada, sin embargo, cuando se siguió una metodología tradicional la eficacia resultó más llamativa cuando la gravedad era leve.

Teniendo en cuenta estos aspectos, cabe destacar en primer lugar, que tal y como observaron González - Castro et al. (2014) tras aplicar la estrategia RDI en estudiantes sin dificultades de aprendizaje (DA), los beneficios se producen en todas las variables, obteniendo una mejora estadísticamente significativa en comparación con aquellos estudiantes que no recibían la intervención con la estrategia (GC). En este estudio previo, únicamente dos variables no mostraron diferencias entre los grupos, los hechos numéricos y el cálculo formal, que tal y como plantearon los autores, son habilidades recogidas en el currículo en las que la enseñanza reglada establece mayor énfasis y se entrenan de forma más específica. En todo caso, en el presente estudio todas las variables (informales y formales) presentaron diferencias entre el GT y el GC. En este sentido, los estudiantes con DAM presentan dificultades a este nivel (Montague, 2011) que siguiendo a Krawec et al. (2012) precisan de una intervención y enseñanza explícita. A diferencia de estudiantes sin DAM, aquellos que presentan DAM no mejoran independientemente de la metodología, sino que precisan de estrategias específicas que les permitan adquirir estas competencias informales y formales. Esta es una de las conclusiones que se deriva del presente trabajo y una de las ventajas de la estrategia RDI en lenguaje informatizado, que ha mostrado tras tres meses de entrenamiento una evolución positiva de las competencias matemáticas básicas evaluadas, en las que este grupo de estudiantes presenta dificultades (De Smedt y Gilmore, 2011). Si bien otras herramientas específicas como los programas “Number race” (Wilson et al., 2006) o “Rescue Calcularis” (Kucian et al., 2011) para estudiantes con DAM, han reflejado una mejora a este nivel, es preciso resaltar que en la RDI los ejercicios recogidos trabajan a través de la resolución de problemas (aspecto no incluido en los mencionados programas) las competencias matemáticas básicas para la adquisición de futuros aprendizajes de forma secuencial y progresivamente incrementando el grado de dificultad. También, en esta línea, Miranda, Taverner, Soriano, Meliá y Casañ (2008) subrayan los efectos positivos del uso del ordenador sobre el rendimiento matemático en la resolución de problemas en estudiantes con DAM. Sin embargo, estos autores (Miranda et al., 2008) observan que esta eficacia es mayor cuando el uso del ordenador se complementa con la instrucción directa el profesor destacando que la combinación de ambos aspectos tiene mayores beneficios sobre la resolución y autorregulación cognitiva.

En segundo lugar, con respecto a la evolución del pretest al postest, los resultados mostraron que no sólo se daban diferencias entre el GT y el GC, sino que, la evolución del pretest al postest resultaba estadísticamente significativa en el GT en todas las variables evaluadas (informales y formales) pero no así en el GC. Estas diferencias entre el pretest y el postest se produjeron en los dos niveles de gravedad (leve y moderado) en el GT. Sin embargo, en el GC la evolución fue significativa con cierta disminución en las puntuaciones en comparación de cantidades, cálculo informal y conceptos informales cuando la gravedad era leve, y en numeración y comparación de cantidades cuando la gravedad era moderada. Sin embargo, en la competencia formal las diferencias fueron significativas solo en convencionalismos en el nivel de gravedad leve, pero en ninguna de las variables en el nivel de gravedad moderado. Podría relacionarse esta disminución en las puntuaciones, sobre todo, en el nivel de gravedad leve con el hecho de que este grupo de estudiantes reciben atención menos individualizada que aquellos estudiantes con mayores dificultades (por ejemplo, con un nivel de gravedad moderado). Además, estos déficits se incrementan a medida que avanza la escolaridad y, por definición, tienen un carácter permanente (Kucian y von Aster, 2015).

En este sentido, los análisis complementarios realizados para controlar la posible interacción entre los niveles de gravedad y las medidas recogidas en el pretest y el postest, apoyan la idea de que la estrategia de intervención RDI es más eficaz que las metodologías tradicionales, especialmente cuando los estudiantes presentan DAM con un nivel de gravedad moderado.

En definitiva, los resultados de este trabajo apuntan que la estrategia computerizada RDI es eficaz incluso cuando los estudiantes presentan grandes dificultades para el aprendizaje de las matemáticas. Estos resultados se relacionarían con que la herramienta secuencia las tareas en función del grado de dificultad, es individualizada, está adaptada al nivel del estudiante y permite la repetición de las tareas de forma continuada, aspectos destacados en el metaanálisis de Ise y Schulte - Körne (2013) como característicos de una intervención efectiva o exitosa. Además, el entrenamiento con la RDI se inicia con la presentación de la información icónica (imágenes) que en otros trabajos también ha mostrado ser muy efectiva en estos primeros niveles educativos (Pape y Tchoshanov, 2001), especialmente cuando el alumnado presenta DAM (Gersten et al., 2009).

 BY-NC

Finalmente, es preciso destacar algunas limitaciones del presente trabajo. La primera de ellas se encuentra relacionada con el tamaño muestral y la falta de equivalencia entre los grupos que, por ejemplo, en el caso del GC en el nivel de gravedad moderada, está formado por 9 estudiantes. Por otro lado, dado que la intervención está orientada al entrenamiento de la competencia matemática y la resolución de problemas, resultaría necesario incorporar una medida específica de la eficacia en la resolución de problemas matemáticos con el fin de conocer la evolución en este sentido. Por último, dada la estructura de la estrategia, resultaría adecuado analizar no sólo la eficacia en el resultado, sino también el proceso que realizan los estudiantes durante el entrenamiento con la estrategia, así como, su motivación y actitud hacia la misma, la cual, podría interferir con la eficacia de la misma. En cualquier caso, cabe destacar la necesidad de llevar a cabo intervenciones ajustadas al perfil del estudiante que, en el futuro, resultaría interesante comparar su eficacia en función del formato utilizado (ordenador, Tablet, papel y lápiz, etc.).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a la financiación de un Proyecto I+D+i de carácter nacional (EDU2015-65023-P), un proyecto regional (FC/15/GRUPIN14/053) y una beca del programa Severo Ochoa (BP14/030).

Referencias bibliográficas

APA. (2014). *Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales. DSM-5.* [Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, Five Edition]. Madrid: E. Médica Panamericana.

Arbuckle, J. L. (2010). *SPSS (Version 19.0) [Computer Program].* Chicago: SPSS.

Argibay, J. C. (2009). Muestra en investigación cuantitativa. *Subjetividad y Procesos Cognitivos, 13* (1), 13-29. Recuperado el 24 de noviembre de 2017 de: https://goo.gl/bQbtmT

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, *14* (12), 534-541.doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.007

Cueli, M., Areces, D., García, T., Rodríguez, C., Álvarez - García, D. y González - Castro, P. (2017). Learning Difficulties in Mathematics: An Intervention Proposal. En J. A. González - Pienda, A. Bernardo, J. C. Nuñez, y C. Rodríguez (Eds.), *Factors affecting academic performance* (pp. 173-191). Nueva York: Nova science publishers.

BY-NC

Cueli, M., González - Castro, P., Rodríguez, C., Núñez, J. C. y González - Pienda, J. A. (2018). Intervención sobre las variables afectivo - motivacionales relacionadas con el aprendizaje en matemáticas. *Educación XX1*, *21* (1), 375-393. doi: http://dx.doi.org/10.5944/educxx1.12233

Cueli, M., Rodríguez, C., Areces, D., García, T. y González - Castro, P. (En prensa). Mejora del aprendizaje autorregulado en matemáticas a través de una aplicación hipermedia: diferencias en función del rendimiento académico y el conocimiento previo. *The Spanish Journal of Psychology*. doi:10.1017/sjp.2017.63

De Smedt, B. y Gilmore, C. K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, *108* (2), 278-292. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jecp.2010.09.003

Geary, D. C. (2003). Learning disabilities in arithmetic: Problem - solving differences and cognitive deficits. In H. L. Swanson, K. R., Harris, y S. Graham (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (pp. 199-212). New York: Guildford Press.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P. y Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research*, *79* (3), 1202-1242.doi: http://dx.doi.org/10.3102/0034654309334431

Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2003). *The Test of Early Mathematics Ability* (3rd ed.). Austin, TX: Pro Ed.

Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: test de competencia matemática básica*. (Madrid: TEA Ediciones.

González - Castro, P., Cueli, M., Cabeza, L., Álvarez - García, D. y Rodríguez, C. (2014). Improving basic math skills through integrated dynamic representation strategies. *Psicothema*, *26* (3), 378-384. doi: 10.7334/psicothema2013.284

González - Castro, P., Cueli, M., Areces, D., Rodríguez, C. y Sideridis, G. (2016). Improvement of Word Problem Solving and Basic Mathematics Competencies in Students with Attention Deficit / Hyperactivity Disorder and Mathematical Learning. *Learning Disabilities Research and Practice*, *31* (3), 142-155. doi: 10.1111/ldrp.12106

Ise, E. y Schulte - Körne, G. (2013). Symptoms, diagnosis, and treatment of dyscalculia. *Zeitschrift für Kinder - und Jugendpsychiatrie und Psychotherapie*, *41* (4), 271-282. doi: 10.1024/1422-4917/a000241

Kadosh, R. D., Dowker, A., Heine, A., Kaufmann, L. y Kucian, K. (2013). Interventions for improving numerical abilities: Present and future. *Trends in Neuroscience and Education*, *2* (2), 85-93. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.tine.2013.04.001

Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H.,... y Nuerk, H. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, *4*, 516, doi: 10.3389/fpsyg.2013.00516

Kingsdorf, S. y Krawec, J. (2014). Error Analysis of Mathematical Word Problem Solving Across Students with and without Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *29* (2), 66-74. doi: http://dx.doi.org/10.1111/ldrp.12029

Kline, R. B. (2011). *Principles and practice of structural equation modeling.* New York: Guilford Press.

Krawec, J., Huang, J., Montague, M., Kressler, B. y Melia, A. (2012). The effects of cognitive strategy instruction on knowledge of math problem solving processes of middle school students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, *36* (2), 80-92. doi: http: //dx.doi.org/10.1177/0731948712463368

 BY-NC

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Hezi, B., Schönmann, C., Plangger, F., Galli, M. Martin, E., y von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, *57* (3), 782-795. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.neuroimage.doi: 2011.01.070

Kucian, K. y von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *European Journal of Pediatrics*, *174*, 1- 13. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s00431-014-2455-7

Mayer, R. E. (2004). *Psicología de la educación*. Madrid: Pearson Educación.

Miranda, A. y Gil - Lario, M. D. (2001). Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: concepto, manifestaciones y procedimientos de manejo. *Revista de Neurología Clínica*, *2* (1), 55-71.

Miranda, A., Meliá, A. y Taverner, R. (2009). Habilidades matemáticas y funcionamiento ejecutivo de niños con trastorno por déficit. *Psicothema*, *21* (1), 63-69

Miranda, A., Taverner, R., Soriano, M., Meliá, A. y Casañ, P. (2008). Aplicación de nuevas tecnologías con estudiantes con dificultades de aprendizaje en la solución de problemas matemáticos: la 'escuela submarina'. *Revista de Neurología*, *48* (S1), 59-63.

Montague, M. (2011). Mathematics. En V. G. Spencer y Boon, R. T. (Eds.), *Best practices for the inclusive classroom*, (pp. 200-225). USA: ProfrockPress Inc.

Pape, S. J. y Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, *40* (2), 118-127.

Powell, S. R., Cirino, P. T. y Malone, A. S. (2017). Child - Level Predictors of Responsiveness to Evidence - Based Mathematics Intervention. *Exceptional Children*, *83* (4) 359-377. doi: https: //doi.org/10.1177/0014402917690728

Presentación, M. J., Siegenthaler, R., Pinto, V., Mercader, J. y Miranda, A. (2014). Math Skills and Executive Functioning in Preschool: Clinical and Ecological Evaluation. *Revista de Psicodidáctica*, *20* (1), 65-82. doi: http://dx.doi.org/10.1387/RevPsicodidact.11086

Presentación, M. J., Mercader, J., Siegenthaler, R., Fernández - Andrés, I. y Miranda, A. (2015). Funcionamiento ejecutivo y motivación en niños de educación infantil con riesgo de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista de Neurología*, *60* (1), 81-85.

Raghubar, K., Cirino, P., Barnes, M., Ewing - Cobbs, L., Fletcher, J. y Fuchs, L. (2009). Errors in multi-digit arithmetic and behavioral inattention in children with math difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *42* (4), 356-371. doi: http://dx.doi.org/10.1177/0022219409335211

Romero, P. J. F. y Lavigne, C. R. (2005). *Dificultades en el aprendizaje: unificación de criterios diagnósticos*. Málaga (España): Universidad de Málaga.

Shaffer, D., Fisher, P., Lucas, C. P., Dulcan, M. K. y Schwab - Stone, M. E. (2000). Diagnostic interview schedule for children version IV (NIMH DISC-IV): Description, differences from previous versions and reliability of some common diagnoses. *Journal of the American Academy of Child and Adolescent Psychiatry*, *39* (1), 28-38. doi: http://dx.doi.org/10.1097/00004583-200001000-00014

Swanson, H. L., Hoskyn, M. y Lee, C. M. (1999). *Interventions for students with learning disabilities*. New York, NY: Guilford.

Valle, A., Rodríguez, S., Cabanach, R. G., Núñez, J. C., González - Pienda, J. A. y Rosário, P. (2009). Diferencias en rendimiento académico según los niveles de las estrategias cognitivas y de las estrategias de autorregulación. *SUMMA Psicológica UST*, *6* (2), 31-42.

Van Garderen, D. y Montague, M. (2003). Visual - spatial representations and mathematical problem solving. *Learning Disabilities Research and Practice*, *18* (4), 246-254. doi: 10.1093/deafed/enm022

Van Garderen, D., Scheuermann, A. y Jackson, C. (2012). Developing Representational Ability in Mathematics for Students With Learning Disabilities: A Content Analysis of Grades 6 and 7 Textbooks. *Learning Disability Quarterly*, *35* (1) 24-38. doi: 10.1177/0731948711429726

Wechsler, D. (2005). *The Wechsler Intelligence Scale for Children - 4 th edition*. London: Pearson Assessment.

Wilson, A. J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S. K., Cohen, L. y Cohen, D. (2006). Principles underlying the design of "The Number Race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral Brain Function*, *2*, 19. doi: http://dx.doi.org/10.1186/ 1744-9081-2-19

Zawojewski, J. S. y Lesh, R. (2003). A model and modeling perspective on problem solving. In R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving* (pp. 317-328). Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum.

Autores

Débora Areces. Universidad de Oviedo, España. arecesdebora@uniovi.es

Marisol Cueli. Universidad de Oviedo, España. cuelimarisol@uniovi.es

Trinidad García. Universidad de Oviedo, España. garciatrinidad@uniovi.es

Celestino Rodríguez. Universidad de Oviedo, España. rodriguezcelestino@uniovi.es

Paloma González - Castro. Universidad de Oviedo, España. mgcastro@uniovi.es

 CC BY-NC

Andrea Barojas Gómez, Ignacio Garnica Dovala

COMPRENSIÓN DE NOCIONES DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL MEDIADA POR LA LSM EN EL AULA DE SORDOS [17-21]: ESTUDIO DE CASOS

Comprehension of notions of the decimal metric system measured by the lsm in classroom of deaf [17-21]: case study

RESUMEN

Un problema central de la enseñanza de las matemáticas del Sordo es la comunicación entre docente y aprendiz, situación que exige reconocer las Lenguas de Señas como naturales. Nuestra investigación parte de este principio y se orienta a la comprensión de la Lengua de Señas Mexicana (LSM) en su relación con nociones matemáticas que se desarrollan en el aula de Sordos, específicamente a la de su gramática y a la construcción de Señas relativas a nociones del sistema métrico decimal (SMD). Se propone un modelo de comunicación para desarrollar tres procesos en el aula: enseñanza, indagación e investigación que propició la constitución de Señas pertinentes a cada una de nueve nociones: siete de matemáticas y dos de instrumentos de medición. Se realizó en condiciones de tiempo real en el aula con ocho jóvenes Sordos. Los resultados evidencian la relevancia del reconocimiento antes descrito y la necesaria presencia de la lengua escrita.

PALABRAS CLAVE:

- *Sordo*
- *Comunicación*
- *LSM*
- *Señas*
- *SMD*

ABSTRACT

A central problem of the teaching of the mathematics of the Deaf is communication between teacher and student, a situation that requires the recognition of the Languages of Signs as naturals. Our research starts from this principle and is oriented to the understanding of the Mexican Sign Language (LSM) in its relation mathematical notions that are developed in the classroom of Deaf, specifically to the one of its grammar and to the construction of Signs related to notions of the decimal metric system (DMS). A communication model is proposed to develop three processes in the classroom: teaching, research and inquiry that led to the construction of Signs pertinent to each of nine notions: seven of mathematics and two of instruments of measurement. It was performed in real - time conditions in the classroom with eight young Deaf people. The results show the relevance of the above described recognition and the necessary presence of the written language.

KEY WORDS:

- *Deaf*
- *Communication*
- *LSM*
- *Signs*
- *DMS*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (3): 317-344.
Recepción: Febrero 29, 2016 / Aceptación: Octubre 31, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2033

RESUMO

Um problema central do ensino da matemática para os Sordo é a comunicação entre professor e aluno, uma situação que requer reconhecendo linguagens de sinais como natural. Nossa pesquisa começa a partir desse principio e está orientada para a compressão da Linguagem de Sinais Mexicana (LSM) em sua relação com noções matemáticas que são desenvolvidas na sala de aula dos Surdos, especificamente para a gramática e a constituição de Sinais em relação a noções do sistema métrico (SM). Um modelo de comunicação e proposto para desenvolver três processos na sala de aula: ensino, inquérito e investigação que levou ao estabelecimento de Sinais relevantes para cada uma das nove noções: sete em matemática e dois de instrumentos de medição. Foi realizado em condições de tempo real na sala de aula com oito jovens surdos. Os resultados demonstram a importância de reconhecimento descrito acima e a presença necessária da linguagem escrita.

PALAVRAS CHAVE:

- *Surdo*
- *Uma comunicação*
- *LSM*
- *Sinais*
- *SMD*

RÉSUMÉ

Un problème central des mathématiques de l'enseignement Sourds est la communication entre l'enseignant et l'élève, une situation qui exige la reconnaissance des langues des signes comme naturel. Notre enquête sur ce principe et vise à comprendre la Langue des Signes Mexicaine (LSM) dans leur relation avec les notions mathématiques développées dans la salle de classe Sourds, en particulier celui de sa grammaire et la mise en place de Signes sur les notions le système métrique décimal (SMD). Un modèle de communication est proposé de développer trois processus en classe: l'enseignement, de recherche et d'enquête qui ont conduit à la mise en place de Signes pertinents chacun neuf notions: sept en mathématiques et deux instruments de mesure. Elle a été réalisée dans des conditions en temps réel dans la salle de classe avec huit jeunes sourds. Elle a été réalisée dans des conditions en temps réel dans la salle de classe avec huit jeunes sourds. Les résultats démontrent la pertinence de la reconnaissance décrite ci-dessus et la présence nécessaire de la langue écrite.

MOTS CLÉS:

- *Sourds*
- *Communication*
- *LSM*
- *Signes*
- *SMD*

1. Introducción

El objetivo de esta investigación, cualitativa con estudio de casos, fue estudiar la gramática e la Lengua de Señas Mexicana (LSM) en el contexto de procesos de adquisición de nociones matemáticas por parte de una comunidad de jóvenes sordos. Partimos del reconocimiento de la LSM como lengua natural, en este sentido y ante la complejidad de la "Seña" como unidad de análisis para comprender el proceso de comunicación de mensajes contenidos de nociones matemáticas, así como considerar las expresiones escritas en condición mínima –expresión numérica y expresión *correlativa escrita: 7 –siete*, como ejemplo - se procedió a identificar, caracterizar y analizar "Señas" pertinentes a nociones matemáticas asociadas al Sistema Métrico Decimal (SMD). La constitución y propuesta de ellas se realizó en el aula en el curso de tres procesos *–enseñanza, indagación* e *investigación–* con la participación fundamental de estudiantes sordos, miembros de una comunidad escolar. Los procedimientos para la constitución y propuesta de las señas fueron establecidos por la comunidad sorda. El desarrollo de la investigación se realizó ante el planteamiento de las preguntas siguientes: ¿Cuáles son los alcances y limitaciones del sordo, usuario de la LSM en los proceso de comunicación y de comprensión de las nociones del SMD asociadas a la cantidad de peso?, ¿cuáles son las características fundamentales de las señas relacionadas con el lenguaje matemático correspondientes a las nociones de cantidad de peso? y ¿cuáles son las señas propuestas que favorecen la adquisición de las nociones de cantidad de peso? Y los objetivos son: a) Identificar los niveles de competencia lingüística y comunicativa de la LSM de los sordos en el aula; b) identificar y caracterizar las señas correspondientes a las nociones de cantidad de peso y las vinculadas; c) evaluar la adquisición de las nociones de cantidad de peso, con base en las señas propuestas y acordadas e d) identificar las nociones adquiridas resultado del proceso de enseñanza en el aula de sordos.

El motivo de la investigación fue por la labor docente realizada con jóvenes sordos señantes, mediante el uso de la LSM como medio de comunicación; de la reflexión sobre la falta de planes y programas de estudio de matemáticas dirigidos a la comunidad sorda; la falta de capacitación en el uso de la LSM de los docentes; del alto porcentaje de inserción tardía al sistema escolarizado; y por la deserción, consecuencia de ausencias metodológicas y educativas apropiadas. Su antecedente es un estudio sobre *"Procesos de adquisición del conocimiento matemático y de la lengua escrita ante la privación de la percepción auditiva"* realizado en el ciclo escolar 2009-2010, bajo los objetivos de un Acuerdo Académico que el Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) estableció con Grupo Tessera, A.C., organización no gubernamental (ONG). Los resultados obtenidos en las actividades enfocadas a la adquisición de conocimientos matemáticos y a la expresión escrita no fueron los esperados, pero su análisis posibilitó plantear una nueva estrategia sustentada en el uso de LSM y en la identificación de señas precisas para las nociones matemáticas relacionadas con la cantidad de peso, en un contexto de competencia lingüística y de comunicación de la LSM para la comprensión de nociones del SMD.

 BY-NC

2. Marco teórico

Los aportes teóricos se centraron en los fundamentos de la Gramática de la LSM, en los de los conceptos matemáticos implícitos y en el tratado de la convención del metro y el sistema internacional de unidades, las nociones matemáticas asociadas a los conceptos: sistema métrico y número decimal.

2.1. *Gramática de la LSM*

La lengua de señas, lengua natural de los sordos, que se expresa con las manos y acompañada de expresiones faciales y corporales, así como mirada intencional, dotada de función lingüística para producir significados que se perciben por la vista y se organiza en un espacio gracias a las reglas y funciones que posee esta lengua, es decir, su propia gramática[1].

Las lenguas de señas no son reproducciones ni representaciones de la lengua oral, ni son universales, cada país de la comunidad sorda posee su propia lengua, por ejemplo ASL (American Sign Language) en Estados Unidos, Libras – LBS (Lingua Brasileira de Sinais) en Brasil.

Las señas se organizan siguiendo las reglas que definen los distintos niveles de la estructura de la lengua: fonológico, morfológico, sintáctico, semántico y pragmático de manera simultánea que les permite establecer un canal de comunicación visual y espacial con el fin de que los sordos transciendan de la conversación cotidiana a la construcción de conocimientos, a la discusión y reflexión de una amplia variedad temática. Cruz - Aldrete (2008) indica que:

> ...es indudable que exista avances cuantitativos en la lingüística de las lenguas de señas; sin embargo es evidente que aún se desconocen muchos aspectos gramaticales, fonológicos y semánticos de ellas, y que todavía se enfrentan problemas metodológicos para la recolección del corpus y de su transcripción. La lingüística de las Lenguas de Señas es una disciplina muy joven, y en América Latina apenas se está desarrollando... (p.17).

En la formación de las señas se usan las manos, principal articulador, aunque no el único.

[1] En la lengua de señas, la estructura gramatical, no es la misma que en la lengua oral, es decir, el orden de las palabras no es igual con el de las señas en el momento de formar oraciones. En la lengua oral, el orden es: sujeto - verbo - objeto. Y en la lengua señas hay dos formas: sujeto - objeto - verbo. La otra forma es: tiempo - lugar - sujeto - objeto - verbo.

BY-NC

Al intentar describir cómo se articulan las señas, lo primero que nos viene en la mente es ¿cuál mano uso para producir las señas?, ¿mano derecha o mano izquierda?, en esos casos no hay reglas sobre uso de las manos, depende si la persona es zurda o diestra, por esta razón se prefiere usar términos *mano activa (MAC)* referente a la mano que se utiliza con frecuencia y *mano débil (MD)* para referirnos a la otra mano. Esta investigación consideró el análisis morfosintáctico, los clasificadores y fonológico de las señas propuestas de las nociones matemáticas siguiendo lo establecido por Cruz - Aldrete (2008). Massone y Martínez (2012) consideran que los clasificadores, desde el punto de vista de la lingüística, existen porque: a) son morfemas productivos; b) son identificables y pueden adscribirse a una entidad del mundo; c) son parte del sistema lingüístico de la lengua de señas y no parte del componente gestual, ya que pertenecen a la estructura gramatical interna de la seña; d) en la mayoría de los casos se derivan de un sustantivo correspondiente en significado, es decir, que el sustantivo o la seña independientemente puede rastrearse en la lengua.

Y en lo fonológico, se estudia la expresión que se manifiesta a través de tres segmentos, elementos centrales de la estructura de las señas, así como las reglas y regularidades que rigen la articulación de las señas.

- *Matriz segmental (MS):* Estos segmentos corresponden a los rasgos que describen la actividad de la mano durante la producción del segmento, es decir si se mueve o no la mano y si es así de qué manera lo hace; por tanto, la matriz está definida por secuencias de detenciones y movimientos.
  - *Movimiento (M):* cambia algunos aspectos de la ubicación o de la configuración manual. Los rasgos articulatorios de este segmento representan estados, por tanto, se requiere especificar un estado inicial y un estado final del conjunto de estos rasgos para indicar los cambios durante la producción.
  - *Detención (D):* la posición de la mano no cambia. Los rasgos articulatorios tienen un estado fijo, por ello sólo se requiere de una matriz de rasgos articulatorios para describir este tipo de segmento.
  - *Transición (T):* se le llama transición al segmento en el cual cambian algunos rasgos articulatorios de la estructura de la mano para arribar a un estado final. En función del tiempo suele ser de una duración menor a los segmentos anteriores.
- *Matriz articulatoria (MA):* esta matriz está constituida por cuatro grupos que en su conjunto describen la postura de la mano y su ubicación en el momento de la realización de la seña:

 BY-NC

- *Configuración de la mano (CM):* la forma de la mano desde cómo se colocan los dedos.
- *Ubicación (UB):* es el punto de contacto, donde se realiza la articulación.
- *Dirección (DI):* se refiere hacia qué lugar del espacio se dirige la seña y qué parte de la mano se orienta frente algún lugar del cuerpo.
- *Orientación (OR):* que hace referencia a la parte de la mano que está frente al plano horizontal con respecto al piso, es decir la palma de la mano.

- *Matriz de rasgos no manuales (RNM):* Está formada por rasgos que dan cuenta de las expresiones de la cara, movimientos de la boca, nariz, cejas, ojos, o posturas del cuerpo articulados significativamente y que junto con la actividad de las manos constituyen las señas.

En la Figura 1, se presenta el ejemplo de una seña (peso), con el fin de mostrar los tres segmentos, así como sus correspondientes elementos.

MS	Inicia con detención (D) y realiza el movimiento (M) en forma lineal vertical y concluyendo en detención (D).
CM	Dedos anular y meñique cerrados. El índice y el medio extendido y la yema del pulgar se pone entre ellos, la punta del índice hacia arriba y la del medio hacia abajo.
UB	A la altura del pecho.
DI	Movimientos ligeros en forma lineal vertical de abajo para arriba apoyándose en la palma de la otra mano.
OR	Palma de la mano hacia un lado del cuerpo de la persona que está usando la seña.
MD	Mano izquierda
MS	Mano con la configuración correspondiente se mantiene en detención (D).
CM	Mano abierta con los dedos extendidos juntos excepto el pulgar que se mantiene separado.
UB	A la altura del pecho un poco debajo de la otra mano.
DI	Base
OR	Palma hacia arriba.
RNM	No se presenta.

Figura 1. Descripción de la seña PESO con los parámetros fonológicos

BY-NC

Para la transcripción de esta lengua, en esta investigación entendemos que "Una transcripción es un sistema de notación, que implica no sólo la descripción de la configuración de la mano, sino de todos los elementos lingüísticos que están presentes en la deixis espacial, o el uso de los rasgos no manuales..." (Cruz - Aldrete, 2008, p. 94). Y se ha empleado un sistema de glosas[2]. Las glosas reflejan tanto los componentes manuales de la LSM como las expresiones faciales y corporales que aparecen en cada una de las producciones en señas que se usan para marcar las modalidades interrogativas, negativas, afirmativas, dubitativas y exclamativas. Para representar la transcripción de las señas se usaron palabras del español transcritas en mayúsculas. Por ejemplo, si en una transcripción en glosa leemos: UNO - MIL - GRAMO - CONVERTIR - KILO - CUÁNTO, la interpretación al español no es *un mil gramo convertir kilo cuanto* sino Mil gramos ¿Cuántos kilos son? (véase Figura 2).

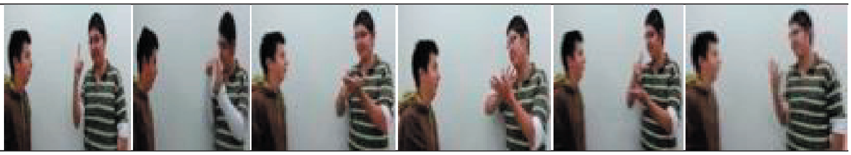
LSM						
Glosas	UNO	MIL	GRAMO	CONVERTIR	KILO	CUÁNTO ¿?(RNM)
Español	Mil gramos ¿cuántos kilos son?					

Figura 2. Transcripción en glosas e interpretación al español

2.2. *Aspectos cognoscitivos*

Mayberry (2002) menciona que la sordera no es una variable determinante para el desarrollo cognitivo, sino que la falta de experiencias tanto en el medio físico

2 …glosar significa transcribir un Signo o una secuencia signada en lengua de Signos con palabras en español. Glosar no es lo mismo que traducir. Las glosas representan signos y hasta cierto punto intentan reproducir el significado del signo, pero no de una manera exacta. Es por esto, que no deben tomarse como una traducción perfecta del signo, porque habrá contextos en los que en español se utilizará esa misma palabra, pero en lengua de signos no se utilizará el mismo signo; o al contrario, contextos en lengua de signos en los que se utilice ese mismo signo pero no se traduzca por esa palabra en español. El objetivo principal, por tanto, es reproducir la esencia y la estructura de la frase en lengua de signos, no es su significado en lengua oral. (Rodríguez, 1992, p. 24).

 BY-NC

como en el mundo social y en concreto la ausencia de lenguaje parecen ser factores determinantes en el desarrollo cognitivo.

Así, el desarrollo cognitivo del niño sordo está la función de su nivel de lenguaje, de su intercambio con el medio y de sus experiencias cotidianas. Sobre la adquisición de la lengua de Emmorey (2002) concluye que los sordos procesan en las mismas etapas que los oyentes. La lengua de señas:

> ... no se basa en los aspectos del lenguaje icónicos y analógicos, más bien construyen un sistema gramatical según principios lingüísticos. Parece haber... temprana ventaja comunicativa a través de gestos, ya que los niños sordos, desde pequeños, distinguen entre gestos comunicativos (manuales o faciales) y gestos lingüísticos (signos léxicos y gramaticales expresiones faciales). (p. 203).

Respecto a la funcionalidad de la lengua de señas, destaca que se basa en la percepción visual y se caracteriza por ser una lengua viso - espacial, en la que el movimiento y el espacio se utilizan para la transmisión de información y se sustenta en la temporalidad y linealidad. Concluye de los estudios sobre la cognición viso - espacial que las habilidades para crear imágenes mentales y transformarlas son parte integral de la producción y comprensión de las señas y que su uso constante puede llevar a una mejora de las habilidades dentro del dominio de la lengua de señas lo cual tiene importantes implicaciones para la interacción del lenguaje y la cognición. En cuanto al estudio sobre la memoria, observa, a partir de unas pruebas sobre memorización de palabras en señas, que los sordos tendían a conservar las propiedades fonológicas, pero no las propiedades semánticas de las señas.

2.3. *Visualización*

Sacks (1989) afirma que la existencia de un lenguaje visual, la Seña, y el aumento de la percepción vinculada con la de la inteligencia visual que aporta su aprendizaje, muestra la flexibilidad casi ilimitada y los recursos del sistema nervioso, del cerebro humano, ante una nueva situación y la adaptación respectiva. Aclara que los señantes muestran la misma lateralización cerebral que los hablantes, no obstante que su lenguaje es naturalmente espacio - visual (y por lo tanto corresponde al hemisferio derecho). Enfatiza:

> Este descubrimiento... Confirma en el plano neurológico, que la seña *es* un lenguaje y que el cerebro la aborda como tal, aunque sea visual más que auditiva, y aunque se organice espacial más que secuencialmente. Y corresponde como lenguaje al hemisferio izquierdo del cerebro que está

> especializado biológicamente en esa función concreta.... El hecho de que la seña dependa del hemisferio izquierdo, pese a su organización espacial indica que hay una representación de espacio <<lingüístico>> en el cerebro completamente distinta del espacio <<topográfico>> ordinario.” (p. 147).

La idea de compensación de la capacidad visual ante la pérdida auditiva no se atribuye sólo a quienes son usuarios de la lengua de señas. Todos, incluso los poslingüísticos hablantes, experimentan refuerzo de la sensibilidad visual, y tienden hacia una orientación más visual. Lo cual nos conduce a la noción de esquema de compensación visual, propio de la cognición visual.

2.4. *Matemática Educativa*

Los conceptos matemáticos que le subyacen a esta investigación son los relacionados con el *sistema de números decimales*, en particular las fracciones; y del sistema métrico decimal. la unidad de medida del peso. Las nociones de *estimación –perceptual–* , *conteo*, *valor de posición*, *aditividad*, *partición decimal y las representaciones numéricas respectivas* en LSM, se trataron en su sentido concreto. La estrategia para su tratamiento consistió en el uso de los instrumentos de *medición*, básculas y balanzas, las primeras para medir cantidades hasta de 10 kg, y para cantidades menores a un gramo las segundas, específicamente la balanza granataria de tres brazos.

2.4.1. *Fracción decimal*

Desde el punto de vista formal, una fracción decimal se define por su representación en el continuo de la recta numérica como un conjunto de puntos que se construyen bajo el procedimiento de la idea de partición decimal. Courant y Robbins, (1979) precisan la idea en los siguientes términos:

> ...por ejemplo, los números obtenidos por subdivisión de cada intervalo unidad en 10, luego en 100, 1000, etc., segmentos iguales. Los puntos así obtenidos corresponden a <<fracciones decimales>>; p. ej., $0.12 = {}^{1}\!/_{10} + {}^{2}\!/_{100}$ corresponde al punto situado en el primer intervalo unidad, en el segundo subintervalo de longitud 10^{-1}, y en el origen del tercer <<sub-sub>> intervalo de longitud 10^{-2}. (a^{-n} significa ${}^{1}\!/_{10^{n}}$). Si una *fracción decimal* contiene *n* cifras después del punto, tiene la forma: $f = z + a_1\,10^{-1} + a_2\,10^{-2} + a_3\,10^{-3} + \ldots + a_n\,10^{-n}$, donde z es un entero y la a son cifras (0, 1, 2, ..., 9) que indican las décimas, centésimas, y así sucesivamente. El número f se representa en el sistema decimal en la forma abreviada $z,\ a_1a_2a_3 \ldots a_n$. (p. 6).

 BY-NC

Freudenthal (1983) propuso una estrategia didáctica para la enseñanza como condición para el arribo a la comprensión formal del concepto: "… se me ocurrió que la didáctica usual, que apunta a la enseñanza de reglas para el lugar del punto decimal puede conducir a un bloqueo de la intuición y de la necesidad de la intuición." (Freudenthal, 1983, p. 173). Para remontar las formas tradicionales de la enseñanza de los decimales planteó el nivel más elemental, al que denominó "escalera de refinamiento" (véase la Figura 3).

	.	
1000		
100		
10		
1		
0	.	1
	.	01
	.	001

Figura 3. Escalera de refinamiento (tomado de Freudenthal, 1983, p. 173)

2.4.2. *La medición*

Russell (1973) señaló que "La medición es un método que establece una correspondencia única y recíproca entre todas las magnitudes de un tipo y entre todos los números enteros, racionales o reales, según el caso" (Russell, 1973, p. 533). Roberts (1979) precisa que:

> ... la idea encaja con los ejemplos de la Física tales como temperatura o masa. En el caso de la temperatura, la medición es la asignación de números que preservan la relación observada "más caliente que" en el caso de la masa, la relación que se preserva es "más pesado que" (p. 50).

Definiciones elementales. Las magnitudes *fundamentales* —longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente, temperatura e intensidad luminosa— son abstracciones susceptibles de ser cuantificadas. El Sistema Internacional de *unidades* (SI) incluye las denominadas magnitudes *derivadas*, entre otras las geométricas, cinemáticas, estáticas, etc.

El peso, concepto central en nuestro estudio, se define tomando en consideración la concepción de la *magnitud masa*, como se establece en Feymman, Leigton y Sands (1971):

(cc) BY-NC

> ... como medida cuantitativa de la inercia, y podemos medir masa, por ejemplo, haciendo girar un objeto en círculo a determinada velocidad y midiendo cuánta fuerza necesitamos para mantenerlo en círculo. De esta manera, encontramos cierta cantidad de masa para cada objeto. (p. 9-2).

Así concebida, para la física clásica el peso será definido como la medida de la fuerza que ejerce la gravedad sobre la masa del cuerpo. La unidad de masa, kilogramo (kg), es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo. "Actualmente la unidad de masa está representada por un cilindro de platino iridio de diámetro y altura iguales (39 mm)." (Nava, Pezet y Gutiérrez, 2001, p.22).

3. Metodología

Se trató de una investigación cualitativa (Taylor & Bogdan, 1987), con base en la observación directa de las señas de la LSM referentes a las nociones de *cantidad de peso*, en un contexto educativo que se centró en los acontecimientos dentro del aula; y de estudio de casos (Pérez, 2009) de carácter descriptivo e interpretativo del fenómeno en estudio. Se trataron de manera simultánea las cantidades de longitud y las de peso que tienen como referente común al SMD. Este estudio tomó como antecedente en la constitución de las señas la parte correspondiente al tratamiento de la magnitud longitud y centró su objetivo en la magnitud peso.

Con los ocho jóvenes sordos se formaron dos grupos, cada uno de cuatro estudiantes, en el primer grupo se trataron las nociones de cantidad de longitud ─no se incluye en este estudio─ y en el segundo, las nociones de cantidad de peso. Las actividades diseñadas sobre el uso y comunicación de señas para las nociones en foco, se realizaron durante sesenta sesiones de cuatro horas, alternas, cada quince días, en el desarrollo de tres procesos de investigación en condiciones de tiempo real en el aula: (1) *enseñanza* de las nociones en foco a cada grupo; (2) *indagación o comunicación entre pares*, con el segundo grupo, para identificar los niveles de competencia lingüística y comunicativa, bajo la estrategia de comunicación entre pares, para observar el uso de la LSM y de las señas propuestas de las nociones adquiridas, así como para informar de la comprensión de mensajes con contenidos matemáticos; (3) *investigación*, *en Cámara Gessell*, que consistió en la aplicación de entrevistas individuales sobre las nociones en cuestión, con un guion en LSM. La Figura 4 muestra el modelo de los tres procesos de la investigación en el aula.

 CC BY-NC

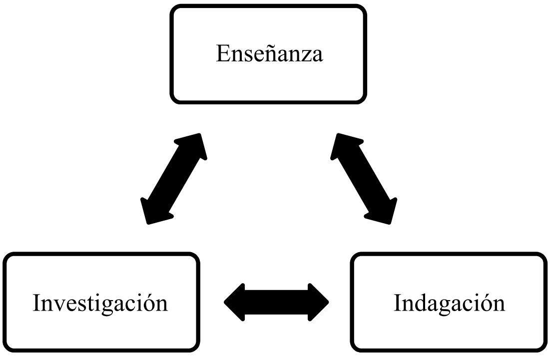


Figura 4. Modelo de los tres procesos de la investigación en el aula

3.1. *Escenario y Población*

Los procesos de investigación se realizaron en una de las aulas de la Biblioteca de Física, Matemática y Matemática Educativa del Cinvestav. Se dirigió a una población sorda con características heterogéneas, integrada por ocho jóvenes en edades de 17-21 años, con pérdida auditiva profunda, bilateral y prelocutivos, es decir, sordera previa a la adquisición del lenguaje. Dos de ellos con discapacidad agregada: en un caso, Síndrome de Usher —condición genética que implica pérdida de audición congénita y después pérdida gradual de la visión por causa de retinitis pigmentaria — y en el otro, parálisis cerebral originada por una lesión en las áreas del movimiento, presentándose en este caso, una paraplejía en los miembros inferiores. Todos los jóvenes son usuarios de LSM, con distintos grados de competencia lingüística y comunicativa en razón de que la adquirieron en distintos momentos cronológicos de sus vidas y en distintos lugares y cursan la educación básica en una ONG. Para los fines de esta investigación ─estudio de casos pertenecientes al segundo grupo─ a cada uno de ellos se le identificó con un código, las dos primeras letras de sus nombres: *Da*; *Di*; *Mx*; *Os.*

3.2. *Instrumentos y Técnica*

Los instrumentos que se usaron en la *enseñanza* fueron: planes de las actividades diseñadas, básculas romanas, dinamómetro y balanza granataria de tres brazos, con las cuales se atendieron las nociones en foco y objetos concretos para el pesaje, así como también las fotografías, el uso de pizarrón, papel y lápiz. En la *indagación* se aplicaron instrumentos para el control y verificación de la lectura – escritura – de expresiones numéricas y viceversa, relacionadas con la partición decimal con el uso de papel y lápiz; y en el proceso de *investigación*, se usaron guiones de entrevista individual para su aplicación en LSM. En los procesos de *indagación* y de *investigación* se realizaron las transcripciones en glosas e interpretación al español así como las fonológicas (Cruz - Aldrete, 2008) las cuales resultaron fundamentales para el análisis de la lengua misma. Para la identificación y comparación de señas asociadas a las nociones matemáticas que aquí se propusieron, se revisaron los diversos diccionarios de lengua de señas de México y de otros países[3]. Las técnicas de registro fueron: la bitácora, la videograbación de las actividades realizadas en los tres procesos.

3.3. *Comunicación en el aula de matemática educativa: un modelo*

La comunicación en el aula condujo a la estructuración de un modelo *ad-hoc* diseñado para el desarrollo de esta investigación (véase Figura 5). El modelo implicó la participación de dos personas, que fungieron, una como: 1) investigador en matemática educativa (IME), asesor y director de este proyecto de esta investigación. Y la otra persona como 2) investigadora en formación en matemática educativa (IFME) quien cumplió tres funciones: a) docente, desarrolló las actividades de enseñanza, y fungió también como: b) intérprete; Guardia (2010) señala que Burad (2008), a partir de la definición de Famularo (1995), expresa que "...el intérprete de lengua de señas - lengua hablada, es un mediador en la comunicación entre personas que se expresan mediante distintos códigos lingüísticos..." ([4]) para "...igualar la situación de comunicación entre las personas sordas usuarias de la LS (Lengua de Señas) y las personas no competentes en la misma" (De los Santos y Lara, 2001; p. 30); también, como c) IFME, planeó y analizó los resultados del proceso de indagación e investigación. Estas dos personas se distinguen en función de la competencia lingüística y comunicativa mediante el uso de la lengua oral por una parte y de la lengua de señas por la otra, pero también por la competencia formal de conocimiento matemático. Ambas interactuaron e intervinieron en la realización de los actos comunicativos durante el desarrollo de las actividades en el aula.

[3] Diccionarios de LSM (López, Rodríguez, Zamora & San Esteban, 2006; Miranda, 1987). Diccionarios digitalizados (Español-LSM DIELSEME 1 y 2).

[4] Lengua de señas de otros países: diccionarios digitalizados de Argentina_(Manos que hablan), Brasil (Diccionário da Lingua Brasileira de Sinais), España (sématos.eu), Colombia (Diccionario Básico de la Lengua de Señas Colombiana; Diccionario de señas. Fundación HEATAD(Herramientas Tecnológicas para Ayuda Humanitaria)) y Texas, E.U. (Texas Math Sign Language Dicctionariy).

https://goo.gl/gcA8Un

 BY-NC

Los estudiantes, requirieron de interpretación en LSM en todas las actividades diseñadas y desarrolladas en los tres procesos de la investigación en el aula. Es decir, las interacciones comunicativas entre el IME, no competente en la misma, y los estudiantes, fueron mediadas por la lengua accesible para cada uno de ellos. Por otro lado el *informante*, "...persona sorda conocedora del lenguaje gestual" (Rodríguez, 1992) (véase Figura 5) solamente fue consultado respecto a las señas construidas y propuestas por el grupo, relacionadas con las nociones matemáticas, a fin de obtener la aprobación de la comunidad sorda de las señas propuestas.

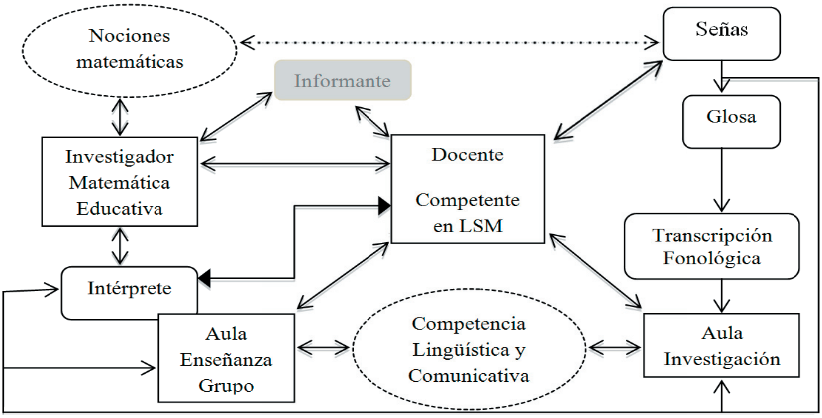


Figura 5. Modelo de comunicación en el aula

La comunicación en el aula de *enseñanza*, procedió de la manera siguiente: la docente, competente en LSM, se comunica con los estudiantes en LSM y asume el papel de intérprete, de manera oral, para el IME y viceversa, para que el mensaje que éste último emite, pueda ser trasmitido adecuadamente a los estudiantes. En el aula de *indagación*, sólo se presencia la comunicación entre pares, dos estudiantes sordos que se comunican sin la intervención de los IME, uno de ellos *Mx*, competente en LSM, no sólo observa y analiza el uso de LSM y de las señas propuestas, surgidas en las actividades diseñadas en el aula de enseñanza, sino que también asume el papel de intérprete de los intercambios comunicativos que se establecieron entre los estudiantes. En el aula de *investigación*, se aplicaron entrevistas individuales semiestructuradas y se puso en juego el uso de las señas propuestas; éstas se emergieron en la enseñanza y construyeron en la indagación ante los procesos de comunicación entre pares. Se diseñó un guion que planteó las seis reiteraciones respectivas a las particiones decimales correspondientes. Los criterios de análisis fueron: a) partición decimal; b) señas propuestas y c) representación numérica en LSM.

BY-NC

Para caracterizar los niveles de competencia lingüística y comunicativa en LSM, se aplicó una evaluación para identificarlos mediada por señas, debido a que no existe un formato estandarizado de evaluación, se decidió utilizar elementos y estructuras gramaticales propios de la LSM: léxico, fonológico y morfosintáctico que se realizó en tres sesiones- En la primera, cada estudiante, contó un cuento en LSM; en la segunda, cada estudiante explicó el tema de peso y en la tercera, una vez recogida la información de la primera y segunda sesión, el estudiante de nivel alto, *Mx*, explicó el tema ante sus compañeros. En el léxico se observaron las señas en *uso común en aula* (UCA) de las *nociones matemáticas* (NM) en foco, por ejemplo, en el tratamiento de longitud y peso usan la seña de partir en diez como referencia a la partición decimal. En el fonológico se evaluó: *configuración de la mano* (CM); *dirección* (DI); *ubicación* (UB); *movimiento* (M); *orientación* (OR); y *rasgos no manuales* (RNM). En el morfosintáctico: los *clasificadores* (Cl); la *dactilología* (DA) y la *estructura gramatical* de la LSM (G. LSM).

4. Resultados

Se presentan los resultados que se obtuvieron de los análisis del desarrollo de los tres procesos de los análisis del desarrollo de los tres procesos.

El uso de los clasificadores en LSM junto con las señas propuestas permitió identificar y diferenciar niveles de comprensión de las nociones y de sus representaciones numéricas en LSM. Las transcripciones fonológicas de las nueve señas propuestas – kilogramo, gramo, decigramo, centigramo, miligramo, tonelada, partir en diez, balanza granataria, dinamómetro – permitieron avanzar hacia una caracterización de las mismas y diseñar estrategias en la adquisición de las nociones con base en su uso.

4.1. *Enseñanza: nociones adquiridas*

A continuación, se presenta el desempeño en aula de dos casos; *Mx*, por su nivel de competencia lingüística y sus respuestas apoyadas en las acciones realizadas sobre el objeto y *Da*, por sus respuestas inmediatas sin necesidad de recurrir a los objetos.

4.1.1. *Partición decimal*

Se plantearon las siguientes preguntas: *¿Se puede dividir una bolsa de 1 kg en diez partes iguales?*, *¿Cuánto pesa cada bolsa, después de dividirla en 10 partes iguales?*

 BY-NC

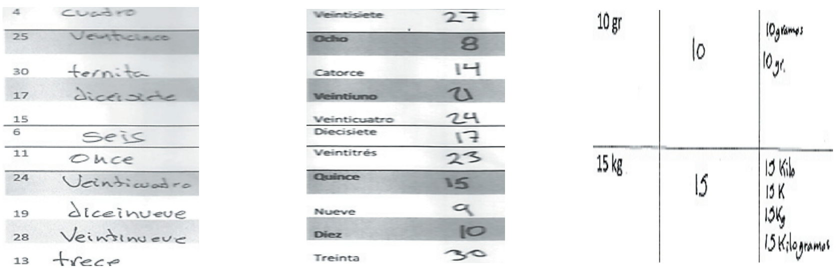
Mx. Antes de responder, pensó con el apoyo de los dedos de la mano y respondió: 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100 juntar 1000 gr. Y realizó el empaque de sustancias en 100 gramos, con precisión.

Da. Respondió que 1kg si se puede dividir en diez y en cada parte tiene 100. En el trabajo de la actividad diseñada, no comprendió como hacer la partición de diez partes iguales, debido a la deficiencia en el uso de las señas, en la parte fonológica (véase la tabla i) copió el trabajo de su compañero *Os.*

4.1.2. *Representación numérica*

Se aplicaron tres instrumentos en expresión escrita. El primero, nombres de la representación numérica, el segundo, representación numérica de los nombres de los números y el tercero, representación numérica y unidad de peso.

Mx, en el primero, escribió cuatro correctamente (25, 6, 11, 28, 13), cinco se aproxima (4, 30, 17, 24, 19), uno erróneamente (28) y uno, no lo respondió (15) (véase Figura 6). En el segundo instrumento, escribió correctamente todas las representaciones numéricas, (véase Figura 6). Tercer instrumento, respondió dos formas de expresar la unidad de peso, cuando la expresión de la cantidad está en gramo: 10 gr, escribió 10 gramos y 10 gr. Y cuatro formas de expresar la unidad de peso, cuando la expresión de cantidad está en kg: por ejemplo; 15 kg: 15 kilo, 15 k, 15, kg, 15 kilogramos, (véase Figura 6).



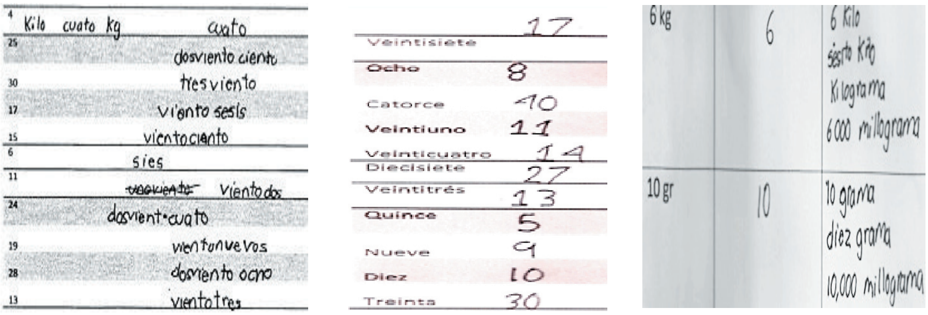
Nombres de la representación numérica.	Representación numérica de los nombres de los números.	Representación numérica y unidad de peso.

Figura 6. Resultados de Mx en los tres instrumentos

Da. En los tres instrumentos, escribió los nombres de todos los números presentados en la hoja, aunque no los recordó, ya que estuvo mucho tiempo pensando cómo escribir el nombre del número, (véase Figura 7).

En el segundo, escribió cuatro números correctamente y siete incorrectamente; requirió tiempo para dar las respuestas. Se observó que tuvo dificultades ya que no conoce bien los nombres de los números, como lo muestra el caso del número 15, que escribió vienticesito (véase Figura 7).

En el tercero, en la tercera columna, del encabezado *unidad* escribió 4 formas de representar la información escrita en la primera columna, referente a kg: 6 kg, escribió 6 kilo, siesto kilo, *kilograma* y 6 000 *millograma*. Respondió tres formas de la información referente a gramo; 10 grama, diez *grama* y 10, 000 *millograma*, (véase Figura7).



Nombres de la representación numérica.	Representación numérica de los nombres de los números.	Representación numérica y unidad de peso.

Figura 7. Resultados de Da en los tres instrumentos

4.1.3. *De las señas propuestas para las nociones de cantidad de magnitud peso*

Mx usó las señas para tonelada, gramo, decigramo, centigramo y miligramo basadas en el acuerdo con el grupo, sin embargo, para kilogramo, con expresión corporal y facial mostró la dificultad de usarla, y para la noción de partición decimal, referente a los números enteros, usó la seña propuesta, pero para cantidades menores a la unidad usó señas que describen las acciones realizadas sobre objeto.

En la actividad diseñada para la noción de medición, con el propósito de observar el uso de la LSM se utilizó la balanza granataria que cuenta con tres brazos con divisiones mínimas de 0.1 gr. En el brazo que representa los 10 gr, del lado derecho se encuentra el índice del fiel, en este caso tiene un cero; esto, a *Mx*

 BY-NC

le causó duda con respecto a la barra de medida que inicia, del lado izquierdo, empezando con el cero y siguiendo hasta 10; al ver el 0 del lado del índice del fiel, lado derecho, no comprendió porque esa balanza tiene un cero en dos lugares distintos.

En la actividad de pesar diferentes cantidades de frijoles, en la balanza granataria fue muy preciso con el peso y usó la seña de punto, correspondiente al peso, como referente al punto decimal.

Da usó las señas para tonelada, gramo, decigramo, centigramo y miligramo basadas en el acuerdo con el grupo. Para cantidades menores a la unidad usó las señas propuestas acompañadas con la seña *casi no se ve.*

En la actividad diseñada para la noción de medición, utilizó la báscula romana y balanza granataria, con fluidez y dando respuestas con precisión. Y en la actividad de pesar diferentes cantidades de sustancias, en la balanza granataria fue muy preciso con el peso y usó la seña de punto, correspondiente al peso, como referente al punto decimal.

4.2. *Indagación: comunicación entre pares*

Cada sesión de indagación consistió en dar indicaciones de trabajo al estudiante de nivel de competencia lingüística alto, *Mx* para que trabajara con cada uno de los integrantes del grupo y propiciar la comunicación entre pares sobre las nociones matemáticas y sin el apoyo de objetos concretos. En otras ocasiones, *Mx* guío las actividades frente al grupo. (véase Figura 8).

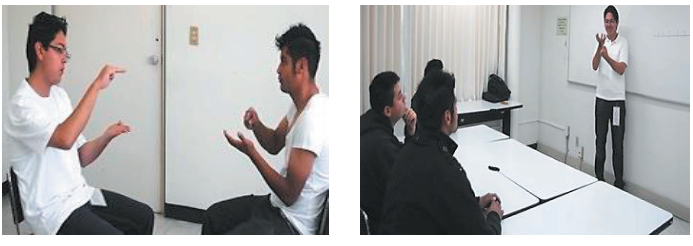


Figura 8. Comunicación entre pares en LSM, en pares y grupal

La tabla i muestra los niveles de competencia lingüística de los cuatro estudiantes identificados, se distinguen en tres niveles: alto (A), medio (M) y bajo (B).

BY-NC

TABLA I
Niveles de competencia lingüística

Caso	*Léxico*		*Fonológico*						*Morfosintáctico*		
	UCA	NM	CM	DI	UB	M	OR	RNM	DA	G.LSM	CL
Da	B	B	A	B	A	B	A	B	A	B	B
Di	B	B	A	A	A	B	A	B	A	B	B
Mx	M	M	A	A	A	A	A	A	A	M	A
Os	B	B	B	B	B	B	B	A	B	B	A

Nivel	A	M	B

4.3. *Investigación*

El uso de los clasificadores, Barojas, Garnica y Cruz (en prensa), junto con las señas propuestas condujo a identificar y diferenciar niveles de *"dotación de sentido"* por parte de los estudiantes a las nociones matemáticas contenidas en los mensajes de comunicación y de sus representaciones numéricas en LSM. Los criterios para el análisis fueron: partición decimal, señas propuestas y representación numérica.

4.3.1. *Partición decimal*

Mx, una vez que comprendió el proceso de la partición decimal de un kilogramo, se pasó a situaciones de 6, 8 y 10 kilogramos presentando dificultades en la partición decimal de 6 kilogramos, una vez resuelto esa situación, procedió sin problema con las otras cantidades referidas a kilogramos.

Cuando se obtuvo la respuesta de la *primera partición decimal* del kilogramo, se preguntó sobre la partición decimal de los 100 gramos. *Mx* explicó el proceso de la segunda partición, sin embargo, requirió tiempo para pensar y estar seguro de sus respuestas.

[10] Entrevistadora: En los 100 gramos ¿se puede obtener menos de 100 gramos?
Mx: ¿Menos? Si se puede
[11] E: ¿Cuánto?
Mx: Lo mismo, partiendo en 10. En un montón de 1 kilo de frijol se saca un montón y se quita el resto. En ese montón se parte y se corta, en ese tiene 10 gramos *(se queda pensando)* espera voy pensar, espera...

 BY-NC

> Si se puede obtener en 10 gramos que es más pequeño porque adentro sobra un montón más pequeño que fue partido en 10 en cada montón y si juntamos son 100 gramos. Pero si se puede obtener menos.

Se le preguntó la razón por la que contestó que la partición decimal de cualquier cantidad es el mismo proceso. *Mx* se centró en el término gramo, dejando a un lado el de kilo.

[12] E: ...te pregunté si en los 100 gramos se puede obtener menos y respondiste que sí que es lo mismo, partiendo, te pregunto ¿Por qué dices que es lo mismo?
Mx: Porque siempre es igual y están conectados, por ejemplo, cuando tú me dijiste que 1 kilo sucede lo mismo, partiendo en 10. En la siguiente que fue 1000, ¿son 10? No; es otra cosa, pero es lo mismo porque están unidos el kilo, el gramo, el centigramo, decigramo, el centigramo, el miligramo en ese si se puede partir en 10 siempre va hacer lo mismo porque están conectados y son iguales.

Di, comprendió el proceso a partir de un kilogramo, solucionó las otras situaciones diferentes a un kilogramo hasta los miligramos; así como con otras cantidades, como *los diez kilogramos.* Donde afirmó que se puede realizar; al principio presentó dificultades en la primera partición y se centró en el número mil para facilitar la obtención de los resultados.

[131] E: 10 kilos o.... Cambia a gramos ¿cuánto?
Di: *(se queda pensando)*
[132] E: Cambia a gramos
Di: *(se queda pensando)* 10 000 gramos
[133] E: Yo te pregunté si se podía separar los montones y dijiste que, si se puede, partiendo en diez. En cada montón ¿cuánto pesa?
Di: *(se queda pensando) (piensa para él mismo: MONTÓN (cl) ...CONJUNTO (cl) 10 SEGMENTO (cl) SEGMENTO (cl) 10... 1 100 NO... 10 SEGMENTO (cl) YA MONTON (cl) MONTON (cl) MONTON (cl) MONTON (cl)*
[134] E: Partir en diez es igual a los diez montones, pero cada montón, ¿cuánto pesa? y dices que sientes que 500
Di: *(se queda pensando y piensa para él mismo: 5 NO 6, 7, 8)* son 900, no, no, no, no, deja pensar *(se queda pensando y piensa para él mismo: PENSAR (cl)...OLVIDAR...500 500)*
[135] E: 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, 500, juntos ¿cuánto es?
Di: *(se queda pensando)* son 90 000 gramos
[136] E: ¿90 000? Mira 500 y 500, ¿cuánto es?
Di: *(se queda penando y piensa para él mismo: 900, 900)* ¿900? ¿9?
[137] E: No, 500 y 500, juntos ¿cuántos es?
Di: *(se queda pensando)* 9 000, no *(se queda pensando)*
[138] E: 500 y 500, júntalos, ¿cuánto es?
Di: *(se queda pensando)* 9 000

BY-NC

4.3.2. *Representación numérica*

Mx se enfrentó a un problema de comunicación que, superó al lograr la compresión de las preguntas planteadas por la entrevistadora.

[21] E:	¿Cómo escribes en números la cantidad que representa un centigramo?
Di:	*(se queda pensando)*
[22] E:	En números
Mx:	¿En números? ¿Qué? ¿Cuál? ¿Cuánto?
[23] E:	Perdón, el decigramo
Mx:	¿decigramo? Bueno D E C I G R A M O *(deletrea)* decigramo
[24] E:	Pero en números, ¿cómo se escribe esa cantidad?
Mx:	Sí, pero ¿cuál número? ¿Cuánto? ¿Cuál?
[25] E:	La cantidad de decigramos ¿cuánto es?
Mx:	Sí, pero ¿cuál?
[26] E:	El decigramo
Mx:	Bueno C E *(deletreo)* ejemplo...
[27] E:	En números
Mx:	Si, dime el número
[28] E:	¿Cuánto es un decigramo?
Mx:	Si, si, espera, ya entendí, ¿el valor? *(se queda pensando)* Es 0.0 no, mal, perdón es 0.1

Una vez que logró comprender, expresó las respuestas correctas para representar en números, un decigramo; un centigramo y un miligramo,

[29] E:	¿Cuánto es un centigramo?
Mx:	*(se queda pensando)* ¿1 centigramo?
[30] E:	Si
Mx:	Es 0.01
[31] E:	¿El miligramo?
Mx:	El miligramo es 0.001...

Logró las 6 particiones correspondientes a otras cantidades distintas a un kilogramo. *Di* no comprendió la pregunta sobre la cantidad de veces que se realiza la partición decimal; se centró en el resultado de una de las partes de la partición decimal, y requirió tiempo para dar una respuesta. Usó las señas para pensar en la respuesta,

[5] E:	¿Cuántas bolsas?
Di:	*(Se queda pensando)* 1 bolsa de 100
[6] E:	Mira, el peso es de 100 gramos, está bien, pero ¿cuántas bolsas?
Di:	*(se queda pensando y piensa para él mismo: BOLSA (cl) HARINA PESADO BOLSA (cl)*

 BY-NC

A la pregunta por el significado de las representaciones numéricas: 0.1, 0.01, 0.001. *Di* requirió tiempo para pensar en la respuesta hasta que deletreó el nombre de cada uno de los submúltiplos de gramo y expresó las señas de decigramo y miligramo,

[42] E: Yo te pregunto ¿qué es 0.01?
Di: *(se queda pensando)*
[43] E: ¿Recuerdas el nombre?
Di: Es igual a C E N T I G R A M O S *(deletreo)*
[44] E: ... el 0.1 ¿qué es?
Di: El nombre es *(trata de acordarse)* D E C I G R A M O S *(deletreo)* decigramo *(seña)*
[45] E: ¿Qué es el 0.001?
Di: M I *(deletreo)* no, es M I L I G R A M O S *(deletreo)* miligramo *(seña)*

En la partición decimal de *los ocho kilogramos*, se cambió la pregunta por el nombre de las representaciones numéricas de la cuarta y sexta partición decimal. Para representar la cuarta partición decimal de los ocho kilogramos: 0.8 gramos, 8 decigramos, *Di* contestó en gramos,

[109] E: El 0.8 ¿qué significa?
Di: Gramo

Cuando la entrevistadora preguntó por el nombre de la representación numérica del decigramo correspondiente a la *cuarta partición* de los ocho kilogramos, *Di* estuvo muy concentrado en la representación de los contenidos de cada montón en gramos y requirió tiempo para pensar y respondió decigramos,

[110] E: Si es gramo, pero otra forma de decir
Di: *(se queda pensando)* 8 gramos *(se queda pensando)*
[111] E: Oye, ... *([Di] la interrumpe)*
Di: decigramo *(usó mal la seña)*
[112] E: decigramo *(corrección de la seña)*
Di: decigramo *(usa la correcta)*, ya

La entrevistadora preguntó el significado de la representación numérica: 0.008, *Di* dio la respuesta de inmediato y acertada,

[116] E: Eso, 0.008 gramos, ¿Qué significa?
Di: Miligramos

4.3.3. *Señas propuestas*

Las Figuras 9, 10, 11, 12, 13 y 14 corresponden a las presentaciones de cada una de seis ─partir en diez, kilogramo, gramo, decigramo, centigramo, miligramo─ de las nueve señas constituidas y sus respectivas descripciones. Por el limite de espacio, se presentan sólo en imagen las tres señas restantes (tonelada, balanza granataria y dinamómetro) (véase Figura 15, 16, 17).

Esta seña tiene dos movimientos diferentes.

Mano activa: abierta con todos los dedos extendidos y juntos, la yema del pulgar toca la palma de la mano; el antebrazo en posición inclinada y la palma de la mano apuntando hacia la cara de la persona que está usando la seña.

Mano débil: abierta con todos los dedos extendidos y separados, el antebrazo en posición inclinada con la palma hacia enfrente de la persona que está usando la seña.
Realización de la seña: con las manos, activa y débil, a la altura del pecho; se inicia insertando la mano activa entre el índice y el dedo medio de la mano débil, pasa al espacio de entre los dedos medio y anular y termina entre el anular y meñique; el paso de un espacio a otro es a manera de salto y termina con un movimiento rotatorio rápido de la mano activa con la palma hacia abajo.

Figura 9. Descripción de la seña: PARTIR EN DIEZ

La mano activa presenta dos configuraciones.

Mano activa 1: El anular y meñique cerrados. El índice y el medio extendido y la yema del pulgar se pone entre ellos, la punta del índice hacia arriba y la del medio hacia afuera y con la palma hacia un lado del cuerpo de la persona que está usando la seña.

Mano débil: abierta con los dedos extendidos juntos excepto el pulgar que se mantiene separado y con la palma hacia arriba.

Mano activa 2: Después de un movimiento circular de la mano activa 1 se cambia a la siguiente configuración: los dedos medio, anular y meñique cerrados, y el índice y el pulgar extendidos, separados y con la palma frente a la persona que está usando la seña.

Realización de la seña: con la mano activa 1 a la altura del pecho y la mano débil un poco más abajo; con la mano activa 1 se inicia un movimiento circular alrededor de la palma de la mano débil, con trayectoria hacia abajo y cambio de configuración de la mano activa 1 por la mano activa 2 y termina con la punta del pulgar hacia arriba y el costado del índice a la mitad de la palma de la mano débil.

Figura 10. Descripción de la seña: KILOGRAMO

 BY-NC

Mano activa: los dedos medio, anular y meñique cerrados. El índice y el pulgar extendidos y con la palma frente a la persona que está usando la seña.

Mano débil: abierta con los dedos extendidos juntos excepto el pulgar que se mantiene separado y con la palma hacia arriba.

Realización de la seña: con la mano activa a la altura del pecho y la mano débil más abajo; se inicia con la mano activa trazando una trayectoria lineal hacia abajo hasta tocar en el centro de la palma de la mano débil.

Figura 11. Descripción de la seña: GRAMO

La seña presenta dos configuraciones.

Mano activa 1: El índice extendido con la punta hacia arriba, y los demás juntos y semiflexionados; las yemas de los dedos medio y anular tocan la yema del pulgar, formando un círculo.

Mano débil: abierta con los dedos extendidos juntos excepto el pulgar que se mantiene separado y con la palma hacia arriba.

Mano activa 2: Después de un movimiento circular de la mano activa 1 se cambia a la siguiente configuración: los dedos medio, anular y meñique cerrados, y el índice y el pulgar extendidos, separados y con la palma frente a la persona que está usando la seña.

Realización de la seña: con la mano activa 1 a la altura del pecho y la mano débil un poco más abajo; con la mano activa 1 se inicia un movimiento circular alrededor de la palma de la mano débil, con trayectoria hacia abajo y cambio de configuración de la mano activa 1 por la mano activa 2 y termina con la punta del pulgar hacia arriba y el costado del índice a la mitad de la palma de la mano débil.

Figura 12. Descripción de la seña: DECIGRAMO

BY-NC

La seña tiene dos configuraciones.

Mano activa 1: índice, medio, anular y meñique juntos, semiflexionados, en posición cóncava con las puntas de los dedos hacia un lado de la persona que está usando la seña y el pulgar semiflexionado, se mantiene separado y la yema apuntando hacia los otros dedos; la palma hacia un lado de la persona que está usando la seña.

Mano débil: abierta con los dedos extendidos juntos excepto el pulgar que se mantiene separado y con la palma hacia arriba.

Mano activa 2: Después de un movimiento circular de la mano activa 1 sobre la mano débil, cambia la configuración: los dedos medio, anular y meñique cerrados, y el índice y el pulgar extendidos, separados y con la palma enfrente a la persona que está usando la seña.

Realización de la seña: con la mano activa 1 a la altura del pecho y la mano débil un poco más abajo; con la mano activa 1 se inicia un movimiento circular alrededor de palma de la mano débil, con trayectoria hacia abajo y cambio de configuración de la mano activa 1 por la mano activa 2 y termina con la punta del pulgar hacia arriba y el costado del índice a la mitad de la palma de la mano débil.

Figura 13. Descripción de la seña: CENTIGRAMO

La seña tiene dos configuraciones.

Mano activa 1: la yema del pulgar sobre la uña del meñique; el índice, el medio y el anular juntos, descansan en los dedos pulgar y meñique con la palma hacia abajo.

Mano débil: abierta con los dedos extendidos juntos excepto el pulgar que se mantiene separado y con la palma hacia arriba.

Mano activa 2: Después de un movimiento circular de la mano activa 1 sobre la mano débil, cambia la configuración: los dedos medio, anular y meñique cerrados, y el índice y el pulgar extendidos, separados y con la palma enfrente a la persona que está usando la seña.

Realización de la seña: con la mano activa 1 a la altura del pecho y la mano débil un poco más abajo; con la mano activa 1 se inicia un movimiento circular alrededor de palma de la mano débil, con trayectoria hacia abajo y cambio de configuración de la mano activa 1 por la mano activa 2 y termina con la punta del pulgar hacia arriba y el costado del índice a la mitad de la palma de la mano débil.

Figura 14. Descripción de la seña: MILIGRAMO

 BY-NC

Figura 15. Seña: TONELADA

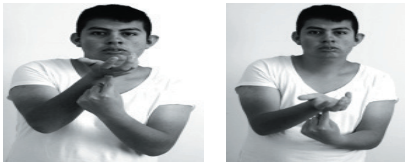


Figura 16. Seña: BALANZA GRANATARIA

Figura 17. Seña: DINAMÓMETRO

5. Conclusiones

La investigación destacó la importancia de la competencia lingüística y comunicativa y de disponer de las señas propias de las nociones matemáticas para el proceso cognitivo de los Sordos. La LSM requiere de un mayor desarrollo de señas relacionadas con las matemáticas; las señas propuestas constituyeron un apoyo sustantivo en la comunicación de mensajes contenidos de nociones matemáticas. Es necesario también identificar, precisar y acordar las señas vinculadas para fortalecer el proceso de *enseñanza*. No se logró la aplicación de un instrumento de evaluación de los resultados de la enseñanza de las nociones en foco que nos permitiera identificar niveles de su adquisición por parte de los estudiantes, la prioridad a la constitución y propuesta de las señas se convirtió en una restricción. Sin embargo, por las acciones realizadas durante la solución de las tareas en el aula *inducimos la dotación de sentido* de los estudiantes a las nociones matemáticas referidas. La efectividad de la enseñanza a Sordos requiere como componente importante, la competencia lingüística y comunicativa en LSM de la o el docente, así como de la existencia y/o acuerdo sobre las señas sustantivas del tema de enseñanza. En relación con el proceso de *indagación*, la comunicación entre pares contenida de mensajes matemáticos posibilitó el entendimiento de las nociones, cada vez más en la medida en que las señas se constituían con claridad creciente y se fortalecían en el retorno a la enseñanza. Los resultados de la aplicación de las entrevistas se centraron en tres nociones fundamentales —partición decimal, representación numérica y señas propuestas en su uso— La representación numérica asociada a la cantidad de la magnitud "peso" no la entienden, consecuencia del total desconocimiento de la noción de la unidad de medida (el gramo), no se logró diferenciar el referente de la seña para gramo como para precisar la noción de unidad de medida.

Respecto al método, se utilizaron tres procesos de la investigación en el aula: *enseñanza* -las actividades diseñadas y realizadas con la presencia de materiales concretos y las acciones sobre objeto-, gracias a ella se obtuvieron indicios de compresión de las nociones sobre partición decimal reiterada y del sentido de la unidad de medida: gramo. El modelo de comunicación diseñado resultó un apoyo fundamental para la comunicación con los Sordos, usuarios de LSM y los oyentes, no competentes; la *indagación* -la comunicación entre pares- es uno de los elementos significativos, ya que favorece un contexto eficiente en el desarrollo de habilidades comunicativas, y la *investigación* -las transcripciones fonológicas de las señas propuestas-, permite avanzar hacia una posible caracterización de las mismas y diseñar estrategias de enseñanza para la adquisición de las nociones con base en su uso.

Implementar un modelo bilingüe [LSM - Lengua escrita] es una demanda educativa de la comunidad sorda. Sin embargo el modelo en cuestión es de sumo complejo, si al modelo se agrega el lenguaje matemático necesario para la comunicación de su enseñanza mediada por las señas en el aula, el desafío crece de manera significativa. Por estas razones es de la mayor importancia comprender en primera instancia la gramática, en nuestro caso, de la LSM en su relación con conceptos matemáticos. Nuestros objetivos se condujeron en tal sentido y de los procesos de la investigación resultaron las primeras evidencias de la relación entre la gramática de la LSM con nociones del SMD y los indicios de la adquisición de esas nociones por parte de los estudiantes. Los resultados conducen al concepto de modelo exclusivo para sordos como condición de posibilidad de su transición a la lengua escrita y de ahí a un modelo inclusivo más fortalecido.

Se advierte la necesidad de fortalecer redes de comunicación entre docentes e investigadores mediante la comunicación de experiencias en el aula y de resultados de investigaciones asociadas al problema de la enseñanza de las matemáticas dirigida al Sordo.

 BY-NC

Referencias bibliográficas

Courant, R. y Robbins, H. (1979). *¿Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid: Ediciones Aguilar S.A.

Cruz – Aldrete, M. (2008). *Gramática de la lengua de señas mexicana*. (Tesis inédita de Doctorado). Centro de Estudios Lingüísticos y Literarios. Colegio de México, México.

Guardia, P. (2010). *El interprete de lengua de señas en la integración de niños sordos instituciones educativas comunes. (Parte III)*. Recuperado el15/08/2010 de https://goo.gl/Xrq5AL

De los Santos, E. y Lara, M. P (2001). *Técnicas de interpretación de lengua de signos*. España: Fundación CNSE

Emmorey, K. (2002). Language, Cognition and the Brain. Insights from sign language research. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates (LEA).

Feymman, R., Leighton, R. B. y Sands, R. (1971). *The Feymman Lectures on Physics. Mainly Mechanics, Radiation, and Heat T. I.* México: Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Holland: Kluwer Academic Publishers Group.

López, L. A., Rodríguez, R. M., Zamora, Ma. G. y San Esteban, S. (2006). *Mis manos que hablan. Lengua de señas para sordos*. México: Trillas.

Massone, Ma. I. y Martínez, R. A. (2012). *Curso de Lengua de Señas Argentina*. Parte IIIb. Recuperado el: 12/05/13 de https://goo.gl/gKEDnB

Mayberry, R. I. (2002). *Cognitive development in deaf children: the interface of language and perception in neuropsychology*. Recuperado el 25/10/2011 de https://goo.gl/vjhXcm

Miranda, J. C.(1987). *Lenguaje de Señas de México*. México: Asociación Mexicana de Sordos.

Nava, H., Pezet, F. y Gutiérrez, I. (2001). *El Sistema Internacional de Unidades (SI)*. México: CENAM (Centro Nacional de Metrología).

Pérez, M. (2009). *Métodos de investigación en educación*. Madrid:EOS.

Roberts, S. R. (1979). *Measurement theory with applications to decision making, utility, and the social science*. London: Adison - Wesley Publishing Company

Rodríguez, Ma. A. (1992). *Lenguaje de Signos*. Madrid: Federación de Asociaciones de Personas Sordas / CNSE/ Fundación Organización Nacional de Ciegos de España (ONCE).

Russell, B. (1973). *Ciencia y Filosofía*. Madrid: Ediciones Aguilar S.A.

Sacks, O. (1989). *Veo una voz. Viaje al mundo de los sordos*. España: Anagrama, S.A.

Taylor, S. J., & Bogdan, R). (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. España: Paidos.

Autores

Andrea Barojas Gómez. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN. (México). jandreabarojas@gmail.com

Ignacio Garnica Dovala. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN. (México). igarnica@cinvestav.mx

BY-NC

Soledad Estrella, Raimundo Olfos, Sergio Morales, Pedro Vidal - Szabó

ARGUMENTACIONES DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA SOBRE REPRESENTACIONES EXTERNAS DE DATOS: COMPONENTES LÓGICAS, NUMÉRICAS Y GEOMÉTRICAS

Primary school students' arguments regarding external data representations: logical, numerical, and geometric components

RESUMEN

Argumentar y representar son habilidades promovidas en los currículos escolares de muchos países. En este estudio, se presentan las argumentaciones sostenidas por seis estudiantes de grados distintos, desde primero a cuarto, sobre representaciones externas construidas por ellos. Se analizó la estructura de su argumentación respecto a algunas componentes presentes en estas representaciones mediante el modelo simple de Toulmin, realizando una interpretación de las argumentaciones e integrando la representación construida con la argumentación. Los elementos argumentativos verbales y gestuales parecen verse influidos por habilidades de expresión oral, conocimientos numéricos y geométricos de los estudiantes. Los argumentos sobre la componente lógica, variable, y la componente numérica, frecuencia, fueron verbalizados por los estudiantes, mientras que las componentes geométricas, base - lineal y linealidad - gráfica, fueron argumentados mediante el lenguaje oral, el gesto y la metaforización.

PALABRAS CLAVE:

- *Argumentación*
- *Representaciones de datos*
- *Modelo simple de Toulmin*

ABSTRACT

Arguing and representing are abilities promoted in the school curricula of many countries. This paper presents the arguments used by six students from grades one to four regarding external representations they created. The structure of the arguments is analyzed with respect to some of the components presented in these representations using Toulmin's simple model, interpreting the arguments, and integrating the representation created with the argumentation. Verbal and gestural argumentative elements appear to be influenced by the students' oral expression abilities and numerical and geometrical knowledge. The arguments about the logical component, the variable, and about the numerical component,

KEY WORDS:

- *Argument*
- *Data representations*
- *Toulmin's simple model*

CC BY NC

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (3): 345-370.
Recepción: Diciembre 5, 2016 / Aceptación: Octubre 30, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2034

the frequency, were verbalized by the students, while the linear components, the linear basis and the graphical linearity, were argued for using spoken language, gestures, and metaphors.

RESUMO

Argumentação e representam habilidades são promovidos nos currículos escolares de muitos países. Discussões realizadas por seis alunos da primeira à quarta série em representações externas construídas por eles são apresentados. a estrutura de seu argumento sobre alguns componentes presentes nestas representações foram analisados utilizando o modelo simples de Toulmin, realizando uma interpretação dos argumentos e integrando a representação argumento construído. Elementos verbais e gestuais argumentativos parecem ser influenciadas pela habilidade de falar, conhecimentos numérica e geométrica dos alunos. Argumentos sobre componente lógico variável, eo componente numérica, frequência, foram verbalizadas pelos alunos, enquanto os componentes lineares, base linear e linearidade gráfico, foram argumentou pela linguagem oral, gestos e metaforização.

PALAVRAS CHAVE:

- *Argumentação*
- *Representações de dados*
- *Modelo simples Toulmin*

RÉSUMÉ

Arguant et représentent les compétences sont promus dans les programmes scolaires de nombreux pays. Les discussions tenues par six étudiants de la première à la quatrième année sur les représentations extérieures construites par eux sont présentés. La structure de son argument concernant certains composants présents dans ces représentations ont été analysées à l'aide du modèle simple de Toulmin, d'effectuer une interprétation des arguments et l'intégration de la représentation argumentation construite. Éléments verbaux et gestuels argumentatifs semblent être influencés par l'expression orale, la connaissance numérique et géométrique des étudiants. Arguments sur la composante logique, variable, et la composante numérique, la fréquence, ont été verbalisées par les étudiants, tandis que les composants linéaires, une base linéaire et linéarité graphique, ont été argumenter par langue orale, les gestes et la métaphorisation.

MOTS CLÉS:

- *L'argumentation*
- *Les représentations de données*
- *Modèle Toulmin simple*

1. Introducción

La competencia de argumentar y razonar en estadística es actualmente un objetivo de los currículos escolares. Una persona alfabetizada estadísticamente además de leer e interpretar los datos, tablas, gráficos y medidas de resumen, puede utilizar

BY-NC

tales herramientas para argumentar con evidencias la validez de una aseveración (del Pino & Estrella, 2012).

Diversas investigaciones sostienen que el desarrollo de la alfabetización estadística toma largo tiempo y debe iniciarse desde los primeros años de la escuela (English, 2010, 2013; Franklin & Garfield, 2006; Shaughnessy, 2006). Varios investigadores en educación estadística han abordado el estudio de las representaciones gráficas (Friel, Curcio, & Bright, 2001; Aoyama, 2007; Pérez - Echeverría, Martí & Pozo, 2010) para promover el análisis exploratorio de datos (NCTM, 2000, 2009; Tukey, 1977) como un acercamiento a la alfabetización en el área, pero sin enfocarse en la argumentación.

El desarrollo del pensamiento matemático promovido por el currículo escolar nacional (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012) comprende, entre otros, el desarrollo de habilidades cognitivas relacionadas al pensamiento deductivo y lógico, en particular, la argumentación y representación. En tanto, los estándares de la matemática escolar propuestos por el NCTM (2000) consideran desde prekinder el desarrollo y evaluación de argumentos matemáticos y lógicos para justificar conclusiones, crear y usar representaciones para comunicar ideas, resolver problemas, modelar e interpretar fenómenos. Por otro lado, los programas de estudio de primaria en Chile señalan que la "habilidad de argumentar se expresa al descubrir inductivamente regularidades y patrones en sistemas naturales y matemáticos y tratar de convencer a otros de su validez." (MINEDUC, 2013, p. 32). Dichos programas, sugieren que los estudiantes al presentar sus soluciones a situaciones problemas puedan argumentar, discutir y fundamentar su razonamiento utilizando diversas formas de comunicación de sus ideas, incluyendo representaciones.

En cuanto a representar, MINEDUC (2013) propone que los estudiantes manejen una amplia variedad de representaciones y las manejen con fluidez, con el fin de lograr un aprendizaje significativo y desarrollen su pensamiento. No obstante, las indicaciones curriculares limitan el aprendizaje en educación primaria a que los estudiantes solo usen representaciones pictóricas, como diagramas y gráficos, para comunicar relaciones, sin considerar producciones originales e inéditas de los estudiantes.

El presente estudio contribuye a un área poco explorada en la literatura, la estructura de las argumentaciones sobre la representación externa construida por niños de los cuatro primeros niveles escolares. El propósito del estudio es caracterizar la argumentación dada por estudiantes de grados 1 a 4 respecto a algunas componentes de tipo lógica, numérica y geométrica de las representaciones gráficas de datos construidas por ellos.

 BY-NC

2. Marco conceptual

Pérez - Echeverría y Scheuer (2009) señalan que los sistemas externos de representación comparten el hecho de que la significación se hace a través de elementos gráficos que remiten a propiedades espaciales, como las propiedades bidimensionales, la alineación de izquierda a derecha, y espacios entre grupos de caracteres. Por tanto, en la construcción de representaciones gráficas necesariamente se coordinan componentes lineales y geométricas en un sistema de coordenadas. Saxe, Shaughnessy, Gearhart y Haldar (2013) estudiaron la coordinación de unidades sobre la recta, y encontraron que estudiantes de quinto grado tienen dificultades conceptuales en la coordinación de unidades numéricas y lineales en la recta numérica.

En consecuencia, al construir una representación externa según ciertos datos entregados, los estudiantes conectan sus conocimientos previos y algunos procedimientos, y operativamente utilizan esquemas mentales asociados a lo lógico, numérico y geométrico. Los recursos intelectuales que los estudiantes construyen al crear representaciones y construir comprensiones matemáticas y estadísticas, involucran algunos componentes específicos, como variable, frecuencia, base - lineal y linealidad - gráfica.

2.1. *Componente lógica*

En este estudio consideramos que la variable es una componente lógica que deriva de operaciones lógicas. La clasificación es una de las operaciones lógicas piagetanas para las que está capacitado el ser humano (Piaget, 1965), y consiste en reconocer propiedades similares de elementos que permiten definir diferentes clases, generándose una partición del conjunto de elementos en clases disjuntas.

En una situación de organización de datos, los niños se ven en la necesidad de clasificar identificando una propiedad común de los datos y que varía, la variable, y que es susceptible de ser clasificada en categorías de la variable.

2.2. *Componente numérica*

Los niños al construir representaciones de datos, activan su competencia numérica asociada a la organización de datos, la que está construida sobre habilidades matemáticas básicas de aparición temprana en el desarrollo de los niños y precursoras de habilidades más complejas. Entre las habilidades matemáticas emergen la subitización y el conteo, que devienen en el cardinal de un conjunto, y que en estadística se reconoce como frecuencia absoluta, de una categoría de la variable (Estrella, 2016).

Así, la obtención del cardinal involucra la adquisición y empleo del conteo, y la comprensión de este principio de cardinalidad permitirá a los niños relacionar conjuntos de tamaños diferentes en función de su cantidad (e.g., Le Corre & Carey, 2007). Al representar los datos, los estudiantes pueden obtener significado de los mismos identificando tendencias, o visualizando el comportamiento de la "mayoría" al comparar las frecuencias absolutas (cardinal) o al subitizar la cantidad de elementos que más se repiten.

2.3. *Componente geométrica*

Piaget y su equipo mostraron que los niños a partir de los 7 a 9 años, demuestran concepciones euclidianas de propiedades transitivas y asociativas de longitudes, y la conservación de la longitud a través de subdivisiones (Piaget, 1965). Estudios más recientes han corroborado los hallazgos centrales de Piaget relacionados con su tratamiento geométrico, en especial la investigación de neurociencia cognitiva y psicológica, muestra que los niños pueden tener intuiciones sobre la representación de número como magnitud lineal sobre una recta, y el carácter de este ordenamiento refleja equidistancias entre números consecutivos (Dehaene, 1997; Laski y Siegler, 2007; Siegler y Booth, 2004; Thompson y Siegler, 2010, citados por Saxe et al., 2013).

Los datos graficados en un sistema de coordenadas implícito permiten visualizar el comportamiento de una variable o la relación entre variables. Como representación externa, el gráfico puede presentar los ejes y en presencia de uno de ellos, como rectas numéricas graduadas, la *frecuencia* es asociada explícitamente a cada categoría de la variable y representada a través de la longitud máxima.

En este estudio denominamos *base - lineal* a aquella base cuyo origen es una línea (explícita o implícita) horizontal, vertical o diagonal, en la cual se inicia la organización de datos del gráfico construido. Denominamos *linealidad - gráfica* a aquella linealidad característica de una organización de datos en columnas, y en que simultáneamente se conservan las distancias entre los espacios entre cada unidad de datos representados. Las componentes base - lineal y linealidad - gráfica, aunque ausentes en la literatura sobre representaciones gráficas, como se verá más adelante, son esenciales para comparar y visualizar alguna relación entre los datos.

2.4. *Argumentación*

Además de la construcción de representaciones, los estudiantes pueden verbalizar sus ideas sobre sus representaciones externas, y pueden producir y reconocer la

 BY-NC

función de los argumentos espontáneamente (Mercier & Sperber, 2011). Algunos estudios han mostrado que la capacidad de producir argumentos justificativos aparece alrededor de los 8 años (Garcia - Mila et al., 2016).

Martí y Scheuer (2015) afirman que las matemáticas están intrínsecamente relacionadas con el uso de diferentes sistemas semióticos, como el lenguaje gestual, verbal y gráfico. Los niños pueden formular explicaciones diversas mediante gestos que permiten comunicar sus ideas. Aparicio y Cantoral (2006) entienden el aspecto gestual como comunicación cultural que sirve para enlazar el significado de un concepto y la comunicación de las nociones e imágenes internas. Los gestos como origen del lenguaje humano, denotan y preceden al lenguaje escrito y a las representaciones, y permiten una comunicación más universal que el lenguaje verbal (Aparicio y Cantoral, 2006; Arzarello, 2006; Corballis, 2003).

Sfard (2009) valora la experiencia cultural y destaca el uso del gesto como una capacidad espontánea para relacionar movimientos del cuerpo a ciertos aspectos familiares del mundo. La importancia de la comunicación gestual no sólo reside en el enfatizar ciertas ideas verbalizadas, sino que es todo un andamiaje comunicacional; así Sfard (2009) afirma que cualquier acto de comunicación es ya un acto de pensar, por lo tanto, el pensamiento puede manifestarse de cualquier forma comunicativa, incluyendo lo gestual. En esta línea, la cognición corporizada como perspectiva más orgánica de la cognición (Thompson & Varela, 2001), entiende que la mente está presente en la propia experiencia corpórea cotidiana.

En sus estudios de argumentación, Toulmin (1958) considera que al aseverar algo respecto a ciertos datos existe un compromiso del sujeto con dicha afirmación, y que tal aseveración original dispone de elementos justificatorios que la apoyan. Continuando esta idea, los niños pueden expresar cómo a partir de ciertos datos han pasado a hacer una conclusión porque existe una cierta garantía implícita de ello que apoya tal conclusión.

El modelo simple de Toulmin considera tres elementos que juegan distintos papeles en términos argumentativos: las conclusiones (C), que se refieren a afirmaciones cuyo valor estamos tratando de establecer para convencer a otro; los datos (D), son elementos justificatorios que alegamos como base de C; y las garantías (G), son proposiciones que legitiman el paso de D a C. Además, Toulmin (1958) sostiene que una de las razones para distinguir entre dato y garantía, es que a los primeros se apela explícitamente y a los últimos implícitamente. La Figura 1 muestra el modelo simple propuesto por Toulmin, que organiza la argumentación en términos de conclusiones (C), datos (D) y garantías (G).

BY-NC

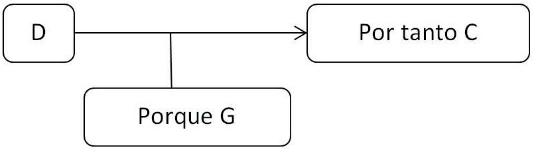


Figura 1. Modelo simple para analizar argumentos (Toulmin, 1958, p. 135)

Martí y Scheuer (2016) señalan que, aunque la construcción de explicaciones científicas se fundamenta en el uso eficaz y apropiado de las representaciones externas, los estudios que abordan el uso de estas representaciones en la argumentación son muy escasos. Y por otro lado, Saxe y colaboradores (2013), en su estudio de la recta numérica, afirman que la investigación no se ha centrado en el desarrollo de la coordinación de unidades numéricas y lineales en los estudiantes, y en cómo ellos la interpretan y generan.

Así, el presente estudio investiga la estructura de las argumentaciones de estudiantes de primaria sobre las representaciones construidas por ellos, y las componentes lógicas, numéricas y geométricas que las caracterizan.

3. Metodología

Este estudio es de carácter cualitativo y busca caracterizar los argumentos de los estudiantes sobre algunas componentes de representaciones gráficas de datos que construyen en una situación de organización de datos.

3.1. *Sujetos*

Desde un estudio anterior sobre la progresión de las representaciones de datos de 343 estudiantes en los grados 1 al 4 (6 a 9 años de edad), fueron entrevistados 30 estudiantes de dos escuelas chilenas con rendimiento académico cercano a la media nacional en un test de matemática[1], en adelante denominadas escuela A y B, con el fin de indagar acerca de sus argumentaciones sobre las propias representaciones de datos. El estudio contó con el consentimiento escrito de los directores de ambos establecimientos, de los profesores, de los apoderados y de los estudiantes.

[1] Prueba SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) del grado 4, año 2014.

 BY-NC

Los criterios de selección para entrevistar a los 30 estudiantes consideraron la riqueza de sus producciones sobre representaciones de datos, el grado de participación que tuvieron al momento de expresar sus ideas en una clase previa, y la disposición a ser entrevistados. Para indagar en las argumentaciones sobre las representaciones, seis de los 30 estudiantes fueron seleccionados por las características de los argumentos de las componentes de la representación gráfica construida por ellos con anterioridad y la habilidad para expresarse verbalmente. El total de sujetos contempla dos niñas y cuatro niños: uno del grado 1, dos del grado 2, dos del grado 3 y uno del grado 4. Uno de los estudiantes pertenece a la escuela A y cinco a la escuela B.

3.2. *Recogida de datos y preparación de instrumentos*

Tarea. Al estudiante se le proponía una situación abierta de organización de datos para la exploración heurística, en la que se presentaban 9 o 10 fichas de tres colores (3 rojas, 2 verdes, 4 o 5 azules), todas del mismo tamaño, peso y textura, para que las organizaran libremente sobre una placa rectangular (ver Figura 2).

Figura 2. Estudiante organizando las 9 fichas en la placa

3.3. *Entrevista*

Se diseñó un protocolo de entrevista clínica semiestructurada que demandaba a los estudiantes operacionalizar y verbalizar sus ideas en relación a la situación abierta de organización de datos (ver Anexo 1). Además, el entrevistador realizaba algunos cambios sobre lo construido por ellos según protocolo de entrevista, el cual contenía sub-tareas asociadas a las componentes lógica (variable), numérica (frecuencia) y geométrica (base - lineal y linealidad - gráfica) de la representación (ver Anexo 2). Los cambios realizados sobre su representación consistían en alterar la base y las columnas, pidiéndole su juicio respecto al cambio sobre su representación de datos.

3.4. *Aplicación de instrumentos*

Las entrevistas fueron realizadas individualmente según protocolo, con una duración promedio de 30 minutos, y videograbadas en las dependencias de cada escuela. Cada estudiante fue entrevistado por dos investigadores, uno actuaba como entrevistador y otro como investigador observante, el cual eventualmente proveía de preguntas adicionales y realizaba notas de campo.

Los datos fueron (1) las representaciones externas creadas por los estudiantes a la situación abierta de análisis de datos, y (2) las respuestas dadas por los estudiantes a la tarea durante las entrevistas clínicas semiestructuradas.

3.5. *Análisis*

Para el análisis de los datos se consideraron las categorías levantadas desde las producciones elaboradas por los estudiantes en la lección previa de organización de datos mencionada: componente lógica, componente numérica y componente geométrica. Esto se llevó a cabo mediante las transcripciones de las entrevistas y de observaciones escritas desde las videograbaciones de estas entrevistas.

Recogidos los datos, el análisis consideró tres fases: (I) selección de 6 estudiantes de los 30 entrevistados, que construyen representaciones gráficas por grado; (II) identificación de las componentes en las representaciones gráficas; y (III) interpretación y estructuración de las argumentaciones de los estudiantes respecto a las componentes de la representación gráfica, según modelo simple de Toulmin.

A continuación se describen las fases del análisis.

- *Fase I: Selección de los seis estudiantes que construyen representaciones gráficas por grado.*

  A partir de la revisión de la videograbación y transcripción de las 30 entrevistas clínicas, las representaciones y las notas de campo; los investigadores seleccionaron a aquellos estudiantes que construyeron una representación gráfica y mostraban argumentos de las componentes sobre ella; y que además, exhibían mayor habilidad verbal.

- *Fase II: Identificación de las componentes en las representaciones gráficas.*

  A partir de la transcripción, las representaciones gráficas y las notas de campo, se identificó la aparición de cada componente y del tiempo en que emergió en cada uno de los 6 estudiantes. Las componentes identificadas han sido rotuladas como lógica para variable, numérica para frecuencia, y geométrica para base - lineal y linealidad - gráfica.

 BY-NC

– *Fase III: Interpretación y estructuración de las argumentaciones de los estudiantes seleccionados respecto a las componentes de la representación gráfica.*

  Por medio de la observación y confrontación de las transcripciones de las entrevistas y las videograbaciones, los investigadores interpretaron los argumentos dados por los estudiantes en relación a las componentes de su representación gráfica. Después, se estructuraron estos argumentos en base al modelo simple (datos, garantía y conclusión) de Toulmin, conjuntamente por los investigadores, lo que se realizó en tres ocasiones para precisar la interpretación y los elementos del modelo, llegándose a un 100% de concordancia entre investigadores.

4. Resultados

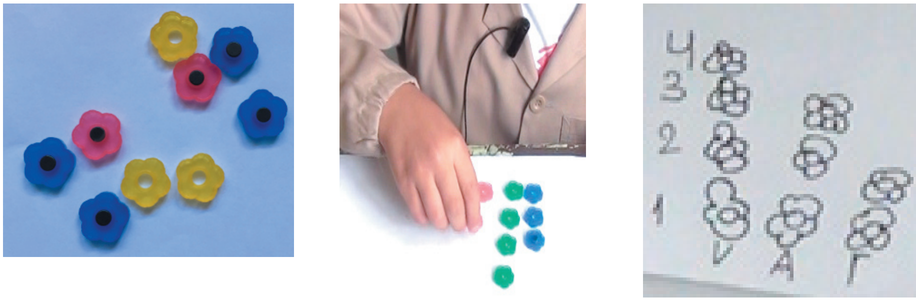
El uso de la entrevista clínica ha permitido indagar en las características de las respuestas de los estudiantes de grado 1 a 4. En esta sección, se presentan los argumentos entregados por el estudiante al confrontarle sobre cómo ha organizado los datos (fichas) y al cuestionarle sobre ciertos componentes de la representación de datos que ha construido (ver Anexo 2).

Durante la entrevista clínica se ha solicitado al estudiante argumentar para constatar que reconoce la variable en juego (color), y cómo relaciona los datos y el sentido del cardinal (frecuencia). Además, se le confronta a dos cambios en su representación, se desajusta la base - lineal y se elimina la linealidad - gráfica, pidiéndole su juicio respecto a lo realizado sobre su representación.

A continuación se analizan los argumentos dados por los estudiantes, se presentan conjuntamente sus representaciones y argumentaciones intencionadas por Protocolo de entrevista (Anexo 1). Cada caso es analizado desde el modelo simple de argumentación de Toulmin (ver Figura 1).

4.1. *Argumentos verbales respecto a la variable*

E-1 es un estudiante hombre, tiene 10 años y 1 mes de edad, y cursa el grado 4 de la escuela B. El entrevistador muestra las fichas de tres colores distintos a E-1 y le pregunta ¿Cómo organizarías estos datos? E-1 observa y clasifica las fichas y verbaliza sus ideas.



a. Observa las fichas y las clasifica por color.	*b.* Clasifica cada ficha por color y las organiza en columnas.	*c.* En su representación escribe V, A y R, referidas a las categorías de la variable.

Figura 3. Proceso de organización de datos del estudiante E-1

El estudiante reconoce la variable color del conjunto de fichas (D), y mediante la clasificación de los datos representa simbólicamente cada color con una única letra: V, A, R, (C). La garantía que respalda la simbolización de las categorías de la variable proviene de la partición del conjunto de fichas en subconjuntos disjuntos definidos según color de cada ficha (G), ver Figura 3.

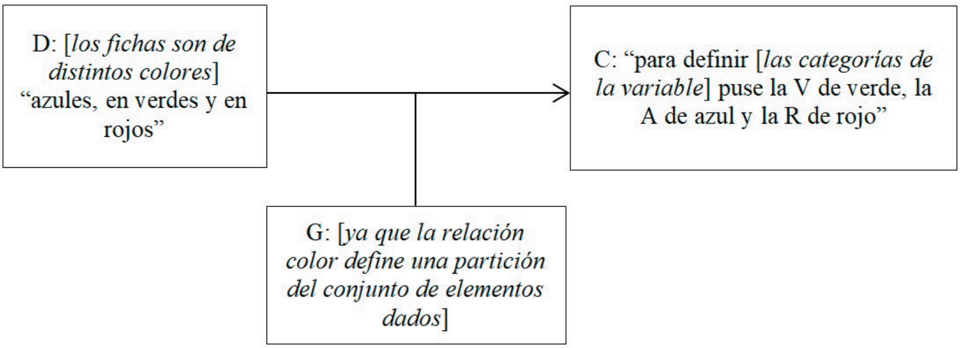


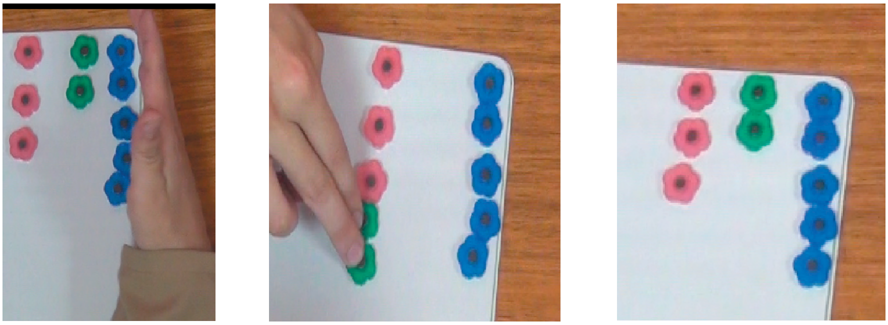
Figura 4. Estructura del argumento del estudiante E-1

E-1 considera implícitamente la variable color como criterio de clasificación de datos, ya que al verbalizar la construcción de su representación afirma definir las categorías de la variable "puse la V de verde, la A de azul y la R de rojo". La simbolización de las clases de E-1 proviene de la clasificación disjunta realizada con el material concreto (ver Figura 3c), en que todas las fichas pertenecían a una y solo una de las categorías de la variable (Figura 4).

 BY-NC

4.2. *Argumentos verbales y gestuales respecto a la variable*

E-2 es un estudiante hombre, tiene 7 años de edad, y cursa el grado 2 de la escuela A. El entrevistador interviene en la representación de E-2, construida con tres columnas separadas por colores distintos, y coloca fichas de otro color en una de las columnas (Figura 5b), y le confronta "Si un niño como tú, viene y coloca estas fichas acá, ¿Te parece bien?". El estudiante E-2 observa lo realizado sobre su representación, rechaza la intervención y la reconstruye (Figura 5c).



a. Representación inicial de E-2.	*b.* Entrevistador interviene en la representación de E-2, colocando fichas de otro color.	*c.* E-2 rechaza la intervención propuesta y rehace la representación construida por él.

Figura 5. Proceso de organización de datos del estudiante E-2

La nueva organización de los datos propuesta por el entrevistador a E-2 (Figura 5b) incluye en una misma columna fichas de dos colores (D), por tanto, el estudiante gestualiza que no está de acuerdo con esta propuesta (C), ya que cada columna debe tener fichas de un mismo color (G), ver Figura 6.

D: "[la columna] *es del mismo color y este [fichas verdes] no corresponde al mismo color que está aquí* [fichas rojas]" → C: [*se opone a la nueva organización propuesta, moviendo la cabeza a modo de negación*]

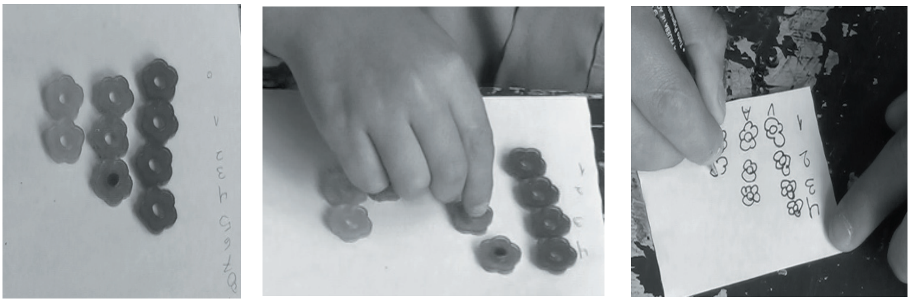
G: [*ya que cada clase está constituida solo por un mismo tipo de elementos*]

Figura 6. Estructura del argumento del estudiante E-2

El proceder de E-2 da evidencia de la comprensión del color como la variable, pues al intervenir la representación construida, se opone a ello rehaciendo su organización inicial conservando las categorías de la variable. Al parecer E-2 se apoya en la clasificación disjunta que realiza con el material concreto y en el establecimiento de las clases, esto es, las categorías de la variable.

4.3. *Argumentos verbales respecto a la frecuencia*

E-1 es un estudiante hombre, tiene 10 años y 1 mes de edad, y cursa el grado 4 de la escuela B. El entrevistador ofrece un lápiz a E-1 para que agregue lo que estime conveniente sobre la representación construida. Luego le dice, cuéntame ¿Cómo lo hiciste? E-1 observa lo construido por él, señalando y verbalizando sus procedimientos.



a. Bosqueja una recta numérica vertical del 0 al 8.

b. Ajusta la recta numérica vertical para posicionar cada ficha frente a un número.

c. Asocia explícitamente el cardinal a la categoría de la variable (V, A, R).

Figura 7. Proceso de organización de datos del estudiante E-1

El estudiante E-1 indica las fichas posicionadas en columnas desde una base común a la que llama "cero" (D), en que cada columna tiene asociado un único número ubicado ordenada y verticalmente a la izquierda, que representa la cantidad de fichas contadas de cada color. E-1 asocia a cada columna una cantidad de fichas, concluyendo que cada ficha de un color tiene asociado un único número (C). La garantía radica en que los números organizados en una recta numérica permiten asociar un único cardinal a cada elemento (G), ver Figura 8.

 BY-NC

D: [*para contar en una recta numérica vertical*] "hay que empezar de cero hacia arriba"

C: [*para representar datos tengo que incluir*] "4 verdes, 3 azules y 2 rojos"

G: [*los números organizados en una recta numérica vertical permiten asociar un único cardinal a cada elemento*]

Figura 8. Estructura del argumento del estudiante E-1

El estudiante E-1 construye posicionando fichas en columnas desde una base inicial y asocia a cada ficha de una misma clase un único número (Figura 7, b y c). Consideramos que construye un incipiente "eje Y", pues escribe verticalmente todos los cardinales involucrados incluyendo el 1, aunque sin una línea explícita ni el cero, que sin embargo representan la cantidad de fichas una a una (ver Figura 7c). El estudiante argumenta desde su clasificación y construcción de la representación en que se explicitan las categorías de la variable mediante el material concreto y el cardinal asociado a cada categoría de la variable, que reconocemos como frecuencia.

E-3 es una estudiante mujer, tiene 8 años y 10 meses de edad, y cursa el grado 3 de la escuela B. El entrevistador observa la representación construida por E-3 y le ofrece un lápiz para escribir lo que estime conveniente. Luego le pregunta ¿cómo lo hiciste? E-3 observa lo construido por ella, señalando y verbalizando sus procedimientos.

a. Posiciona las fichas por color en filas.	*b.* Escribe el cardinal asociado a cada fila de fichas, en una nueva columna.	*c.* En su representación sigue el modelo construido en (b).

Figura 9. Proceso de organización de datos del estudiante E-3

La estudiante E-3 afirma que es necesario registrar el número de fichas según el color (C), esta idea yace en el hecho de que las fichas fueron clasificadas y contadas según el color de cada una (D). Lo anterior se basa en que cada fila tiene asociada una clase con un número finito de elementos de un color (G), ver Figura 10. En este caso, el uso de la frecuencia se evidencia en la Figura 9, pues los números correspondientes a cada columna de color están alineados entre sí.

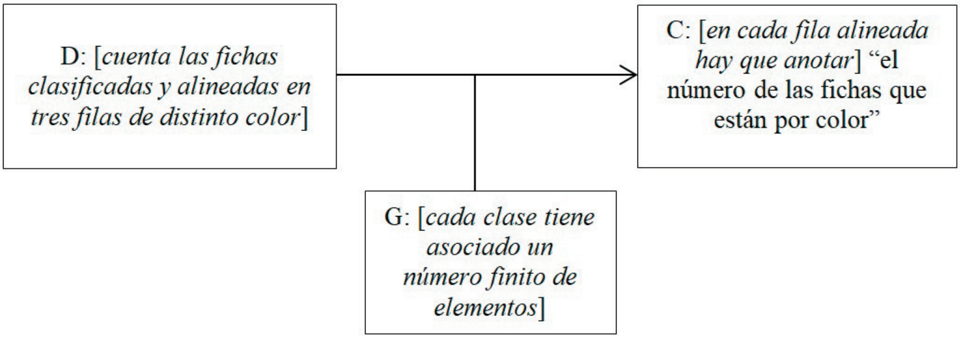


Figura 10. Estructura del argumento de la estudiante E-3

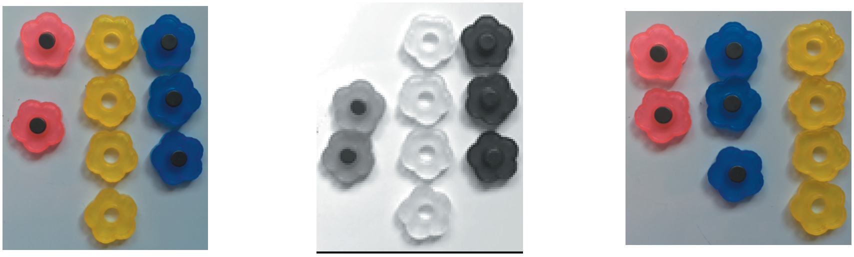
La estudiante E-3 aplica el concepto de frecuencia absoluta ya que distingue la variable cuantitativa de la cualitativa, al escribir el cardinal frente a cada categoría de la variable de su representación (Figura 9). Al solicitarle el significado del mismo, E-3 afirma que es "el número de las fichas que están por color", esto indica que ella asocia a cada clase (categoría de la variable) su cardinal, esto es la frecuencia.

4.4. *Argumentos metaforizados respecto a la base - lineal*

E-1 es un estudiante hombre, tiene 10 años y 1 mes de edad, y cursa el grado 4 de la escuela B. El entrevistador interviene en su representación; mueve una ficha de la base - lineal colocándola arriba de la columna (Figura 11a), y le pregunta, "Si un niño como tú, viene y coloca esta ficha acá, ¿qué crees? ¿lo dejarías así?" E-1 observa lo realizado sobre su representación y vuelve la ficha al lugar inicial como lo indica la Figura 11.

Figura 11.

 BY-NC



a. Representación inicial de E-1.	*b.* Organización propuesta por el entrevistador	*c.* Rechaza la intervención propuesta y rehace su representación (E-1).

Figura 11. Proceso de organización de datos del estudiante E-1

Tras el cambio en su representación, el estudiante E-1 se opone (C), y mueve la ficha trasladada de la parte superior de la columna a su ubicación inicial (Figura 11c), pues en la organización propuesta por el entrevistador (D), la columna de fichas inicia con un espacio vacío que lo diferencia del resto (Figura 11b), luego no se cumple que todas las columnas "tienen que empezar de cero". La garantía que sustenta lo anterior es la idea de que elementos organizados colinealmente requieren de una recta de referencia común que sea perpendicular a estos elementos organizados (G), ver Figura 12.

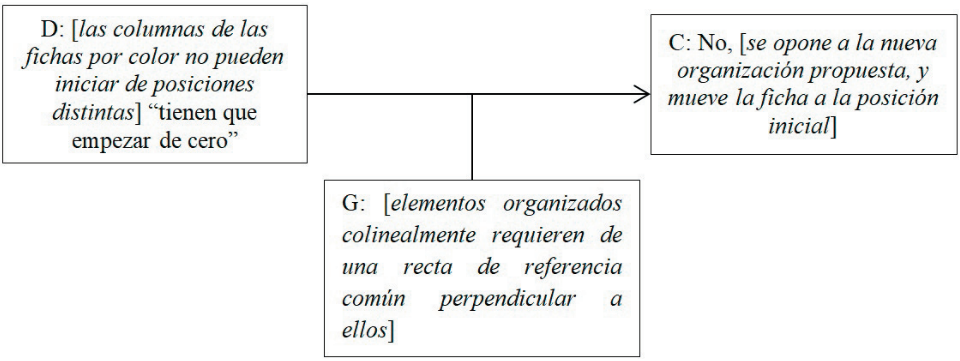
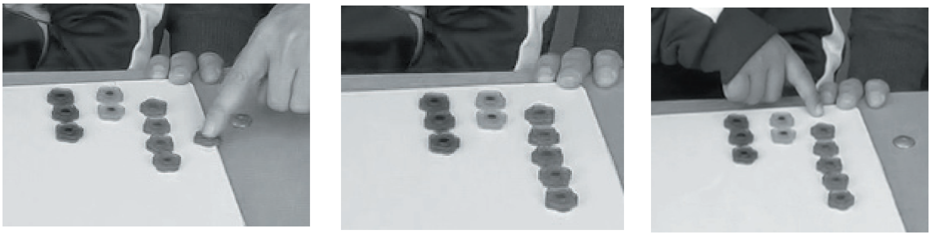


Figura 12. Estructura del argumento del estudiante E-1

El estudiante E-1 muestra que usa la componente base-lineal al oponerse a que cada columna se inicie en posiciones distintas, volviendo a mover la ficha al punto de partida común argumentando que las columnas "tienen que empezar de cero". Al parecer E-1 respalda su afirmación al considerar la metáfora del cero - inicio como una base - lineal.

E-4 es un estudiante hombre, tiene 6 años y 2 meses de edad, y cursa el grado 1 de la escuela B. El entrevistador interviene en su representación, mueve una ficha de la base-lineal colocándola arriba de la columna, y le pregunta, "Si un niño como tú; viene y coloca esta ficha acá, ¿qué crees? ¿lo dejarías así?" E-4 observa lo realizado sobre su representación y verbaliza su pensamiento.



a. Organización propuesta por el entrevistador (interviene la base)	*b.* E-4 observa y reflexiona sobre la situación propuesta	*c.* E-4 indica que todas las fichas deben partir de una base.

Figura 13. Proceso de organización de datos del estudiante E-4

El estudiante E-4 está en desacuerdo con que cada columna se inicie en posiciones distintas (D). Por lo tanto, "para que toque más el suelo" traslada la ficha al inicio de la base de las columnas (C), Figura 13. Lo anterior tiene como respaldo que una base horizontal es un punto de partida común para posicionar objetos en forma vertical (G), ver Figura 14.

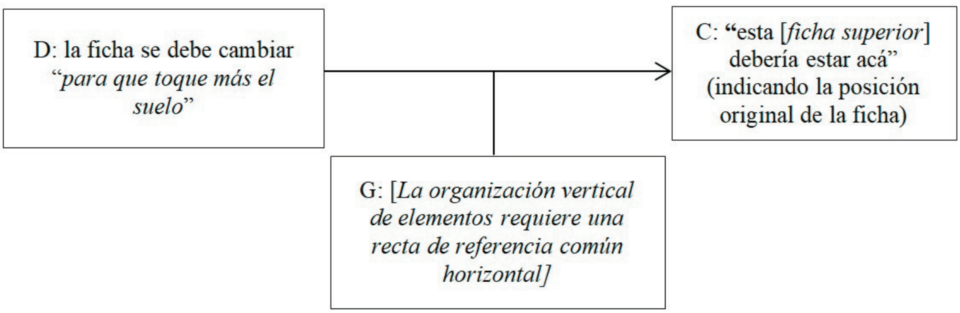


Figura 14. Estructura del argumento del estudiante E-4

 BY-NC

El estudiante E-4 muestra que tiene conciencia de la componente base - lineal al estar en desacuerdo con que cada columna se inicie en posiciones distintas, explicando que la ficha debe tocar el suelo. Al parecer este estudiante respalda su afirmación al considerar la metáfora del suelo como un punto de partida común para construir su representación, esto es una base - lineal.

4.5. *Argumentos verbales metaforizados respecto a linealidad - gráfica*

E-5 es un estudiante hombre, tiene 7 años y 3 meses de edad, y cursa el grado 2 de la escuela B. El entrevistador interviene en su representación, mueve fichas de las columnas de tal manera de curvarlas haciendo perder la linealidad - gráfica, y le pregunta al estudiante, “Si un compañero coloca así las fichas, ¿qué crees? ¿lo dejarías así?” E-5 observa y verbaliza su pensamiento.

a. Organización propuesta por el entrevistador	*b.* E-5 apoya su idea con el gesto de sus manos, indicando que deben estar derechas.	*c.* E-5 reorganiza las fichas para que todas estén alineadas y paralelas entre sí.

Figura 15. Proceso de organización de datos del estudiante E-5

E-5 no está de acuerdo con la curvatura de la columna de fichas (C), por lo tanto reorganiza esas fichas conforme a una recta pues debe haber un orden y compara las columnas rectas y las curvadas (D), determinando que “las demás [columnas de fichas] estarían en la meta y esta [columna curvada] no estaría en la meta porque está chueco”. La garantía que brinda es el paralelismo entre rectas vinculado a la idea de linealidad - gráfica (G), ver Figura 16.

D: "esto está un poco derecho" [*refiriéndose a la columna que no ha sido curvada*] "las demás estarían en la meta y esta no estaría en la meta porque está chueco"

C: [*oponiéndose al cambio propuesto*] "está un poco mal, está un poco doblado, tiene que estar derecha"

G: [*relación de paralelismo*]

Figura 16. Estructura del argumento del estudiante E-5

El estudiante E-5 reconoce la necesidad de respetar la linealidad - gráfica, pues al observar la única columna curvada (ver Figura 15), afirma "está un poco mal, un poco doblada, y estas están derechas […] entonces no estaría en la meta, entonces está mal arreglado". E-5 no está de acuerdo con la curvatura realizada en una de las columnas, por lo tanto reorganiza esas fichas en una recta para ordenar. E-5 respalda su afirmación considerando la metáfora de la meta, refiriéndose a la dirección común dentro de un circuito de pistas, en el sentido de un paralelismo entre rectas (ver Figura 16). Al parecer el estudiante E-5 considera ordenar las fichas colinealmente de tal manera que la columna curvada nuevamente sea paralela a las demás columnas, en el sentido que hemos denominado linealidad - gráfica, y metaforizado por E-5 mediante la idea de meta [de un circuito de pistas paralelas].

4.6. *Argumentos gestuales respecto a linealidad - gráfica*

E-6 es una estudiante mujer, tiene 8 años y 5 meses de edad, y cursa el grado 3 de la escuela B. El entrevistador interviene en su representación, mueve fichas de las columnas de tal manera que las curva haciendo perder la linealidad - gráfica, y le pregunta, "Suponte que viene un niño y hace esto así. ¿qué crees? ¿lo dejarías así?"

a. Organización propuesta por el entrevistador.	*b.* Al oponerse al cambio propuesto gestualiza con el canto de la mano.	*c.* Reorganiza las fichas, bajo su criterio.

Figura 17. Proceso de organización de datos del estudiante E-6

 BY-NC

La estudiante E-6 no está de acuerdo con la curvatura de la columna central propuesta (C), pues ella considera que debe estar recto, enfatizándolo con un movimiento de su mano (D). Lo que garantiza su afirmación es la idea de colinealidad (G), ver Figura 18.

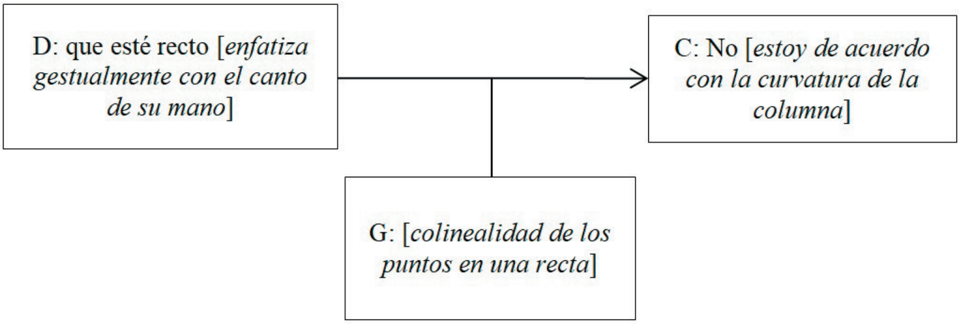


Figura 18. Estructura del argumento del estudiante E-6

E-6 reconoce la necesidad de respetar la linealidad - gráfica, pues al observar el cambio realizado al curvar una de sus columnas, ella no está de acuerdo. La estudiante enfatiza con el canto de su mano la idea de lo recto (ver Figura 17), y reorganiza las fichas de una columna para "que esté recto" (Figura 18). La estudiante E-6 considera esta organización colineal de fichas, lo que gestualiza mediante el canto de su mano, en el sentido que hemos denominado linealidad - gráfica.

5. Discusión

Este estudio cualitativo es una contribución al campo de la educación matemática, en tanto indaga en la estructura de las argumentaciones sobre representaciones externas de datos construida por niños en los cuatro primeros niveles escolares, respecto a algunas componentes de tipo lógico, numérico y geométrico. La situación implementada provocó que los estudiantes operativamente utilizarán esquemas lógicos (clasificación), matemáticos (partición, clases y cardinalidad) y geométricos (recta numérica, paralelismo, perpendicularidad, colinealidad) para argumentar; y en la construcción de las representaciones de datos los niños emplearan la componente lógica, variable, la componente numérica, frecuencia, y las componentes geométricas, base - lineal y linealidad - gráfica.

Los casos estudiados respecto a la variable, E-1 y E-2, presentan argumentos que parecen sostenerse en conceptos matemáticos implícitos, partición y clase de equivalencia, que interpretamos como garantías en el despliegue argumentativo de los casos presentados, según el modelo de Toulmin. Los estudiantes E-1 y E-2 sostuvieron su conclusión desde la clasificación de los elementos según el criterio subyacente a un atributo de los datos que remite a las categorías de la variable.

Los argumentos respecto a la frecuencia parecen sostenerse en conceptos geométricos y matemáticos implícitos como recta numérica y cardinalidad, que interpretamos como garantías en el despliegue argumentativo de los casos E-1 y E-3 presentados. El estudiante E-1 sostuvo su conclusión indicando que en el eje Y "hay que empezar de cero hacia arriba" como inicio del conteo para obtener la frecuencia de la categoría de la variable mediante la biyección de la altura (último elemento graficado de cada clase) con su respectivo numeral en la recta numérica (eje Y), mientras que la estudiante E-3 sostuvo su conclusión en el conteo de los elementos de la clase para obtener el cardinal en un estatus de frecuencia.

Los argumentos respecto a la base - lineal, parecen sostenerse en conceptos geométricos implícitos como perpendicularidad y recta común, y que interpretamos como garantías en el despliegue argumentativo de los casos E-1 y E-4 presentados. El estudiante E-1 sostiene su conclusión expresando "tienen que empezar de cero" como punto de partida perpendicular a una recta común, mientras que E-4 sustenta su conclusión señalando al "suelo" como recta común de partida.

Los argumentos respecto a la linealidad - gráfica parecen sostenerse en conceptos geométricos implícitos como colinealidad y paralelismo, los cuales son relaciones entre puntos o rectas respectivamente, y que interpretamos como garantías en el despliegue argumentativo de los casos E-5 y E-6 presentados. La estudiante E-6 sostiene su conclusión a partir de gestos con el canto de su mano, remitiéndose a lo recto, mientras que E-5 sustenta su conclusión refiriéndose a la idea metafórica de pistas paralelas.

Las metáforas mencionadas en las argumentaciones de los estudiantes fueron el suelo, lo recto, lo ordenado, la meta y las pistas. Estas son metáforas orientacionales en el sentido de Lakoff y Johnson (1980), pues dan a un concepto una orientación espacial que proviene de la experiencia física y cultural de los niños. Los argumentos metafóricos estuvieron reforzados por argumentos desde la gestualidad, movimientos con las manos para expresar un avance recto, o fijar con la mano un punto de partida ficticio frente al cuerpo.

 BY-NC

6. Conclusiones

Esta investigación indagó en la habilidad de representar y en las argumentaciones sobre componentes de las representaciones construidas por estudiantes de los primeros grados de primaria.

El estudio de las argumentaciones da evidencia que las representaciones externas son "objetos para pensar", y no solo cumplen una función comunicativa, en el sentido señalado por Martí y Scheuer (2015). De esta manera, los signos involucrados en las representaciones han jugado un papel fundamental, pues son primordiales como medio para argumentar verbal, metafórica y gestualmente, permitiendo comunicar y justificar ideas. En el sentido de Corballis (2003) y Sfard (2009), la verbalización integrada con la gestualidad ha permitido a los estudiantes construir sus argumentos sobre las componentes de las representaciones.

Los elementos argumentativos verbales y gestuales respecto a la representación, parecen verse influidos no solo por habilidades de expresión oral de los estudiantes sino por el desarrollo cognitivo según su edad. Los argumentos sobre la componente lógica, variable, y la componente numérica, frecuencia, fueron verbalizados por los estudiantes, mientras que las componentes geométricas, base - lineal y linealidad - gráfica, fueron argumentados desde el lenguaje oral, la gestualidad y la metaforización.

Los resultados del análisis de los casos declarados en este estudio, concuerdan en que los argumentos justificativos aparecen entre los 8 a 9 años, (Garcia - Mila et al., 2016), pues principalmente los casos analizados de los grados 3 y 4 fueron quienes verbalizaron con mayor fluidez sus ideas. Asimismo, y en concordancia con Piaget, los niños de 7 a 9 años demostraron concepciones de propiedades transitivas y asociativas de longitudes, y la conservación de la longitud.

Aunque a menor grado de escolaridad los estudiantes utilizaron más los gestos y metáforas, el uso de metáforas orientacionales que documentamos y que emergen al argumentar conocimientos que no han sido reconocidos –base - lineal y linealidad - gráfica–, sirve para que la metaforización del estudiante sea valorada como parte de un andamiaje en la construcción de argumentaciones sobre representaciones.

El análisis de los argumentos de los estudiantes en la coordinación que realizan de la variable, frecuencia, base - lineal y linealidad - gráfica, al construir una representación externa de datos, ha permitido precisar conocimientos conceptuales matemáticos y geométricos necesarios para realizar tal coordinación, como partición, clases, cardinalidad, colinealidad, paralelismo, perpendicularidad,

BY-NC

y recta numérica. Tales conocimientos requieren ser considerados en el diseño de materiales y orientaciones curriculares, y en el trabajo con profesores en su tarea de alfabetización estadística mediante la argumentación y las representaciones de datos.

Investigaciones futuras pueden incluir contextos que motiven a los estudiantes a construir representaciones en tres dimensiones, estudiar la conservación de la distancia entre los elementos gráficos presentes en la construcción de las representaciones, e indagar en la acción corporal en ambientes argumentativos.

Reconocimientos

La investigación presentada ha sido financiada por CONICYT a través del Proyecto FONDECYT N° 11140472, y financiada parcialmente por PIA-CONICYT, Proyecto CIE-05 CIAE, Basal Funds for Centers of Excellence FB 0003; CONICYT-PCHA / Doctorado Nacional: 2016-21161378 y 2016-21161569

Referencias bibliográficas

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (número especial), 267-299.

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2* (3), 298-318.

Aparicio, E., y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (1), 7-30.

Corballis, M. (2003). From mouth to hand: gesture, speech, and the evolution of right handedness. *Behavioral and Brain Sciences*, *26*, 199-260.

Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, *49* (1), 53-64.

English, L. D. (2013). Reconceptualizing statistical learning in the early years. In L. D. English & J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 67-82). New York: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-6440-8

English, L. D. (2010). Young children's early modelling with data. *Mathematics Education Research Journal*, *22* (2), 24-47.

Estrella, S. (2016). Desarrollo matemático y estadístico: explorando su competencia meta - representacional. *Actas de las XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, Chile, 20, 64-70. ISSN 0719-8159

 CC BY-NC

Franklin, C. A., & Garfield, J. (2006). The GAISE project: Developing statistics education guidelines for grades pre-K-12 and college courses. In G. Burrill & P. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance 68th Yearbook* (pp. 345–376). Reston, VA: NCTM.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32* (2), 124-158. doi: 10.2307/749671

Garcia - Mila, M., Pérez - Echeverría, M. P., Postigo, Y., Martí, E., Villarroel, C., & Gabucio, F. (2016). ¿Centrales nucleares? ¿Sí o no? ¡Gracias! El uso argumentativo de tablas y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, *39* (1), 187-218. doi: 10.1080/02103702.2015.1111605

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). The metaphorical structure of the human conceptual system. *Cognitive science*, *4* (2), 195-208. doi: 10.1207/s15516709cog0402_4

Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, *105*, 395–438. doi:10.1016/j.cognition.2006.10.005

Martí, E., & Scheuer, N. (2015). Sistemas semióticos, cultura y conocimiento matemático temprano. *Estudios de Psicología*, *36* (1), 9-17.

Mercier, H., & Sperber, D. (2011). Why do humans reason? Arguments for an argumentative theory. *Behavioral and Brain Sciences*, *34* (02), 57-74. doi: 10.1017/S0140525X10000968

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2012). *Bases Curriculares de la Educación Básica, Matemática.* Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2013). *Matemática, Programa de Estudio para Primer Año Básico.* Santiago de Chile: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2009). *Navigating through data analysis and probability in prekindergarten - grade 2* (Vol. 1). Reston, VA: Author.

Pérez - Echeverría, M. P., Martí, E., & Pozo, J. I. (2010). Los sistemas externos de representación como herramientas de la mente. *Cultura y Educación*, *22* (2), 133-147.

Pérez - Echeverría, M., & Scheuer, N. (2009). External representations as learning tools. In C. Andersen, N. Scheuer, M. Pérez - Echeverría & E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 1-17). Rotterdam: Sense Publishers.

Piaget, J. (1965). The stages of the intellectual development of the child. Educational psychology in context: Readings for future teachers, 98-106.

Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Gearhart, M., & Haldar, L. C. (2013). Coordinating numeric and linear units: Elementary students' strategies for locating whole numbers on the number line. *Mathematical Thinking and Learning*, *15* (4), 235-258. doi: 10.1080/10986065.2013.812510

Sfard, A. (2009). What's all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies in Mathematics*, *70* (2), 191-200. doi: 10.1007/s10649-008-9161-1

Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. In G. Burrill & P. Elliott (Eds.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 77-98). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, E., & Varela, F. J. (2001). Radical embodiment: Neuraldynamics and consciousness. *Trends in Cognitive Sciences*, *5* (10), 418-425.

Toulmin, S. (1958 / 2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona: Península.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis.* Massachusetts: Addison - Wesley.

(cc) BY-NC

Anexo 1
Protocolo de entrevista clínica semiestructurada

Situación fichas azules, rojas y verdes.

Contexto: una profesora en otro curso como el tuyo, les llevó a sus alumnos este material (mostrar placa rectangular y fichas de colores). ¿Reconoces que son? (mostrar fichas, se espera algún comentario). Bien, la profesora pidió a los estudiantes que organizaran estos datos sobre esta placa, ¿Lo podrías hacer tú? ¡Hazlo! (con una impronta de entusiasmo).

- Cuéntame, ¿Cómo lo hiciste? ¿Quieres ocupar el plumón? (Puede agregar cardinal, dibujar cierres rectangulares, bosquejar ejes, etc.)
- Si un compañero como tú, viene y hace este cambio (mover una ficha de la línea base y colocarla arriba o al final de una columna o fila, respectivamente). ¿Qué crees? ¿Lo dejarías así?
- Si una compañera lo coloca así (mover las columnas o filas de tal manera que queden curvas, hacer perder la linealidad-gráfica) ¿Qué crees? ¿Lo dejarías así?

Anexo 2
Sub-tareas asociadas a las componentes según protocolo de entrevista

La situación abierta de organización de fichas (4 fichas azules, 3 fichas verdes y 2 fichas rojas; o 5 fichas azules, 3 fichas verdes y 2 fichas rojas), considera las siguientes subtareas.

Sub-tarea 0 “Cómo organizarías estos datos (fichas de colores)?” (*variable*)

Sub-tarea 1 “¿Quieres ocupar el plumón?” (*frecuencia*):
- Construida su organización de datos, se le pide escribir libremente lo que quiera (escribe cardinal, o enmarca los datos, o escribe una frase, cuenta con marcas, entre otras posibilidades)

Sub-tarea 2 “Mover una ficha” (*base-lineal*):
- En una organización tipo gráfico de barra, el entrevistador mueve un dato (ficha) de la línea base (eliminando la continuidad de la línea base) y lo coloca en el otro extremo de la columna (manteniéndose la frecuencia/cardinal pero no la base-lineal).

 BY-NC

Sub-tarea 3 “Curvar una columna de fichas” (*linealidad-gráfica*):

- En una organización tipo gráfico de barra, el entrevistador curva una columna de datos de tal manera que pierda altura, (perdiéndose la linealidad-gráfica).

Autores

Soledad Estrella. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. soledad.estrella@pucv.cl

Raimundo Olfos. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. raimundo.olfos@pucv.cl

Sergio Morales. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. sergio.morales.c01@mail.pucv.cl

Pedro Vidal - Szabó. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. pedro.vidal_s@umce.cl

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

 CC BY-NC

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

BY-NC

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

 BY-NC

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

BY-NC

En este último número del vigésimo volumen de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Relime*, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. A través de sus comentarios críticos nuestros revisores contribuyen no solamente a mantener la calidad de los manuscritos publicados sino al desarrollo de nuestra disciplina en un ambiente de pluralidad a fin de fortalecer la escuela latinoamericana.

EVALUADOR / A	INSTITUCIÓN, PAÍS
Aurora Gallardo	DME-Cinvestav, México
David Zaldívar	Universidad Autónoma de Coahuila, México
Adriana Engler	Universidad Nacional del Litoral, Argentina
Alain Kuzniak	Université Paris Diderot-Paris 7, Francia
Alberto Camacho	Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
Alejandro González	Universidad de Montreal, Canadá
Alicia Ávila Storer	Universidad Pedagógica Nacional, México
Ana Caballero Carrasco	Universidad de Extremadura, España
Ana María Ojeda	DME-Cinvestav, México
Ana Sofía Aparicio	Universidad de São Paulo, Brasil
Antonio Zavaleta Bautista	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Arlete Brito	UNESP, Brasil
Arturo Mena	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Arturo Mena	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Avenilda Romo	CICATA-IPN, México
Carolina Tamayo	Universidad de Antioquia, Colombia
Cecilia Crespo Crespo	ISP “Dr. Joaquín V. González”, Argentina
César Delgado	Universidad del Valle, Colombia
Corine Castela	Université Paris Diderot - Paris 7, Francia
Edgar Guacaneme	Universidad Pedagógica Nacional, Colombia
Eduardo Briceño	Universidad Autónoma de Zacatecas, México
Eduardo Carrasco	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
Elizabeth Montoya	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Enrique Castro	Universidad de Granada, España
Erika Canché	INEE, México

Fabián Romero	DME-Cinvestav, México
Filipe Santos Fernandes	Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil
Francisco Cordero	DME-Cinvestav, México
François Pluvinage	DME-Cinvestav, México
Gabriela Buendía	Red Cimates, México
Gonzalo Zubieta	DME-Cinvestav, México
Guadalupe Cabañas	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Guadalupe Simón	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México
Hélia Jacinto	Universidade de Lisboa, Portugal
Irma Castañeda	UNAM, México
Isaías Miranda	CICATA-IPN, México
Javier Lezama	CICATA-IPN, México
Jhony Villa Ochoa	Universidad de Antioquia, Colombia
Joana Mata Pereira	Universidade de Lisboa, Portugal
João Pedro da Ponte	Universidade de Lisboa, Portugal
Joaquin Giménez Rodríguez	Universidad de Barcelona, España
José Gabriel Sánchez	UNAM, México
José Gabriel Sánchez Ruiz	UNAM, México
Josep Gascón	Universidad Autónoma de Barcelona, España
Josep Slisko	Benemérita Universidad de Puebla, México
Laurent Vivier	Université Paris Diderot - Paris 7, Francia
Leonora Díaz	Universidad de Valparaíso, Chile
Lianggi Espinoza	Universidad de Valparaíso, Chile
Liliana Suárez	Instituto Politécnico Nacional, México
Luc Trouche	Institut Français de l'Éducation Department, Francia
Luis Cabrera	INEE, México
Luis Carlos Arboleda	Universidad del Valle, Colombia
Luis López	DME-Cinvestav, México
Luis Manuel Aguayo Rendón	Universidad Autónoma de Zacatecas, México
Luis Radford	Université Laurentienne, Canadá
Luis Rico	Universidad de Granada, España
Luzia Aparecida de Souza	Universidade Estadual Paulista, Brasil
Manuel Soriano	Universidad de Valencia, España
Marger Viana	Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil
Maria Célia Leme da Silva	Universidade Federal de São Paulo, Brasil
Maria de Lurdes Serrazina	Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

BY-NC

Ma. del Socorro García González	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Mario Caballero	DME-Cinvestav, México
Mario José Martín Pavón	Universidad Autónoma de Yucatán, México
Marisa Quaresma	Universidade de Lisboa, Portugal
Mónica Monroy Kuhn	Universidad Popular Autónoma de Puebla, México
Mónica Villareal	Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
Núria Planas	Universidad Autónoma de Barcelona, España
Paloma González-Castro	Universidad de Oviedo, España
Patricia Rosas Colín	DME-Cinvestav, México
Patricia Salinas	ITESM, México
Pedro Felipe Vidal	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Ruth Rodríguez	ITESM, México
Saddo Ag Almouloud	PUCSP, Brasil
Samantha Quiroz	ITESM, México
Santiago Inzunza Cazares	Universidad Autónoma de Sinaloa, México
Soledad Estrella	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Sonia Ursini	DME-Cinvestav, México
Tatiana Mendoza	DIE-Cinvestav, México
Tomás Ortega	Universidad de Valladolid, España
Uldarico Malaspina	Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Ulises Xolocotzin	DME-Cinvestav, México
Verónica Molfino Vigo	Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, Uruguay
Víctor Larios	Universidad Autónoma de Querétaro, México
Yadira Marcela Mesa	Universidad de Antioquia, Colombia
Yolanda Serres	Universidad Central de Venezuela, Venezuela

VOLUMEN 0, 1997

Presentación de Relime ROSA MARÍA FARFÁN / La investigación en matemática educativa en la Reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior.

VOLUMEN 1, 1998

I. GUZMÁN / Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. L. RICO / Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. M. ARTIGUE / Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? F. CORDERO / El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones.

VOLUMEN 2, 1999

H. J. DE LEÓN PÉREZ / Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. V. A. LÓPEZ GARCÍA / Historia de los inicios de la enseñanza del cálculo infinitesimal en México: 1785-1867. L. D. MELGAREJO / Modelos para la representación y procesamiento del conocimiento pedagógico en tutoriales inteligentes. E. MORALES / Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de 9º grado de educación básica.

M. ANIDO DE LÓPEZ, H. E. RUBIO SCOLA / Un ejemplo de aprendizaje en el sentido de Polya. B. GÓMEZ ALFONSO / Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de "compañías". C. RIZO CABRERA, L. CAMPISTROUS PÉREZ / Estrategias de resolución de problemas en la escuela. L. RADFORD / La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica.

VOLUMEN 3, 2000

D. DENNIS, J. CONFREY / La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. B. D'AMORE, B. MARTINI / Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. E. DUBINSKY / De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. M. SIERRA VÁZQUEZ, M. T. GONZÁLEZ ASTUDILLO, C. LÓPEZ ESTEBAN / Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad.

Y. O'FARRILL / Sistema entrenador inteligente con tecnología multimedia. óptima-Geometría. G. MUÑOZ / Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el

 CC BY-NC

Cálculo integral. M. B. FERNÁNDEZ / Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. C. CUBILLO, T.ORTEGA / Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las Matemáticas. M. F. LASALVIA, J. D. PIQUET / Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos".

M. ACEVEDO DE MANRIQUE, M. FALK DE LOSADA / Formación del pensamiento algebraico de los docentes. R. CANTORAL, H. MIRÓN / Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. A. CAÑADA / Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de onda y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. B. D'AMORE / Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. P. FLORES, C. BATANERO, J. D. GODINO / Aplicación del análisis de textos mediante técnicas multivariantes al estudio del cambio de concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. G. GARCÍA, C. SERRANO / Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: El caso de la función.

VOLUMEN 4, 2001

O. L. LEÓN, D. I. CALDERÓN / Validación y argumentación de lo matemático en el aula. R. A. OLFOS / Entendiendo la clase de matemática. G. T. BAGNI / La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. R. ZAZKIS / Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes.

F. CORDERO / La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. J. GASCÓN / Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. J. LEZAMA, R. M. FARFÁN / Introducción al estudio de la reproducibilidad.

C. ACUÑA / Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA / Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. A. CAMACHO, M. AGUIRRE / Situación didáctica del concepto de límite infinito. M. R. OTERO, M. FANARO, I. ELICHIRIBEHETY / El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad.

VOLUMEN 5, 2002

A. CAMACHO / Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite. A. CASTAÑEDA / Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. G. MARTÍNEZ / Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. L. SIÑERIZ / La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos.

A. CONTRERAS, M. CONTRERAS, M. GARCÍA / Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. F. CORDERO, E. MIRANDA / El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. I. ELICHIRIBEHETY, M. R. OTERO, M. A. FANARO / Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. M. M. SOCAS / Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática.

C. DOLORES, G. ALARCÓN, D. F. ALBARRÁN / Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: El caso de la velocidad y la trayectoria. A. GARCIADIEGO / El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. T. ORTEGA, M. ORTIZ / Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula.

VOLUMEN 6, 2003

C. BROITMAN, H. ITZCOVICH, M. E. QUARANTA / La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. R. CANTORAL, R. M. FARFÁN / Matemática Educativa: Una visión de su evolución. M. C. PAPINI / Algunas explicaciones vigostkianas para los primeros aprendizajes del álgebra.

L. ANDRADE, P. PERRY, E. GUACANEME, F. FERNÁNDEZ / La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación? L. J. BLANCO, M. BARRANTES / Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. R. CANTORAL, E. RESÉNDIZ / El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar.

A. BERGÉ, C. SESSA / Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. K. BARBOSA / La enseñanza de inecuaciones con el punto de vista de la teoría APOE. D.E. MEEL / Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. B. D´AMORE / Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática.

VOLUMEN 7, 2004

G. T. BAGNI / Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. A. BRUNO, J. A. GARCÍA / Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican

 BY-NC

problemas aditivos con números negativos. S. M. SEGURA / Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Y. SERRES / Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática.

P. AGUILAR, A. OKTAÇ / Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. M. FERNÁNDEZ, C. RONDERO / El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. L. RADFORD / Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. L. ORTIZ-FRANCO / Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica.

C. DOLORES / Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. M. E. QUARANTA, P. TARASOW / Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. M. E. VALDEMOROS / Lenguaje, fracciones y reparto.

VOLUMEN 8, 2005

C. ACUÑA / ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. M. MARCOLINI, J. PERALES / La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación Universitaria. H. PARRA / Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. F. PLUVINAGE / Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades.

C. CASTELA / A propósito de los conocimientos que no se enseñan explícitamente, empero necesarios para tener éxito en las matemáticas escolares. M. F. DELPRATO / Educación de adultos: ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos? L. DÍAZ / Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. S. GARBIN / ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. G. MARTÍNEZ / Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. G. MONTIEL / Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada.

C. BATANERO / Significados de la probabilidad en la educación secundaria. F. CORDERO / El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. C. CRESPO, R.M. FARFÁN / Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. M. FALSETTI, M. RODRÍGUEZ / Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿Qué perciben los alumnos? J. LEZAMA / Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. M. ROSA, D. CLARK / Las raíces históricas del programa Etnomatemáticas. B. D´AMORE / Oscar Reutersvärd.

BY-NC

VOLUMEN 9, 2006

E. APARICIO, R. CANTORAL / Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. A. BERGÉ / Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del conjunto de los números reales. A. CONTRERAS, L. ORDOÑEZ / Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. L. GARCÍA, C. AZCÁRATE, M. MORENO / Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. J. D. GODINO, V. FONT, A. CONTRERAS, M. WILHELMI / Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. M.R. OTERO, L. BANKS-LEITE / Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media.

S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA, S.N. GATICA, J. BENEGAS / Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. A. BRUNO, M. NODA, R. AGUILAR, C. GONZÁLEZ, L. MORENO, V. MUÑOZ / Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. G. BUENDÍA / Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. A. CASTAÑEDA / Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. O. PEREZ / ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? E. RUIZ, M.E. VALDEMOROS / Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina.

M. A. ANIDO, R. LÓPEZ, H.E. RUBIO / Las superficies en el aprendizaje de la geometría. V. LARIOS / La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. A.L. LAVALLE, E.B. MICHELI, N. RUBIO / Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. Y. OTÁLORA, M. OROZCO / ¿Por qué 7345 se lee como “setenta y tres cuarenta y cinco? E. RESENDIZ / La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. R. UICAB, A. OKTAÇ / Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica.

RELIME ESPECIAL, 2006

L. RADFORD / Introducción. Semiótica y Educación Matemática. M. OTTE / Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. R. DUVAL / Quelle sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques? R. CANTORAL, R.M. FARFÁN, J. LEZAMA, G. MARTÍNEZ / Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. L. RADFORD / Elementos de una teoría cultural de la objetivación. J.D. GODINO, V. FONT, M. WILHELMI / Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.

 BY-NC

A KOUKKOUFIS, J. WILLIAMS / Semiotic Objectifications of the Compensation Strategy: En Route to the Reification of Integers. B. D´AMORE / Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. A. GAGATSIS, I. ELIA, N. MOUSOULIDES / Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? A. SÁENZ-LUDLOW / Learning Mathematics: Increasing the Value of Initial Mathematical Wealth. GIORGIO T. BAGNI / Everyday and Mathematical Language 100 Years after the Publication of "On Denoting" by Bertrand Russell. F. ARZARELLO / Semiosis as a Multimodal Process. B. D'AMORE / Conclusiones y perspectivas de investigación futura.

VOLUMEN 10, 2007

F. CORDERO, R. FLORES / El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. B. D´AMORE, M. I. FANDIÑO / Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. C. DOLORES, I. CUEVAS / Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. C.L. OLIVEIRA, G. da SILVA NUNES / Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível. A. ROMO, A. OKTAÇ / Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. L. ZUÑIGA / El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo.

R. CANTORAL / Índices, bases de citas y factor de impacto. ¿Una política editorial para Relime? B. D´AMORE, J. D. GODINO / El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. T. M. MENDONÇA, S. M. PINTO, I. M. CAZORLA, E. RIBEIRO / As estruturas aditivas nas séries iníciais doensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. J. G. MOLINA, A. OKTAÇ / Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. G. TORREGROSA, H. QUESADA / Coordinación de procesos cognitivos en geometría.

R. CANTORAL / ¿Publicar o perecer, o publicar y perecer? A. ALSINA i PASTELLS / ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. J.J. DÍAZ, V. BERMEJO / Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. U. MALASPINA / Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. C.R. MURO, P. CAMARENA, R. C. FLORES / Alcances de la Teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. M.L. RODRÍGUEZ, L. RICARDO / El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana.

VOLUMEN 11, 2008

R. CANTORAL / ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad? V. ABOITES, G. ABOITES / Filosofía de la matemática en el nivel medio superior. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO, J. GIMÉNEZ / Modelos matemáticos a través de proyectos. C. STENGER, K. WELLER, I. ARNON, E. DUBINSKY, D. VIDAKOVIC / A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. M. E. VALDEMOROS, E. F. RUIZ / El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos.

R. CANTORAL / El papel de las revistas especializadas en las agendas de investigación en Matemática Educativa. S. CASTILLO / Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A. MATOS, J. P. DA PONTE / O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. º ano. A. B. RAMOS, V. FONT / Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. G. SÁNCHEZ-MATAMOROS, M. GARCÍA, S. LLINARES / La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.

R. CANTORAL / En defensa de "lo nuestro". M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. J. GALLARDO, J. L. GONZÁLEZ, W. QUISPE / Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. G. SCHUBRING / Gauss e a tábua dos logaritmos. C. VALDIVÉ, S. GARBIN / Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

VOLUMEN 12, 2009

R. CANTORAL / Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). G. BUENDIA, A. ORDOÑEZ / El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. C. CRESPO CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. U. T. JANKVIST / On empirical research in the field of using history in Mathematics Education. M. I. ROCHA, H. A. MENINO / Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos.

R. CANTORAL / Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. S. MAYÉN, C. BATANERO, C. DÍAZ / Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. N. PLANAS, N. IRANZO / Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. L. RADFORD, M. ANDRÉ / Cerebro, cognición y matemáticas. M. A. SORTO, J. H. MARSHALL,

 BY-NC

T. F. LUSCHEI, M. CARNOY / Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative study in primary and secondary education.

R. CANTORAL / Revistas Latinoamericanas en ISI WoK, reflexiones con la comunidad. A.R. CORICA, M.R. OTERO / Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de evaluación. B.GARII, R. SILVERMAN / Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School. P. SALINAS, J.A. ALANÍS / Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una institución educativa. F. VISEU, J.P. DA PONTE / Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s.

VOLUMEN 13, 2010

R. CANTORAL / Finalmente… trois. A. ALSINA, M. DOMINGO / Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. M. APARECIDA VIGGIANI BICUDO, M. ROSA / Educação matemática na realidade do ciberespaço – que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? C. M. FERNÁNDEZ ESCALONA / Análisis epistemológico de la secuencia numérica. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas. C.ARANDA, M. L.CALLEJO / Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. M. BERGER / A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system. F. CORDERO OSORIO, C. CEN CHE, L. SUÁREZ TÉLLEZ / Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. J. A. FERNANDES, P. FERREIRA CORREIA, R. ROA GUZMÁN / Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.

R. CANTORAL / ¿Qué es la Matemática Educativa? F. J. BOIGUES, S. LLINARES, V. D. ESTRUCH / Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. C. CRESPO CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. M. D. POCHULU / Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. H. da S. ZAGO, C. R. FLORES / Uma proposta para relacionar arte e educação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2010

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2010

 BY-NC

VOLUMEN 14, 2011

R. CANTORAL / La Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa. G. GÁLVEZ, D. COSMELLI, L. CUBILLOS, P. LEGER, A. MENA, E. TANTER, X. FLORES, G. LUCI, S. MONTOYA, J. SOTO-ANDRADE / Estrategias cognitivas para el cálculo mental. L. RUIZ-HIGUERAS, F. J. GARCÍA GARCÍA / Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. J. DÍEZ-PALOMAR, J. M. MENÉNDEZ, M. CIVIL / Learning mathematics with adult learners: drawing from parents' perspective. M. C. RICOY, M. J. V. S. COUTO / As TIC no ensino secundário na matemática em Portugal: a perspectiva dos professores.

R. CANTORAL / Relime en ERIH. J. L. BELMONTE MARTÍNEZ, M. SIERRA VÁZQUEZ / Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. E. CANUL, C. DOLORES, G. MARTÍNEZ-SIERRA / De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. J. GASCÓN / Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. V. Y. KATAOKA, A. C. S. de OLIVEIRA, A. de SOUZA, A. RODRIGUES, M. SILVA de OLIVEIRA / A Educação Estatística no Ensino Fundamental II em Lavras, Minas Gerais, Brasil: avaliação e intervenção.

R. CANTORAL / Quince años y nuevos retos para Relime. A. CONTRERAS de la FUENTE, M. GARCÍA ARMENTEROS / Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. M. L. MAGALHÃES GOMES / O ensino de aritmética na escola nova: Contribuições de dois escritos autobiográficos para a história da educação matemática (Minas Gerais, Brasil, primeiras décadas do século xx). A. T. de OLIVEIRA, G. de la ROCQUE PALIS / O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de matemática. M. POCHULU, V. FONT / Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa.

VOLUMEN 15, 2012

R. CANTORAL / *Nani gigantum humeris insidentes*. Relime y el Acceso Abierto. C. FERNÁNDEZ, S. LLINARES / Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. G. MARTÍNEZ / Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. J. J. ORTIZ, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS / Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. M. RIBEIRO, R. MONTEIRO, J. CARRILLO / Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido.

VOLUMEN 16, 2013

 BY-NC

R. CANTORAL / El talón de Aquiles. L. ALBARRACÍN, N. GORGORIÓ / Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. A. M. OLLER MARCÉN, J. M. GAIRÍN SALLÁN / La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. J. PRIOR MARTÍNEZ, G. TORREGROSA / Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. L. A. DE SOUZA, A. V. MARAFIOTI GARNICA / As matemáticas modernas: um ensaio sobre os modos de produção de significado ao(s) movimento(s) no ensino primário brasileiro.

VOLUMEN 17, 2014

R. CANTORAL / El quehacer del matemático educativo: el pasaje del *sujeto* a su *entorno.* / I. M. ESCUDERO, J. M. GAVILÁN, G. SÁNCHEZ-MATAMOROS / Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. P. LEGER, G. GÁLVEZ, M. INOSTROZA, L. CUBILLOS, G. LUCI, E. TANTER, D. COSMELLI, J. SOTO-ANDRADE / ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: características de su diseño y resultados preliminares. G. OBANDO, C. E. VASCO, L. C. ARBOLEDA / Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. S. E. PARADA, F. PLUVINAGE / Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: *Relme*, *Clame* y *Relime.* / J. JUSTIN, C. L. OLIVEIRA, L. MORENO / Registros de representação semiótica e geometría analítica: uma experiência com futuros professores. S. PALMAS, D. BLOCK / Acceso a la representación escrita de los números naturales: una secuencia didáctica para adultos de baja o nula escolaridad. H. J. RUIZ, Y. RIASCOS / ¿4^3 se puede leer como "cuatro subido a la tres"?: un estudio sobre las estrategias de construcción de la representación polinomial. C. SÁENZ, A. LEBRIJA / La formación continua del profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva para una enseñanza centrada en el aprendiz.

R. CANTORAL / No hay revista sin comunidad, ni comunidad sin diálogo. V. ALBANESE, F. J. PERALES / Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de la práctica artesanal soguera. C. FONSECA, J. GASCÓN, C. OLIVEIRA / Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. A. MORALES, F. CORDERO / La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. F. VISEU, L. MENEZES / Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2014

A. KUZNIAK, P. R. RICHARD / Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. J.-C. RAUSCHER, R. ADJIAGE / Espaces de travail et résolution d'un problème de modélisation. B. PARZYSZ / Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. A. BRACONNE-MICHOUX / Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec et pour les futurs enseignants ? K. NIKOLANTONAKIS, L. VIVIER / Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve. S. COUTAT / Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? X. XISTOURI, D. PITTA-PANTAZI, A. GAGATSIS / Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. P. MICHAEL-CHRYSANTHOU, A. GAGATSIS / Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. E. MONTOYA - DELGADILLO, A. MENA-LORCA, J. MENA-LORCA / Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. I. ELIA, K. EVANGELOU, K. HADJITTOOULI, M. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN / A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2014

R. I. BARRERA / Un Espace de Travail Mathématique pour la mise en evidence des significations géométriques de la multiplication de nombres réels et complexes : mediation semiotique et parcours des élèves. A. GAGATSIS, E. DELIYIANNI / Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. V. CARRIÓN, F. PLUVINAGE / Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. D. TANGUAY, L. GEERAERTS / Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : Comment intégrer le travail avec les LGD ? M. TESSIER-BAILLARGEON, P. R. RICHARD, N. LEDUC, M. GAGNON / Conception et analyse de geogebratutor, un système tutoriel intelligent : genèse d'un espace de travail géométrique idoine. M. BLOSSIER, P. R. RICHARD / Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. J. MITHALAL-LE DOZE / Initier un processus de preuve mathématique dans un environnement de géométrie dynamique 3D. I. Mª GÓMEZ-CHACÓN, J. ESCRIBANO / Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. A. KUZNIAK / Travail mathématique et domaines mathématiques. S. R. DE COTRET / Espaces de travail / espaces de connaissances : Peut-on imaginer une navette pour y voyager ? D. ZALDÍVAR, C. CEN CHE, E. BRICEÑO, M. MÉNDEZ, F. CORDERO / El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. O. FIGUERAS, P. FLORES, F. PLUVINAGE / La mediación docente y los espacios de trabajo matemático.

 CC BY-NC

VOLUMEN 18, 2015

R. CANTORAL, G. MONTIEL, D. REYES-GASPERINI / El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. / J. ARRIETA, L. DÍAZ / Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. A. MAZ-MACHADO, L. RICO / Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas en los siglos XVIII y XIX. L. SOLANILLA, A. CELI TAMAYO, G. A. PAREJA / Memoria sobre la emergencia de las funciones elípticas. V. H. G. DE SOUZA, R. NOGUEIRA DE LIMA, T. M. M. CAMPOS / A functional graphic approach to inequations.

P. PEÑA-RINCÓN, C. TAMAYO-OSORIO, A. PARRA / Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos. / A. P. AIRES, H. CAMPOS, R. POÇAS / Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. B. D'AMORE, M. FANDIÑO, M. IORI, M. MATTEUZZI / Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". J. GARCÍA-GARCÍA, F. M. RODRÍGUEZ, C. NAVARRO / Las estrategias utilizadas por los niños *Tee Savi* en la resolución de problemas aritméticos. V. C. LLANOS, M. R. OTERO / La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un recorrido de estudio y de investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado.

P. VALERO, M. ANDRADE-MOLINA, A. MONTECINO / Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. G. A. MARMOLEJO, M. T. GONZÁLEZ / Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. A. MENA-LORCA, J. MENA-LORCA, E. MONTOYA-DELGADILLO, A. MORALES, M. PARRAGUEZ / El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. J. PEIXOTO / Gestos, sinais e esquemas de aprendizes surdos na multiplicação. E. A. SÁNCHEZ, A. L. GÓMEZ-BLANCARTE / La negociación de significado como proceso de aprendizaje: el caso de un programa de desarrollo profesional en la enseñanza de la estadística.

VOLUMEN 19, 2016

A. MÁRQUEZ, I. ORDORIKA, A. DÍAZ-BARRIGA, R. CANTORAL, W. DE VRIES / Consorcio Mexicano de Revistas de Investigación Educativa. / P. ARTEAGA, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS, G. CAÑADAS / Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. M. J. CARVALHO, A. FREITAS / Nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência: um caso de estudo no ensino secundário português. M. POCHULU, V. FONT, M. RODRÍGUEZ / Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. R. RODRÍGUEZ, S. QUIROZ / El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

BY-NC

VOLUMEN 20, 2017

 BY-NC

matemáticas: incidencia de la gravedad de las dificultades. A. BAROJAS, I. GARNICA / Comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos [17-21]: estudio de casos. S. ESTRELLA, R. OLFOS, S. MORALES, P. VIDAL / Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas.

Suscripción a Relime

Costo del volumen 20 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 20, Número 3

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400, México, CDMX

Noviembre de 2017
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes