RELIME 19-3
01903
9 771665 243002

1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 19, Núm. 3, noviembre 2016

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 19, Núm. 3, 2016

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Luis Moreno Chandler – Panamá*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 19, Núm. 3, noviembre, 2016. Tiraje 1000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2016 Impreso en México

Volumen 19 – Número 3 – 2016

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ISSN 1665 – 2436.

Edición Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. – México,
RFC CMM 040505 IC7.
Impreso en México

2016

Volumen 19 Número 3 Noviembre de 2016

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, Vol. 19, No. 3, noviembre 2016, es una publicación cuatrimestral editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., a través del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.clame.org.mx/relime.htm, relime@clame.org.mx. Editor responsable: Ricardo Cantoral. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-042513070000-102, ISSN: 1665-2436, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, D. F., este número se terminó de imprimir en noviembre de 2016, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

“Relime se publica con el apoyo de Conacyt, Cinvestav y Clame”

EDITORIAL

LA PUBLICACIÓN CIENTÍFICA Y ALGUNOS FENÓMENOS EMERGENTES

SCIENTIFIC PUBLICATION AND SOME EMERGING PHENOMENA

RICARDO CANTORAL
Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN – México

Con este número de la Relime - la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, órgano de investigación del Clame AC – Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Asociación Civil, se llega al cierre del volumen 19 y de este modo, a sus veinte años de vida. Considerando que el primer volumen vio la luz con el denominado "Número 0" para cumplir con el doble propósito de mostrar un nacimiento sin pasado reconocible en la tradición científica latinoamericana de la Matemática Educativa y para testificar, como un claro homenaje, el enorme pasado científico mesoamericano de incluir al cero como número. Este último acontecimiento se expresa también en el logo mismo de la Revista.

En esta editorial daremos cuenta de algunos fenómenos derivados de las exigencias institucionales por la publicación que hemos presenciado durante los últimos años. Se pretende con ello, incentivar al debate colegiado sobre sus efectos, tanto aquellos que han promovido la consolidación de jóvenes investigadores, como otras menos benéficas, como la de publicar a toda costa asociando calidad con índices bibliométricos.

Desde su fundación, hacia finales de los *noventas* del siglo XX, supimos bien que una revista científica resultaría fundamental en la labor de consolidación de una tradición propia. Nuestra mirada no se dirigía, en ese entonces, hacia la búsqueda de los factores de impacto bibliométrico a los que he hecho referencia en editoriales anteriores (Cantoral, 2007, Márquez et. al, 2016), ni en la pertenencia a bases de referencias bibliográficas. Buscábamos, simple y llanamente, contribuir en la constitución de una nueva profesión científica, la del matemático educativo,

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (3): 249 - 254.
DOI: 10.12802/relime.13.1930

a través de la promoción de la escritura especializada. Había que mostrar la forma en que se documentaban los logros científicos más allá que aquellas que brinda la publicación en eventos académicos. Tener, por así decirlo, ejemplos aceptados por la comunidad que hicieran la función de faro para el resto de "los navegantes".

Esta intención, si bien compartida, se concretó mediante la existencia de Relime y con el aumento progresivo de su visibilidad. Cada vez publican en sus páginas más colegas de latitudes diversas y con una multitud de "tradiciones de escuela". Este proceso se vio acompañado por otro proceso, la consolidación de los programas de posgrado en Matemática Educativa en la región Latinoamericana.

Con el paso de los años, Relime fue dejando su carácter testimonial en la investigación "de y para Latinoamérica", para constituirse en la revista iberoamericana mejor posicionada en los índices internacionales ISI Web of Science (Thomson Reuters) y Scopus (Kluwer). Este proceso fue posible gracias a la aparición de una nueva generación de investigadores y estudiantes del posgrado y del respaldo desinteresado de un selecto grupo de líderes mundiales quienes vieron en la iniciativa Relime, una voz de esperanza para la región. Es fácil detectar sus nombres entre los miembros de los Comités y en las páginas de la revista.

Sin embargo, este proceso de evolución de las publicaciones científicos se ha visto acompañado de diversos acontecimientos que denominaré, fenómenos emergentes. Por ejemplo, con la consolidación de las revistas científicos en los índices, se presentó un nuevo fenómeno que consistía en asociar calidad o prestigio un investigador con la inclusión de las revistas donde publica, en ISI WoS o en Scopus. De ahí, de la inclusión en los índices, se pasó muy rápidamente a su jerarquización mediante el su factor de Impacto bibliométrico (JCR en ISI y SCR en Scopus). Se pervirtió la labor científica que en principio busca producir conocimiento nuevo para el desarrollo científico, tecnológico y social, con una política laboral que sirve para asignar salarios y posiciones del mundo del trabajo, que si bien es académico, es finalmente también trabajo remunerado.

Estas políticas tienden a producir fenómenos derivados, como el de publicar artículos con cada vez más autores a fin de compartir puntos y logros, y en la de publicar las investigaciones en forma seccionada a fin de lograr más artículos en el menor tiempo posible. En el caso de Relime se pasó de artículo publicados por autoría única en 1997 (año de nuestra fundación) hasta tener en este número, Núm. 3, Vol. 19, un promedio de 2.75 autores por artículo publicado. Este mismo fenómeno se ha documentado en diversas publicaciones, por ejemplo recientemente se publicó un artículo que analiza para el caso de la Revista Argentina de Cardiología (Borracci et. al, 2011), donde documentan la evolución del número de autores por artículo partiendo de su fundación en 1934 hasta el 2009, como se puede ver claramente desde el Resumen del artículo "Publicar juntos o perecer. Incremento del número de autores por artículo en la Revista Argentina de Cardiología entre 1934 y 2009":

"RESUMEN

Introducción: A partir de que varias revistas internacionales demostraron un incremento del número promedio de autores por artículo, el concepto de "publicar o perecer", referido en el ámbito académico a la necesidad de publicar artículos permanentemente, derivó en el concepto de "publicar juntos o perecer".

Objetivo: Analizar la tendencia de crecimiento de la cantidad de artículos, autores y autores por artículo en la Rev Argent Cardiol desde su creación hasta la actualidad.

Material y métodos: Se revisó en forma retrospectiva la base de datos de los artículos publicados en Rev Argent Cardiol desde 1934 hasta 2009. Se recabó información sobre el número de artículos, autores y la cantidad de autores por artículo para cada año por separado y se estudiaron la tendencia en el tiempo y las tasas de variación.

Resultados: El incremento de la cantidad de artículos entre 1934 y 2009 tuvo una tasa de variación de 1,23 veces, lo que corresponde a una tasa media de crecimiento del 1% anual. En el número de autores, la tasa de variación fue de 6,75 veces, con una tasa media de crecimiento del 2,7% anual. La tasa de variación de la cantidad de autores por artículo mostró un incremento de 2,48 veces, lo que equivale a una tasa media de crecimiento del 1,6% anual, mientras que el número promedio de mujeres por artículo mostró una tasa de crecimiento entre 1958 y 2009 de 18 veces, lo que corresponde a una tasa media de crecimiento anual del 5,8%.

Conclusiones: Se observó un incremento significativo del número absoluto de artículos, autores y autores por artículo entre 1934 y 2009. Se comprobó además un aumento del número promedio de mujeres por artículo en los últimos 50 años; la magnitud de estos crecimientos fue del 1% al 5,8% anual. Esta tendencia a aumentar el promedio de autores por artículo podría deberse a una mayor colaboración científica, a un incremento del número de trabajos multicéntricos o multidisciplinarios o a un manejo menos estricto de los criterios para ser incorporado como autor en un trabajo."

Como dato anecdótico, durante estos años he recibido solicitudes insólitas como la de mandar, una vez terminado el proceso de arbitraje y contar con un resultado favorable, la solicitud de los autores originales, la inclusión de un autor más con el argumento de que se les había olvidado incluirlo … simplemente sin palabras. Por supuesto, decidí no aceptar en esas condiciones, su publicación en Relime.

REFERENCIAS

Cantoral R. (2007). ¿Publicar o perecer, o publicar y perecer? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(3), 1–3.

Borracci, R., Baldi, J., Doval, Tajer, C. (2011). Publicar juntos o perecer. Incremento del número de autores por artículo en la Revista Argentina de Cardiología entre 1934 y 2009. *Revista Argentina de Cardiología*, *79*(2), 148–151.

Márquez, A, Ordorika, I., Díaz Barriga, A., Cantoral, R., de Vries, W. (2016). Consorcio mexicano de revistas de investigación educativa. *Perfiles Educativos*, *Vol. XXXVIII*, Núm. 151, 3–10.

Ricardo Cantoral

Entre Campeche, Aguascalientes y Zacatecas.

María del Pilar Beltrán Soria, Gisela Montiel Espinosa

LA MODELACIÓN EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL - TRIGONOMÉTRICO EN ESTUDIANTES MEXICANAS DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

Modeling in trigonometric functionality development thinking of middle school mexican students

RESUMEN

Presentamos los resultados de un estudio centrado en el papel de la modelación en el desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico (dpFT). Se analizó la resolución de una situación-problema fundamentada en el planteamiento teórico-didáctico de la funcionalidad-trigonométrica, construido desde la teoría socioepistemológica. Se obtuvo evidencia del dpFT en las producciones y los argumentos de las estudiantes, y se identificó a la modelación como la práctica de referencia que les permitió matematizar el movimiento del péndulo.

PALABRAS CLAVE:

- *Práctica de referencia*
- *Epistemología de prácticas*
- *Funcionalidad trigonométrica*
- *Movimiento y cambio*

ABSTRACT

We present the results of a study focused on the role of modeling in the development of functional-trigonometric thinking. Students' solutions of a problem-situation, designed based on the Socioepistemologic theoretical and didactic proposal of Trigonometric-Functionality, was analyzed. Evidence was obtained in the students' productions and arguments, and modeling was identified as the reference practice which allowed the mathematization of pendulum motion.

KEY WORDS:

- *Reference practice*
- *Epistemology of practice*
- *Trigonometric functionality*
- *Motion and change*

RESUMO

Apresentamos os resultados de um estudo focado no papel da modelagem no desenvolvimento do pensamento funcional-trigonométrico. A resolução de uma situação-problema, projetado com base na proposta socioepistemológica teórica e didático de Funcionalidade-Trigonométrica, foi analisada. As provas foram obtidas nas produções e os argumentos dos alunos, e foi identificado modelagem como prática de referência permitido mathematize movimento do pêndulo.

PALAVRAS CHAVE:

- *Prática de referência*
- *Epistemologia da prática*
- *Funcionalidade trigonométrica*
- *Movimento e mudança*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (3): 255-286.
Recepción: Abril 16, 2014 / Aceptación: Junio 15, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1931

RÉSUMÉ

Nous présentons les résultats d'une étude centrée sur le rôle du modélisation dans le développement de la pensée fonctionnelle-trigonométrique. La résolution d'une situation-problème sur la base de l'approche théorique et didactique de la fonctionnalité-trigonométrique, à partir de l'approche théorique Socioépistémologie. La preuve de ce genre de pensée a été obtenue dans les productions et les arguments des étudiants, et nous avons identifié comme une «pratique de référence» que permis la mathématisation du mouvement pendulaire.

MOTS CLÉS:

- *Pratique et référence*
- *Épistémologie des pratiques*
- *La fonctionnalité trigonométrique*
- *Mouvement et changement*

1. Introducción

Los resultados de investigación en matemática educativa, ya sean teóricos o prácticos, no son inmediatamente transferibles al aula. De hecho, al implementar un diseño innovador, fundamentado en la investigación, se debe considerar a la escuela como un escenario que impone ciertas condiciones en su funcionamiento y al profesor como la figura en quien se deposita la mayor responsabilidad de la actividad didáctica escolarizada (Montiel, 2010). En ese sentido, la investigación basada en el diseño se perfila como una vía de innovación, en tanto busca incrementar el impacto, la transferencia y la traducción de la investigación educativa en la mejora de la práctica, enfatizando la necesidad de construir teoría y principios de diseño que guíen, informen y mejoren, tanto la aplicación como la investigación en contextos educativos (Anderson & Shattuck, 2012).

En este artículo, presentamos una investigación basada en una propuesta teórica-didáctica que asume a la experiencia de aprendizaje como la participación de prácticas donde el conocimiento se pone en uso. La funcionalidad-trigonométrica (FT) es el planteamiento de Montiel y Buendía (2013) sobre la construcción social de la función trigonométrica, y que fundamentan en investigaciones enmarcadas en la teoría socioepistemológica.

La situación-problema que diseñan las autoras en su planteamiento busca que el estudiante construya los significados que le son propios a esta función y que le den uso y sentido dentro y fuera de la matemática escolar. Esta propuesta se enmarca en el momento histórico de predicción que Montiel (2011) caracteriza haciendo uso de un modelo para la construcción social de conocimiento trigonométrico (Figura 1).

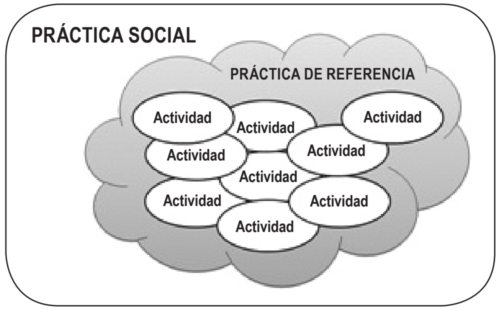


Figura 1. Modelo para la construcción social de conocimiento matemático (Montiel, 2011, p. 107)

En este modelo, la autora identifica actividades como la medición, comparación, cálculo, aproximación, experimentación, graficación y modelación. Éstas están articuladas intencionalmente para cumplir el propósito específico de matematizar la física, en particular, para matematizar el movimiento oscilatorio, a lo que denomina como práctica de referencia. A su vez, reconoce que la práctica de referencia y sus actividades están normadas por la práctica social de la predicción, entendida como la necesidad de conocer un estado futuro con base en el presente y las variaciones de su pasado.

Se identifica una clara relación entre las actividades del modelo y las actividades didácticas incluidas en la situación-problema diseñada por Montiel y Buendía (2013), con excepción de la modelación. Dado que el modelo de Montiel se desarrolla a partir del estudio de la construcción social del conocimiento trigonométrico en escenarios históricos, la modelación se reconoce como una actividad científica y no se le presenta con una caracterización explícita y detallada. Sin embargo, al transitar a un escenario escolar, reconocemos que la modelación no constituye una actividad definida y controlada por el alumno, sino que se integra en todo el proceso de enseñanza-aprendizaje y, en ese sentido, toma un carácter didáctico, no necesariamente matemático.

La investigación se plantea entonces responder a la pregunta: *¿Qué caracteriza a la modelación cuando la actividad matemática se sitúa en un escenario escolar?* Para dar respuesta, llevamos a cabo la puesta en escena formulada por las autoras recién mencionadas y, con base en la evidencia recolectada y su análisis, nos proponemos validar o robustecer la epistemología de prácticas configurada para explicar lo social de la función trigonométrica. Para atender ambos propósitos, fue necesario articular la propuesta teórica de las autoras con un constructo teórico sobre la modelación que nos permitiera analizar la actividad matemática de las estudiantes.

2. Fundamentación teórica

La FT es un planteamiento sobre la construcción social de la función trigonométrica desarrollado en el marco de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014; Cantoral, 2013; Cantoral & Farfán, 2004, 2003). Esta teoría se ocupa del estudio de fenómenos didácticos ligados al saber matemático y descansa en cuatro principios, tres de los cuales explican el porqué de los datos recolectados y su análisis a la luz de una epistemología de prácticas.

Por el principio de la "racionalidad contextualizada", se reconoce que la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado (Espinoza-Ramírez, 2009). Se asume la legitimidad de toda forma de saber, sea éste popular, técnico o culto, pues considera que, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana (Cantoral, 2013). Por ello, se reconoce que la validez de dicho saber es relativa al individuo, como sujeto social, por lo que depende en gran medida del marco de referencia y del grupo social-cultural del cual su conocimiento emerge. Éste constituye el principio del "relativismo epistemológico" considerando entonces que el sujeto no sólo desarrolla conocimiento dentro de la escuela, sino que se encuentra en constante significación de los objetos sobre los que actúa, aun si lo hace de forma inconsciente. Esta dinámica de significación está en la base misma del desarrollo del pensamiento (Cantoral, 2013), por ello supone un principio de "resignificación progresiva".

Consecuente con estos principios, se produce una descentración del objeto matemático (escolar). A partir de la evidencia recolectada y estudiada en las últimas décadas, se reconoce que el problema educativo no es el de la constitución de dicho objeto, sino el de su significación compartida mediante el uso culturalmente situado, dentro y fuera del aula, y a lo largo de todas las actividades de la vida diaria del aprendiz. En esta dirección, la FT constituye lo que en la teoría se denomina como epistemología de prácticas, es decir, una explicación sobre la construcción de los significados que le dan uso y sentido a la función trigonométrica, al seno de la actividad humana organizada en prácticas y normada por prácticas sociales, por lo que el principio normativo de la práctica social se manifiesta en la intencionalidad del diseño mismo; es lo que hace al aprendiz hacer lo que hace.

2.1. *Funcionalidad-Trigonométrica*

A nivel teórico, Buendía y Montiel (2011) comienzan esta propuesta analizando la actividad matemática retratada en la obra *Introductio in analysin infinitorum*

(1748) de Euler. En sus trabajos, el conocimiento trigonométrico se introduce al cuerpo de la familia de funciones, sin embargo, en esta obra en particular, hace una presentación sistemática y ordenada de las herramientas, nociones y conceptos, incluida la relación funcional trascendente trigonométrica. En este estudio de corte histórico, las autoras identifican las propiedades periódica y acotada, y el uso de la unidad de medida como elementos de significación de la función trigonométrica, señalando que:

> El uso de la unidad de medida (ángulos/radianes) es totalmente contextual y el reconocimiento de una propiedad, como la periódica, está más relacionado con el estudio y análisis del comportamiento del objeto matemático (la gráfica, por ejemplo) que con saber cómo aplicar la fórmula periódica en él. (p.76)

A partir de esto, las autoras analizan la evidencia de situaciones experimentales con estudiantes y profesores, y robustecen su propuesta con el estudio de las variaciones sucesivas en un comportamiento oscilatorio, en lo que denominarán como Funcionalidad-Trigonométrica (Montiel y Buendía, 2013). Las autoras establecen, particularmente para las funciones seno y coseno, que el estudiante construye la FT cuando:

i. Estudia lo trigonométrico desde un acercamiento variacional al movimiento oscilatorio, en donde se reconozca que el comportamiento trigonométrico se caracteriza y se distingue de otros comportamientos (algebraicos o trascendentes) por su variación y sus variaciones sucesivas, esto es, por cómo cambia y cómo cambian sus cambios.
ii. Identifica una unidad mínima de análisis del comportamiento que le permite predecir al trabajar con objetos periódicos. La predicción se favorece por la distinción entre el "se repite" y el "cómo se repite".
iii. Reconoce lo acotado del comportamiento en el análisis de los datos en relación a las condiciones del experimento.
iv. Hace uso de la unidad de medida adecuada a la experiencia física y la reconoce; en la relación tiempo-distancia y en la representación gráfica de los datos obtenidos del experimento.

Es posible identificar en estos elementos las propiedades de la función trigonométrica. Todas ellas son susceptibles de construirse sin interacción directa con los objetos matemáticos escolares, pero son la base para dotar de significado a la función como tal.

Con base en la clasificación de las propias autoras, la situación-problema puede considerarse un diseño experimental que, al igual que la propuesta de Grabovskij y Kotel'Nikov (1971), despojaría al estudio de lo trigonométrico, en el contexto físico, de las nociones geométricas que pueden llegar a causar dificultades en los estudiantes. Sin embargo, recientes investigaciones (Weber, 2005; Moore, 2014) han mostrado que la articulación coherente entre nociones geométricas y nociones de precálculo puede generar significados más robustos de la función trigonométrica en el estudiante. Éstas últimas, junto con los resultados de la presente, están siendo consideradas en la planeación de momentos de institucionalización de futuras experiencias de investigación basada en el diseño.

2.2. *Modelación*

Desde el enfoque teórico de la socioepistemología, se han realizado investigaciones dentro de las cuales la modelación juega un papel importante. Con los trabajos de Suárez y Cordero (2008), se inició una línea de trabajo sobre la "graficación-modelación", donde muestran claramente el cambio de centración de los conceptos matemáticos a las prácticas, lo que implica considerar a las matemáticas como una herramienta para modelar. Por ejemplo, en esta investigación, Suárez y Cordero no declaran el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de función, sino que estudian las construcciones de los estudiantes cuando éstos modelan el movimiento en un ambiente tecnológico que favorece la toma de datos, la graficación y sus análisis. Para los autores, la modelación es "una construcción de conocimiento cuando un individuo enfrenta a una tarea matemática en la que pone en juego un saber", perspectiva que, si bien encuadra con nuestras consideraciones teóricas de partida para la construcción de la FT, no nos permitía delimitar qué de la actividad se podría considerar modelación.

De una amplia revisión de diversas perspectivas sobre la modelación, tomamos el planteamiento de Confrey y Maloney (2007), aun cuando se posiciona en enfoques teóricos distintos, dado que comparte con la socioepistemología una postura respecto a la naturaleza del conocimiento matemático y a que su caracterización de la modelación permite delimitar cuándo se logra la modelación y qué es un modelo. Los autores parten de considerar a las matemáticas como una herramienta que permite a las personas darle sentido *a su experiencia*, adquirir juicios predictivos y ofrecer explicaciones, además de contribuir a su habilidad de identificar, dirigir y resolver problemas que se presentan en su entorno cultural y cotidiano.

Para Confrey y Maloney (2007) la modelación matemática es:

> [...] el proceso de encontrarse con una situación indeterminada, problematizarla y hacer uso de la investigación, el razonamiento y estructuras matemáticas para transformar la situación. La modelación produce un resultado –el modelo– que es una *descripción* o una *representación de la*

> *experiencia de la persona*, que en sí misma ha cambiado a través del proceso de modelación.
>
> La modelación no depende del mapeo a una definición particular de realidad en la teoría o para la evaluación. En su lugar precisa de la coordinación de *resultados justificados* con el método de investigación para proporcionar un medio que sirva para hacer frente a los problemas pendientes. Lo que se *produce*, *representa y registra* en la investigación de una situación indeterminada es un *conjunto de representaciones* que en sí mismas son *artefactos clave* en el proceso de modelación. Estos incluyen *observaciones, respuestas, medidas, interacciones, indicadores y descripciones.* Juntos pueden ser descritos como datos, sistemas de codificación, métodos de muestreo y colección de datos. Estos son típicamente mediados por varias tecnologías y son cercanos a los fenómenos observados, pero no son los fenómenos en sí mismos. Es a través de la coordinación de estos artefactos clave, junto con los medios para relacionarlos a través de la investigación, el razonamiento y la experimentación, que la situación indeterminada se convierte en una situación determinada, el todo unificado al que llamamos modelo (p. 60).

En el análisis que hacen de las experiencias didácticas, los autores no se refieren a un conocimiento matemático institucionalizado que se aplique y resuelva la situación, sino aquéllos de los que hace uso el estudiante, pero que le permiten lograr la modelación. De igual forma, no reconocen "un único" modelo válido, sino "el modelo del estudiante", dándole igual valor a una fórmula que a un dibujo, siempre que estos sean la vía de transformación de la situación. Ambas consideraciones se corresponden con nuestros principios de racionalidad contextualizada y relativismo epistemológico, sin embargo, ampliamos la mirada de la modelación de la situación a la modelación para el desarrollo de un tipo particular de pensamiento matemático.

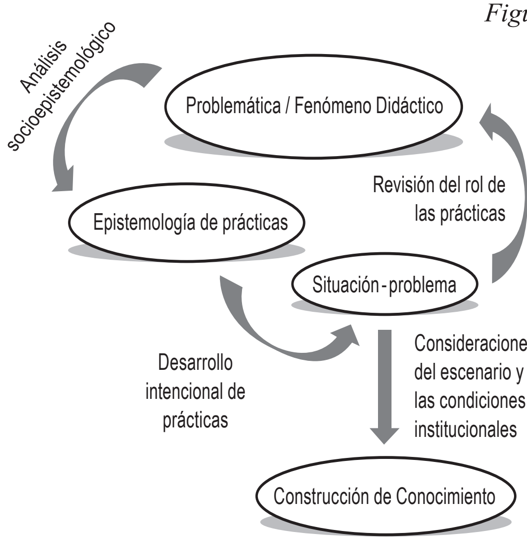
3. Consideraciones metodológicas

El estudio que aquí reportamos es un momento de un programa más amplio de investigación sobre la "Construcción Social de Conocimiento Trigonométrico". Los resultados aportan a su avance, a la ampliación de las explicaciones a los fenómenos didácticos y al reconocimiento de piezas fundamentales para el rediseño pertinente del discurso matemático escolar. Es decir, no se concibe como una investigación con principio y fin, mucho menos presentamos resultados universales.

Este programa de investigación se conduce por una propuesta metodológica (Montiel y Buendía, 2012) que se ha ido configurando al seno de la socioepistemología (Figura 2). En particular, ubicamos el presente estudio en el momento que va de la situación-problema a la construcción de conocimiento, tomando en cuenta las condiciones del escenario en donde se realizó la puesta en escena. Las situaciones-problema pueden ser entendidas como un conjunto de condiciones de un fenómeno o preguntas que propician una problematización y serán el instrumento que permita el desarrollo de acciones en el sistema didáctico (Suárez, 2008).

Desde su planeación y diseño, una situación-problema debe dar cuenta de la resignificación del conocimiento matemático en juego, en tanto está fundamentada en una "epistemología de prácticas" producto de un "análisis socioepistemológico". Para llevar a cabo una experiencia didáctica con ella, buscando la construcción del conocimiento mismo, tendrá que considerarse ampliamente al escenario y a las condiciones institucionales para lograr no sólo la innovación, sino un entendimiento amplio de cómo, cuándo y por qué la innovación funciona. Esta innovación, fundamentada teóricamente, nos ayuda a entender las relaciones entre la teoría educativa, los diseños instruccionales y la práctica. En ese sentido, el diseño de la situación-problema y el análisis de su implementación son fundamentales para validar y robustecer las epistemologías de prácticas propuestas, revisando el rol de las prácticas en el entendimiento y la explicación de la problemática inicial de investigación o los fenómenos didácticos identificados.

Figura 2. Esquema metodológico (Montiel y Buendía, 2012, p. 446)



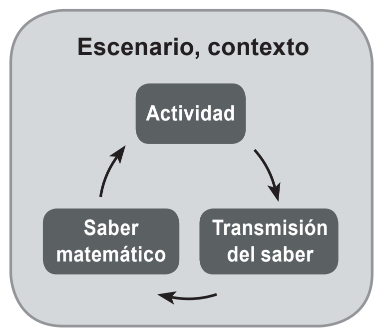


Figura 3. Unidad de análisis (Montiel y Buendía, 2012, p. 445)

En nuestra investigación, el análisis de la experiencia didáctica hace uso de la unidad conformada por la interacción entre la actividad observable de los individuos, la intencionalidad explícita de transmitir un cierto conocimiento y el saber matemático en juego relativo al escenario (Figura 3), con el objetivo de identificar y explicar acciones y argumentaciones de los estudiantes relativas a la matemática en juego.

3.1. *Población estudiantil*

La investigación se llevó a cabo en el Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF), Plantel Iztapalapa 1, institución donde el docente se contrata de tiempo completo y desarrolla de manera obligatoria actividades de docencia, tutoría e investigación. La primera autora del presente artículo es profesora de esta institución y el estudio que aquí reportamos se llevó a cabo durante su curso de Matemáticas IV, correspondiente al cuarto semestre y en el que se abordan contenidos de precálculo.

El grupo completo estuvo conformado por quince estudiantes, en edades que variaban entre 16 y 22 años; fueron cuatro hombres y once mujeres. Todos ellos habían tomado tres cursos de matemáticas previamente, relacionados con aritmética, razones y proporciones, y geometría analítica; pudiendo estar en el curso sin haber aprobado uno, dos o los tres cursos. Cinco de estas estudiantes conformaron el grupo tutoral y fue con ellas que se realizó el estudio que aquí reportamos. Se trabajó con ellas durante las 15 sesiones correspondientes a la tutoría y durante seis sesiones regulares de clase donde ellas apoyaron al grupo completo para llevar a cabo la experiencia didáctica.

Para mantener la privacidad de las tutoradas, cambiaremos sus nombres, nos referiremos a ellas como Luz, Emi, Sara, Ana y Fer. Ellas asisten a la tutoría por decisión personal, no son elegidas del grupo completo, por eso se les reconoce como un tipo de organización estudiantil propia del sistema del IEMS-DF.

3.2. *Adaptación y organización didáctica*

Nuestro camino metodológico comienza con la adaptación de la situación-problema de Montiel y Buendía (2013), estimando las condiciones de nuestro escenario escolar. Se conservaron las mismas actividades y preguntas, pero se decidió incluir la experimentación con el péndulo y el manejo de tecnología (calculadora de capacidad gráfica, sensor de movimiento y programa de videos), y no dejar sólo los dibujos del experimento, para que las propias tutoradas obtuvieran los datos y las gráficas incluidas en cada actividad. Para incorporar la experiencia de resolución de la situación-problema al curso de Matemáticas IV, de manera que se integrara de forma natural, fue necesario hacer una planeación cuidadosa del contenido y las estrategias didácticas de todo el semestre. Esto se logró tomando el libro de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2007) como base de las actividades de clase. Este texto propone un acercamiento al precálculo con el estudio de fenómenos de cambio, se identifica y se analiza cómo se relacionan las cantidades en problemas particulares de cambio y variación.

Se instaló el montaje del péndulo en un cubículo de profesor (Figura 4), de manera que fuera posible colocar un sensor de movimiento al lado del péndulo y que la distancia a la que se encontrara permitiera la toma de datos (las distancias entre el sensor y la bola), sin interferencias. El montaje quedó fijo en el cubículo con la finalidad de que no hubiera variaciones en las condiciones de la toma de datos durante las sesiones. Controlar esta variable de la experiencia fue fundamental para lograr la puesta en escena en los tiempos escolares que tenemos permitidos tanto para la tutoría como para la clase de matemáticas.

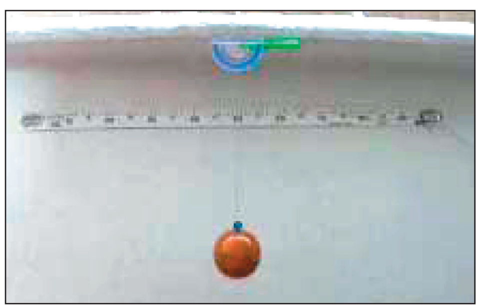


Figura 4. Montaje del péndulo

Se tomó en cuenta la sugerencia de Garrido (2010) de colocar el sensor a una distancia mayor de 50 cm., de la bola en reposo y que el ángulo al que se suelte el péndulo sea de 15°. La distancia a la que se colocó el sensor en nuestro montaje fue de aproximadamente 70 cm., respecto del péndulo en reposo.

3.3. *Recolección y organización de datos*

Se filmaron los momentos de experimentación y resolución de la situación-problema en las sesiones de tutoría y en el momento de apoyo al grupo completo. En total, se obtuvieron 14 horas de videograbación para analizar el papel de la modelación en la actividad de este pequeño grupo.

Se prepararon hojas de trabajo con la situación-problema que incluían la descripción de la experimentación con el péndulo de donde se tomaron los datos, las gráficas obtenidas (aunque hechas con otro programa de cómputo para tener una mejor resolución de la imagen) y espacio suficiente para los procedimientos, los dibujos, las respuestas y los argumentos verbales solicitados para dar respuesta a las preguntas de cada actividad. Debido a la dinámica escolar de trabajo con el grupo de tutoría, se espera que lo plasmado por las estudiantes en las hojas de trabajo sea muy similar porque trabajaron en equipo, sin embargo, se analizan como registros personales porque se asume que al plasmarlo en las hojas personales están de acuerdo en que ésa es la forma correcta de presentar lo trabajado como grupo.

Para transformar los registros en datos, se construyó una tabla que organizaba por actividad de la situación-problema lo siguiente:

- Elemento de la FT;
- Pregunta de la actividad cuya intencionalidad didáctica se asocia con el elemento de la FT;
- Acciones concretas del estudiante para dar respuesta a la pregunta;
- Evidencia en los registros.

3.4. *Análisis de los datos*

El pensamiento funcional trigonométrico es un tipo particular del pensamiento matemático, entendido éste como todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluyendo procesos avanzados del pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, estimación y razonamiento bajo hipótesis (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2005). En consecuencia, y como plantean Montiel y Buendía (2013), es necesario poner atención en las argumentaciones, los procedimientos y las explicaciones que el alumno configura, en forma escrita, icónica, corporal o verbal para responder a una tarea específica y que son vistos como los artefactos clave que señalan Confrey y Maloney (2007). Esto es visto como la actividad de las estudiantes que, en interacción con la situación-problema, su intencionalidad y la organización didáctica (polo de transmisión del saber), y la FT (polo del saber matemático a construir), constituye nuestra unidad de análisis dentro del escenario escolar del IEMS-DF y el contexto de estudio del cambio, y la variación del movimiento del péndulo.

Se distinguen dos momentos en el análisis de la experiencia didáctica. El primero consiste en la resolución de la situación-problema por parte de las tutoradas y, el segundo, de su participación como apoyo en la puesta en escena con el grupo completo. En cada momento, se organizan y analizan las producciones (qué hacen) escritas y verbales en relación con los cuatro elementos de la FT, tomando en consideración su intencionalidad (para qué lo hace) y las herramientas y estrategias que utiliza (cómo lo hace).

4. Matematización del movimiento del péndulo

En un escenario histórico, Montiel (2011) estudia e identifica en un quehacer científico la matematización de la física (específicamente la del movimiento oscilatorio) como la práctica de referencia que, normada por la predicción (práctica social), articula actividades (como la modelación) de las que emerge la función trigonométrica como herramienta matemática. Esta epistemología se basa en identificar históricamente el contexto donde se desarrolló una concepción matematizable del movimiento. De ahí que en la propuesta didáctica de Montiel y Buendía (2013) se proponga dicho contexto a través de la experimentación con el péndulo y el estudio de su movimiento, sus cambios y variaciones.

A la luz de nuestro estudio, asumimos a la matematización como la tarea de comprender e interactuar con la situación-problema. Esto implica partir de la interpretación y el lenguaje de las estudiantes, y hacer emerger, en cada actividad, significados a partir de un desarrollo de usos del conocimiento matemático en juego. En particular, se propone como la situación indeterminada o desconocida la matematización de un tipo particular de movimiento, a propósito de formar parte de un curso donde se estudiaron distintos tipos de movimiento y ello supone aprender un nuevo conocimiento con cada uno. Es importante señalar que, desde el diseño original, el estudio del movimiento del péndulo busca intencionalmente la resignificación de la función trigonométrica al seno de la matemática escolar, es decir, de aquéllo que da uso y sentido a la función. Claramente un estudio que pretenda el entendimiento del fenómeno físico al seno de la física escolar haría emerger herramientas matemáticas más complejas, de ahí la importancia de los enfoques transversales en la educación en el nivel medio superior, donde los tópicos científicos pueden abordarse de forma integral.

Considerando que “las transcripciones no son descripciones neutras, sino que se le integran supuestos teóricos sobre la naturaleza de las interacciones”

(Ochs, 1979, citado en Barwell, 2009) y, como señala Barwell, "sirven para construir los estados mentales, tanto explícitos como implícitos, de los participantes de un estudio" (p. 259), realizaremos en esta sección la descripción de cómo enfrentan las tutoradas la situación indeterminada, vía la resolución de la situación-problema, como el análisis de datos que dé cuenta del desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico y del papel que juega un proceso de modelación. Éste podría servir también para el análisis retrospectivo del diseño y su adaptación para nuevas experiencias y escenarios educativos, pero no es el propósito del presente artículo.

4.1. *Actividad 1*

Dado que es la actividad inicial, se retoma la experiencia de las tutoradas con el péndulo y se establecen algunas condiciones iniciales. Inmediatamente después, se proporcionan los datos con que fue configurada la calculadora para la primera toma de datos (cada segundo, durante 15 segundos), una ilustración del sensor y el péndulo en reposo (Figura 5), y la gráfica 1 que muestra en un plano cartesiano los datos recolectados (Figura 6). A partir de estos dos apoyos visuales, se pregunta a las tutoradas: *¿A qué distancia se encontraba la bola al iniciar la toma de datos? ¿Encuentras en la gráfica todos los datos que describen lo que pasó?*

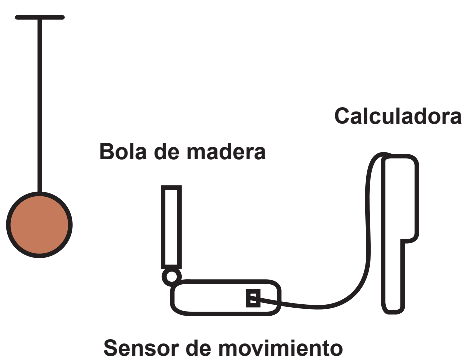


Figura 5. Péndulo en reposo

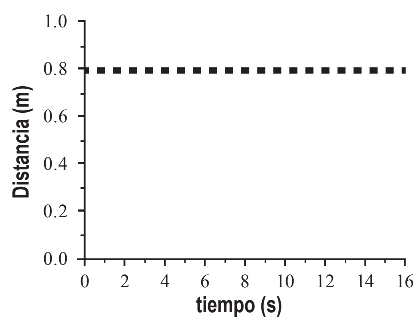


Figura 6. Gráfica 1

Ambas preguntas tienen el objetivo de provocar una vinculación entre las condiciones del montaje del péndulo y la gráfica de datos, principalmente a través de la lectura de coordenadas en esta última. Para fortalecer este objetivo, se plantea la situación hipotética de una nueva configuración en la calculadora para hacer una segunda toma de datos, ahora cada medio segundo durante 15 segundos, y se le pide al estudiante ubicar en la misma gráfica los datos que se obtendrían.

Con excepción de una, en las preguntas de esta actividad no subyace la intencionalidad de desarrollar algún elemento de la FT, sin embargo, son fundamentales para dar respuesta a las siguientes. En esta primera actividad, se hacen las relaciones entre la gráfica y el experimento, se refina la lectura de las gráficas a nivel global y local, y se muestra el efecto, en la definición de la gráfica, de tomar datos en intervalos cada vez más pequeños. Además, el comportamiento constante de la primera gráfica será el punto de partida y contraste para caracterizar la naturaleza del movimiento que van a estudiar.

La intención de la pregunta "*el ir y venir de la bola, ¿cómo se identifica en la gráfica?*", es introducir a las tutoradas en el estudio de los cambios y las variaciones del movimiento del péndulo, y a la identificación de sus particularidades. Cuando la profesora escucha las respuestas del tipo "*va y viene*" o "*se aleja y se acerca*", interviene diciendo *"describan cómo sé cuándo va y cómo sé cuándo viene; cuándo se aleja y cuándo se acerca... Eso, anótenlo, usen colores o lo que necesiten".* Con esta intervención, las tutoradas realizan lecturas locales en la gráfica buscando su relación con el experimento y, aunque discuten en conjunto para entender la intervención de la profesora y dar la respuesta apropiada, cada estudiante plantea en las hojas de trabajo su forma particular de responder.

Las respuestas de las tutoradas reflejan estar leyendo las gráficas como alturas en tiempos específicos (valor en el eje horizontal), explicando el ir del péndulo con un alejamiento respecto del sensor y con la altura que sube, en la gráfica, y el venir con un acercamiento y con la altura que baja en la gráfica. Aunque sólo la respuesta de Emi [1] alude a la forma ondulada de la gráfica, las otras respuestas reproducen gráficamente una parte del comportamiento ondulado (Figuras 7 y 8).

[1] Emi: En la gráfica se ve ondulado, cuando sube se aleja y cuando baja se acerca al sensor.

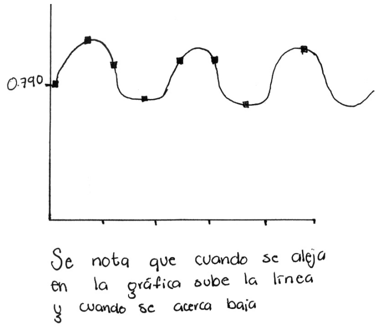


Figura 7. Respuesta de Fer

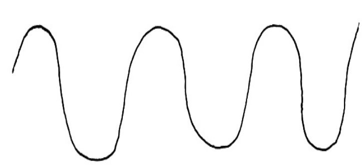


Figura 8. Respuesta de Ana

El contexto, el diseño de las actividades, el tipo de preguntas y, en general, la organización didáctica permitieron a las tutoradas el uso de lenguajes informales, cotidianos y escolares para dar respuesta o explicación a la situación. Particularmente, en la primera actividad, para el estudio del movimiento del péndulo y sus cambios, los artefactos clave consistieron en movimientos corporales descriptivo-explicativos, bosquejos gráficos, lecturas locales de la distancia como altura, lecturas globales del comportamiento ondulado y descripciones del acercamiento-alejamiento de la bola respecto del sensor en la gráfica. Considerando el tipo de experimentación, fue natural que se pusieran en funcionamiento las unidades de medida "segundo" y "metro". A la luz de la FT, esto constituye el "uso situado de la unidad de medida" y se manifiesta en la lectura local sobre la gráfica como *una distancia* entre la pelota y el sensor en *un momento del tiempo* durante el movimiento. El uso de esta unidad de tiempo, obviamente, se mantiene durante toda la experiencia porque no hay cambio de situación física de estudio.

4.2. *Actividad 2*

Se inicia la actividad proporcionando una nueva configuración para dos nuevas tomas de datos (cada 0.05 segundos, durante 16 segundos) y sus respectivas gráficas, una ilustración del sensor y el péndulo en movimiento (Figura 9) y las gráficas 3 y 4 que muestran en planos cartesianos los datos recolectados (Figura 10). A partir de estos datos, se les pregunta con respecto a la gráfica 3: *En los primeros 5 segundos, ¿cuál es la distancia máxima que se alcanza entre el sensor y la bola? ¿Cuál es la distancia mínima?; en los últimos 5 segundos, ¿cuál es la distancia máxima que se alcanza entre el sensor y la bola? ¿Cuál es la distancia mínima?; ¿cómo explicarías la diferencia entre la distancia máxima (o mínima) de los primeros y la de los últimos segundos?*

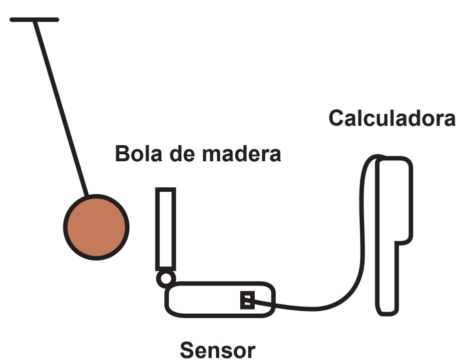


Figura 9. Péndulo en movimiento

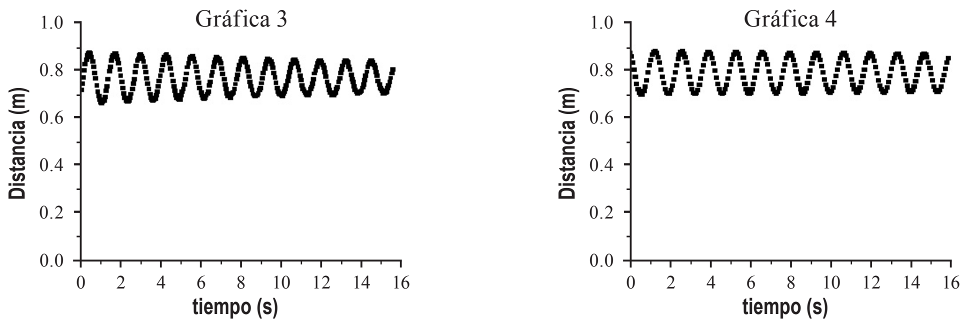


Figura 10. Gráficas 3 y 4

Estas preguntas tienen la intencionalidad de continuar el estudio de los cambios y las variaciones del movimiento del péndulo, ahora poniendo atención en las distancias máxima y mínima que se alcanzan entre el sensor y el péndulo para ir identificando gradualmente lo acotado del movimiento. Lo primero que reconocen las estudiantes es que las condiciones del experimento que dan lugar a la gráficas 3 y a la 4 son diferentes; todas hacen referencia a que en la toma de datos correspondiente a la gráfica 3 se tenía un popote que ocasionaba fricción y que el movimiento tiende a detenerse, como la respuesta de Emi [2].

[2] Emi escribe: En la gráfica 3, la toma de la distancia *cuando se aleja es menor* y posiblemente tenga popote porque se nota cómo *disminuye su movimiento*, aunque se tomaron en el mismo momento y con la misma distancia.

El análisis de los cambios en esta actividad se concreta pidiendo a las tutoradas que marquen con un color sobre la gráfica los puntos donde la distancia crece y, con otro color, los puntos donde disminuye. Con excepción de Sara (Figura 11), las tutoradas marcaron la gráfica indicando las zonas donde "crece" y "decrece" la distancia, términos que ya habían manejado en el curso regular para indicar intervalos en las gráficas.

La actividad se concluye con la pregunta: *En las gráficas 3 y 4, ¿cómo determinas si la bola se aleja o se acerca del sensor?* Esto con la intención de generar el análisis de los datos respecto de las condiciones del experimento, en particular, para relacionar el alejamiento/acercamiento con las zonas identificadas anteriormente.

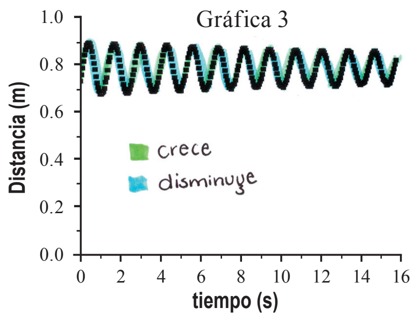


Figura 11. Respuesta de Sara

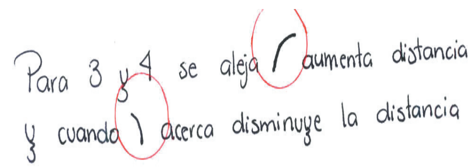


Figura 12. Respuesta de Sara

En sus respuestas, las tutoradas muestran una asociación correcta entre el alejamiento/acercamiento en el experimento y el crecimiento/decrecimiento en la gráfica, aunque de manera implícita, por ejemplo:

[3] Ana escribe: *Cuando crece se aleja, cuando decrece se acerca.*

Sólo Sara alude explícitamente a las gráficas y dibuja, a un lado de su respuesta, una sección de la curva para ejemplificar el momento de alejamiento/acercamiento (Figura 12). Sin embargo, aún en este caso, no se observa que lo identifique como un intervalo de crecimiento/decrecimiento.

En esta actividad se identifican, de nuevo, lecturas locales de la distancia como altura, lecturas globales del comportamiento ondulado y descripciones verbales, ahora en términos de aumento y disminución de la distancia; como los artefactos clave que producen las tutoradas para caracterizar los cambios en el movimiento del péndulo. A ellos, se incorpora la identificación de "zonas" en la gráfica donde hay crecimiento o decrecimiento, que si bien se colorean en trazo continuo no hay evidencia de la consideración del tiempo como intervalo.

Aunque ya se había identificado un significado gráfico al "va y viene" del movimiento, en esta actividad no se hace mención a la "repetición" de zonas de "crecimiento-decrecimiento", o lo que en términos de la FT se caracteriza como identificar "qué se repite" y "cómo se repite" en el comportamiento en estudio.

Finalmente, lo acotado del movimiento se manifiesta con la localización de las distancias máxima y mínima en la gráfica, tomando los datos de sus medidas. De nuevo, se presenta la lectura de la distancia como altura, pero ahora como la altura vertical entre máximo y mínimo, por ejemplo cuando Sara [4] compara lo que sucede entre los primeros y los últimos segundos de la toma.

[4] Sara escribe: En la gráfica 3, *la diferencia entre* las distancias máxima y mínima de los primeros segundos a los últimos segundos es que en los últimos segundos ya es más evidente *la disminución* del movimiento y *el rango* entre la máxima y la mínima *es cada vez más pequeño*.

4.3. *Actividad 3*

Esta actividad inicia proporcionando una nueva configuración para la toma de datos (cada 0.05 segundos durante 15 segundos), sólo que esta vez, a diferencia de las anteriores, la bola cuelga de un cordón cuya longitud del techo al centro de la bola es de 60 cm., (Figura 13). Con esta configuración se obtiene la gráfica 5 (Figura 14), a partir de la cual se plantean las preguntas: *(a) ¿Cómo se reflejan, en el comportamiento de las curvas, las distancias más lejanas del sensor? y (b) ¿cómo se reflejan, en el comportamiento de las curvas, las distancias más cortas del sensor?*

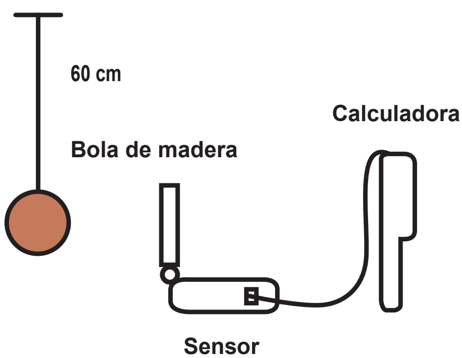


Figura 13. Péndulo en reposo (60 cm)

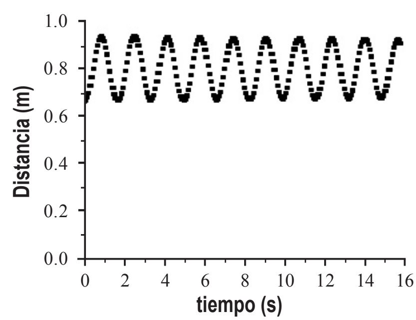


Figura 14. Gráfica 5

En sus respuestas, Emi, Ana y Fer describen *la curva como yendo* hacia arriba cuando la bola se aleja y hacia abajo cuando se acerca. En cambio, Sara utiliza las nociones de *punto máximo* y *concavidad hacia abajo* cuando *se aleja* la bola del sensor y de una curva en donde el punto *más cercano* al sensor forma una *concavidad hacia arriba*.

Posteriormente, se les presentan en un mismo plano, las gráficas correspondientes a las dos tomas de datos, es decir, una con el péndulo colgando del cordón de 40 cm., y la otra con el cordón de 60 cm., (Figura 15) y se les pregunta: *Al aumentar el tamaño del cordón, ¿percibes algún cambio en el valor de los datos o en la gráfica? ¿Cuál? Descríbelo detalladamente.*

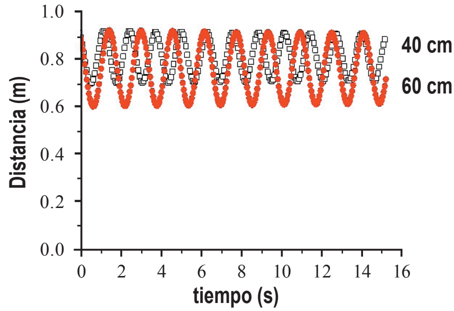


Figura 15. Gráfica 6

Para dar respuesta a esta pregunta, las tutoradas *simulan el péndulo* con lápices o con las manos para explicar, en el primer caso, que no importa la longitud del cordón, porque al posicionarlo a 20° siempre dará la misma distancia (Figura 16a) y, en el segundo caso, para explicar que lo largo afecta a *lo rápido* que se mueve el péndulo y, por lo tanto, a que se aleje más del sensor (Figura 16b).

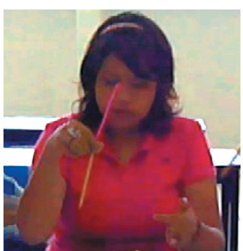


Figura 16a. Sara simulando el péndulo con dos lápices para representar el cordón más largo

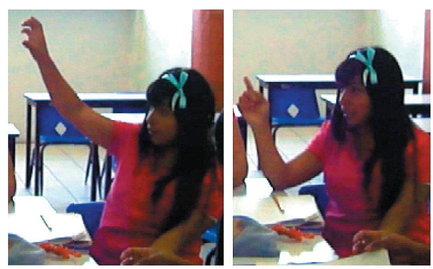


Figura 16b. Fer mostrando cómo al moverse más rápido, la distancia entre la bola y el sensor es mayor, y viceversa

Cuatro de las cinco tutoradas apoyan el último argumento y, finalmente, acuerdan que una es *más grande* que la otra debido a que el cordón es más grande.

[5] Sara escribe: Sí, ya había observado que la distancia con que se acerca y aleja la bola del sensor es mayor con el hilo a 60 y menor con el hilo de 40.

[6] Fer escribe: Que en una gráfica podemos decir que su cordón está a 40 y una 60, la de 40 cm es *la gráfica más corta* por lo mismo que su cordón es más corto.

De sus respuestas escritas, sus argumentaciones y movimientos se entiende que lo grande o lo corto se refiere a la diferencia en amplitud que se muestra entre las gráficas, es decir, que cambios en las condiciones del experimento generan cambios, en lo que ellas describen como *tamaños* de las gráficas.

En esta actividad, los aparatos clave previos se conservan y aparecen algunos como el uso de términos escolares, la simulación-corporización y un síntoma de "lectura continua" de la gráfica, cuando se dice que "va yendo" o cuando se identifica la concavidad. El elemento de la FT que más resalta es el uso de la condición acotada de la gráfica al identificar la longitud entre punto máximo y mínimo para explicar los cambios en las condiciones del experimento.

4.4. *Actividad 4*

Esta actividad inicia con una gráfica (Figura 17) que muestra las distancias entre el sensor y la bola, obtenidas a partir de una nueva configuración (cada 0.025 segundos, durante 5 segundos). Se les pide considerar que la bola se comporta como el péndulo de un reloj, es decir, no se detiene, y usar la gráfica 7 para responder las siguientes preguntas: *¿Cuál sería la distancia a la que se encontraría el péndulo del sensor en el segundo 60? ¿Estará alejándose o acercándose al sensor? ¿Utilizaron alguna parte de la gráfica para poder realizar la predicción? Si la respuesta a la última pregunta es positiva, se les pide señalar qué parte.*

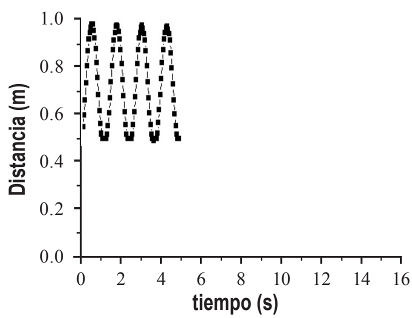


Figura 17. Gráfica 7

Las estudiantes marcan el punto correspondiente al segundo 5 y lo utilizan para realizar la predicción (Figura 18). Surgen diferentes acercamientos, por ejemplo, los de Ana [7] y Sara [8].

[7] Ana escribe: Considerando que se comporta como el péndulo de un reloj, el movimiento *es constante* y en el segundo 60 estaría acercándose y alejándose al mismo tiempo.

[8] Sara escribe: En el segundo 5 se está acercando y al estar a 0.5 cm del sensor en ese instante, entonces en los múltiplos de 5 se está acercando, al ser el 60 múltiplo de 5, se está acercando al sensor a 0.5 cm de éste.

En una discusión de sus respuestas Emi y Sara reflexionan:

[9] Sara dice: Como se está diciendo, es un movimiento *constante*, no se va a detener, yo tomé el segundo 5, porque se está exactamente acercándose, pues eso es cada 5 y como el 60 es múltiplo de 5 entonces está acercándose.

[10] Luz dice: Nosotras pusimos que alejándose, fuimos viendo que sube y baja, sube y baja y como en el 10 sería sube entonces…

[11] Sara interrumpe y dice: Si usaron el 10, ya no utilizaron una *parte de la gráfica*.

Emi y Luz habían trabajado con la gráfica contando cuántas veces sube y cuántas veces baja, pero se pierden en estos cálculos y, después de escuchar los argumentos de Sara, cambian la respuesta y ocupan el segundo 5. Mientras tanto, Ana y Fer continúan con las actividades sin llegar aún a estas preguntas. Por la forma en que Sara analiza la gráfica, se identifica que está viendo sólo el instante, no lo que sucede antes y después y dado que éste coincide con la distancia más cercana al sensor, asume que se está acercando.

Las preguntas de esta actividad buscan intencionalmente hacer emerger aparatos clave que muestren el uso de lo periódico. En particular, surge una articulación de lo acotado y lo periódico cuando Ana [7] y Sara [9] argumentan que el movimiento es "constante", que parece referirse a su regularidad y, por ello, pueden tomar lo que sucede los primeros 5 segundos (como la unidad mínima de análisis y repetición) para saber lo que va a pasar en el segundo 60.

Para concluir la actividad, se les pide encontrar la distancia entre la bola y el sensor en el segundo 28, para la toma de datos registrada en la gráfica 8 (Figura 19), y comparar el método de predicción utilizado para la gráfica 7 con el utilizado para la gráfica 8, indicando en qué difieren.

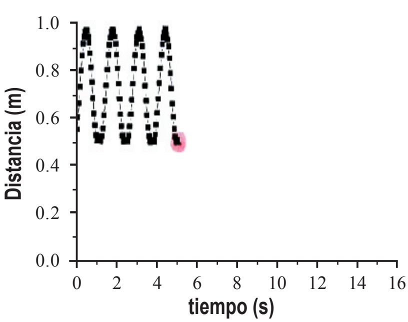


Figura 18. Punto utilizado para la predicción

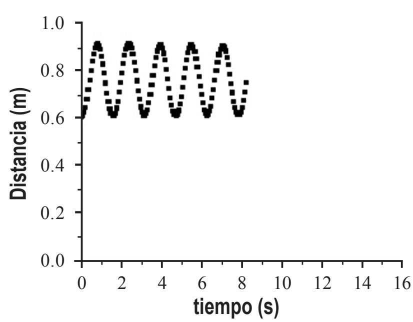


Figura 19. Gráfica 8

Con respecto a la gráfica 8, Sara afirma que el movimiento *ya no es constante* por lo que sólo podrá aproximar la distancia a la que se encontrará la bola. Para lograr esta aproximación, Emi utiliza una regla y la coloca verticalmente sobre la gráfica en el segundo 7 para medir y argumentar que la distancia va disminuyendo. Cuando la profesora les pregunta si la regla ayudaría a encontrar la distancia en el segundo 14, Luz y Emi marcan sobre la gráfica (Figura 20) dos *líneas horizontales* que pasan por los máximos y mínimos locales, y *dos líneas verticales* en los segundos 7 y 14. Refiriéndose a sus trazos, responden que en el segundo 14 se estaría alejando del sensor igual que en el segundo 7 y, en ambos, la bola estaría a aproximadamente a 0.9 m., del sensor. Al respecto, Sara argumenta que esto se debe al *patrón de repetición*.

[12] Sara escribe: 0.9 y se estaría alejando, ya que por la curva y su patrón de repetición, en el segundo 7 se aleja, entonces en su múltiplo 14 también.

[13] Sara dice: En la gráfica 8 *ya no es constante, ahí ya va disminuyendo* y tendríamos que sacar *el patrón de cuánto disminuye.*

Mientras Sara da su explicación, Emi verifica con la regla que realmente está disminuyendo.

[14] Sara dice: ¿Cómo podría saber la posición exacta?

[15] Profesora dice: ¿Cómo le hiciste en el anterior?

[16] Sara dice: Pues en el 7 sí puedo saber, se está alejando, entonces en el 14 también. En la segunda gráfica no es exacto porque *nunca se repiten las mismas distancias*, sólo *se aproxima.*

Las tutoradas identifican la unidad mínima de análisis en cada caso y, de acuerdo con la experiencia física, responden si se aleja o acerca la bola en el tiempo solicitado.

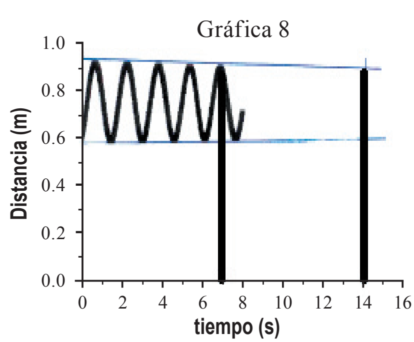


Figura 20. Trazo de líneas guía

En las últimas respuestas, se pueden identificar nuevos artefactos clave como el "patrón de repetición" y las líneas guía que lo comprueban. Con ellos, las tutoradas reconocen que hay un cierto comportamiento "repetitivo", pero distinguen "cómo se está repitiendo" (la disminución de las distancias entre máximo y mínimo).

Al localizar el segundo 7 como referencia (por ser divisor del segundo 28), las tutoradas determinan la "unidad gráfica" que se va a repetir y con base en la cual responder, evidenciando que el periodo mínimo, como tradicionalmente se identifica en la escuela para las funciones periódicas, no es el inmediatamente elegido para predecir un estado futuro. Su definición y uso dependerá de su funcionalidad.

4.5. *Actividad 5*

Debido a que los estudiantes, incluyendo a las tutoradas, ya habían cursado la asignatura de Física y abordado la velocidad en los temas previos a la experiencia didáctica, la introducción de las definiciones de velocidad promedio e instantánea, y de aceleración no supone un "tema nuevo" para ellas. En la hoja de trabajo, se les proporciona la fórmula para calcular las velocidades instantáneas en los tiempos dados en una tabla a completar, la cual incluye los datos (tiempo-distancia) obtenidos con el sensor durante 3 segundos, con un total de 60 tomas. Debido a que las tutoradas sólo tienen una calculadora, comienzan a dictar los datos a una de ellas y todas toman nota.

Los cálculos se dan en forma continua hasta obtener una velocidad instantánea "cero". La profesora les cuestiona sobre lo que eso significa y todas responden que es el momento en que *se detuvo la bola*. Continúan con los cálculos hasta obtener un dato que les parece extraño, pues observan que los valores están disminuyendo y, de repente, obtienen un dato que aumenta. Lo realizan varias veces y no se convencen; debido a que reconocen el comportamiento de los datos, revisan los cálculos anteriores y encuentran un error en los cálculos. Prosiguen hasta confirmar que continua disminuyendo y terminan los cálculos convencidas de los datos que obtuvieron.

Tal como pide la actividad, las tutoradas ubican los puntos calculados (tiempo-velocidad instantánea) en la gráfica 9 y usan el marcatextos para señalar dónde las velocidades son positivas y dónde son negativas. Identifican que las zonas gráficas, marcadas anteriormente (crecimiento y decrecimiento de las distancias), coinciden con las marcadas ahora para velocidades positivas y negativas (Figura 21) y responden así a las preguntas planteadas:

En la secuencia: En términos de la gráfica de distancias y lo que representa en el experimento ¿cómo interpretarías las velocidades negativas?

[17] Sara escribe: Cuando se va *acercando* al sensor su velocidad es *negativa.*

[18] Luz escribe: Cuando se acerca es negativa y *positiva* cuando se *aleja*.

En la secuencia: ¿Visualizas alguna relación global o puntual, entre las gráficas de la velocidad y de la distancia? ¿Cuál o cuáles?

[19] Sara escribe: En *las dos* hay movimiento que *aumenta y disminuye.*

[20] Luz escribe: Sí, porque *en las dos salen ondas.*

En la secuencia: ¿Qué valores toma la velocidad en las “crestas” y los “valles” de la gráfica de distancias? En términos del experimento, ¿qué significarían estos puntos?

[21] Sara escribe: En estos puntos la velocidad es igual a 0.

[22] Luz escribe: Son iguales, están en cero.

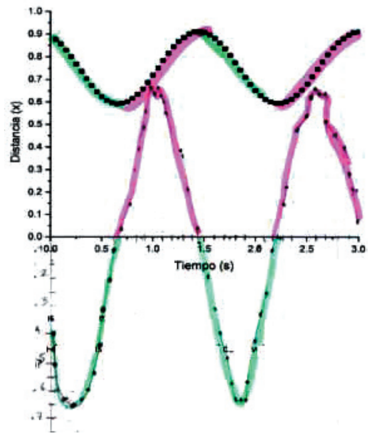


Figura 21. Gráfica 9 con las velocidades instantáneas

En esta actividad, sobresale la intencionalidad de ahondar en el estudio del cambio y las variaciones del movimiento registrado. Graficar las velocidades en el mismo plano que la gráfica de las distancias y el uso de color constituyen un aparato clave para la emergencia del elemento de la FT referido a la naturaleza del comportamiento y sus variaciones. Naturalmente, este elemento está contextualizado en la “forma gráfica”, por ello, la respuesta de Sara alude a dos movimientos, aunque uno no lo es; la respuesta de Luz alude a “ondas”.

De nuevo, no hay alusión explícita a intervalos de tiempo, pero se reconoce un uso de ellos cuando identifican las zonas gráficas que relacionan “velocidad positiva con alejamiento” o “velocidad negativa con acercamiento”. La pregunta final de esta actividad pide el bosquejo de la gráfica de la velocidad dada una gráfica de distancias, de una toma de datos por 15 segundos. En las respuestas se observa que no hay un trazo ondulado, pero se identifica la relación entre máximos-mínimos de la gráfica de las distancias con los “ceros” de la gráfica de velocidad y los máximos-mínimos de la gráfica de la velocidad con el punto de inflexión de la gráfica de distancias.

4.6. *Actividad 6*

Ésta es la actividad final y en ella se presenta la definición de "aceleración media en intervalos de tiempo" para posteriormente presentar a las estudiantes cuatro gráficos donde se presentan simultáneamente las curvas que describen la distancia, la velocidad y la aceleración del movimiento registrado del péndulo. En cada caso, se les solicita identificar qué curva corresponde a la gráfica de la distancia y cuál a la gráfica de la aceleración.

En la sesión programada para la actividad, sólo asistieron tres de las cinco tutoradas, quienes la resolvieron guiadas sólo por las formas de las gráficas, sin hacer un análisis detallado de ellas. Sólo discutieron las tablas que llenaron con los valores máximos y mínimos de la distancia, la velocidad y la aceleración. En esta primera resolución, Sara, Emi y Luz eligen como gráfica de la distancia una con valores positivos y negativos, por lo que se planea, para la siguiente sesión, iniciar con el esquema del sensor y el péndulo para elegir la gráfica con base en el análisis de la situación.

Poniendo atención en las distancias entre el sensor y el péndulo cuando éste se alejó más y cuando se acercó más, se les pide relacionar éstas con la gráfica elegida. Después de analizar la situación, reconocen que no existen distancias negativas y, por lo tanto, la gráfica elegida no puede ser la que registra las distancias. Se les proporcionaron nuevas hojas para contestar y rápidamente ubican la gráfica correspondiente a la distancia y, a partir de ahí, asignan las otras a la velocidad y a la aceleración.

Sara dice que *no logra ver la diferencia* entre la aceleración y la velocidad. En reacción al comentario de Sara, la profesora plantea la pregunta: *¿Las dos son iguales?*, a lo que todas responden que la gráfica de la velocidad es *más chica*. En seguida, la profesora pregunta sobre los signos: *Si la bola se aleja, ¿la velocidad y la aceleración son positivas?*

Es a partir de retomar la situación experimental que se analizan cuidadosamente las gráficas para elegir la que corresponde a cada una. Sara, Emi y Luz terminan la actividad y, al siguiente día, ayudan a Ana y a Fer a realizarla. En el llenado de tablas, hay ciertas variaciones porque son lecturas aproximadas a la gráfica, pero todas eligen apropiadamente las gráficas (Figuras 22 y 23).

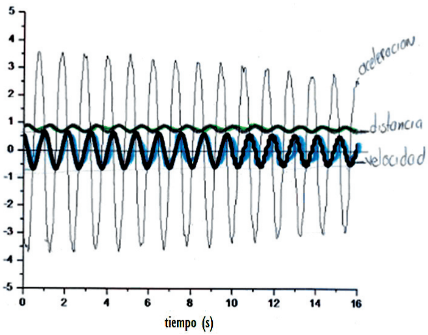


Figura 22. Respuesta de Ana

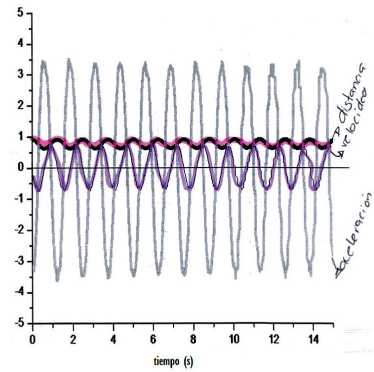


Figura 23. Respuesta de Luz

De nuevo, el elemento de la FT se manifiesta contextualizado a la forma gráfica. Aunque no hubo explicación o argumento explícito a la forma de las tres gráficas, cuando Sara dice no reconocer “la diferencia” parece referirse a que ambas, gráficas de velocidad y de aceleración, son igualmente onduladas. Es su análisis respecto a las distancias, retomando la experimentación, identificaron cuál es cuál.

A lo largo de toda la experiencia, se mantuvo la lectura de las distancias como alturas, se identificaron las variables tiempo-distancia/velocidad/aceleración como las unidades de medida, según la actividad; se reconoce un uso implícito de los periodos de tiempo; la lectura de las gráficas se hace en lo global por su forma y comportamiento, y en lo local porque ello permite cuantificar las variables. Son las preguntas en cada actividad lo que permite que lo anterior se ponga en funcionamiento para identificar y usar el comportamiento periódico de la gráfica, distinguiendo no sólo la repetición, sino cómo es ésta; así como la naturaleza de este comportamiento en relación a sus variaciones.

5. Discusión y resultados

En nuestro escenario, las tutoradas están condicionadas a las normas escolares en general y de la clase de matemáticas en particular, por lo que modelar no es una actividad de su elección. A través de las actividades matemáticas diversas, intencionalmente propuestas para construir la FT, se busca que las estudiantes enfrenten, problematicen, comprendan y transformen la situación propuesta de "matematizar el movimiento del péndulo". Así, para describir el proceso de modelación que viven las estudiantes, se describe y analiza, en la sección anterior, las formas en las que abordan cada actividad para dar respuesta a las preguntas.

Se agruparon las acciones de las tutoradas en acciones de socialización y actividades matemáticas, entendiendo éstas últimas como acciones intencionalmente provocadas por el diseño de la situación-problema. Las acciones de socialización se refieren a la interacción social de las tutoradas para la resolución de la situación-problema, considerando que, aun cuando entregaron sus hojas de trabajo en forma individual, interactúan como colectivo para entender los planteamientos de la situación-problema, las instrucciones y las preguntas de cada actividad, y para acordar ciertas respuestas del tipo "dar valores aproximados" o "dar argumentos y explicaciones amplias".

Las actividades matemáticas como medir, calcular o aproximar, son solicitadas explícitamente por la situación-problema; sin embargo, identificamos otras de las que dependen las tutoradas para lograr la matematización. A éstas últimas las llamamos genéricamente como:

- *Experimentación*. La sesión de manejo de la calculadora de capacidad gráfica, el sensor de movimiento y el programa para crear los videos del péndulo no fue sólo de instrucción para el uso de la tecnología. Si bien se aprendió a utilizarlas, se hizo en el contexto de realizar mediciones, variar las condiciones del experimento, controlar variables como la distancia a la que es necesario colocar el sensor para no tener interferencias en la toma de datos, determinar el ángulo al que se suelta el péndulo para obtener las gráficas apropiadas a la secuencia, tomar datos y producir gráficas. Es decir, se hace un acercamiento a la situación indeterminada a través de las herramientas que van a permitir estudiarla.
- *Recreación del experimento*. Para dar respuesta a las preguntas en cada actividad, las tutoradas no sólo recordaban la experiencia del péndulo, sino que recreaban el movimiento con sus brazos o usando lápices, la regla o cualquier objeto que tuvieran a la mano al responder.
- *Lectura de gráficas*. Después de recrear el experimento, las tutoradas relacionaban el elemento de análisis (por ejemplo, la posición inicial de la bola o la distancia máxima o mínima que alcanzaba respecto del sensor) con su representación y localización en la gráfica. Según la pregunta, la lectura que realizan es local (un punto) o global (comportamiento).

En la argumentación o explicación a una respuesta, la recreación del experimento se considera una muestra de la significación de las gráficas, producto de la corporización que se lleva a cabo en la experimentación. En una concepción básica, esta corporización se entiende como la realización a través del experimento mental basado en la percepción y la reflexión sobre las propiedades de los objetos (Tall, 2006), y ahí ubicamos la base del desarrollo del conocimiento, en la acción del sujeto sobre el objeto, de donde se derivan los significados construidos.

Los datos en cada actividad evidencian el desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico en las tutoradas, no sólo al nivel de haberse manifestado cada uno de sus elementos, sino de haberse utilizado como argumentos para explicar la respuesta a cada una de las preguntas.

Para validar que las tutoradas lograron la modelación, fue necesario analizar su apropiación de la situación, momento que se provocó al llevarlas como equipo de apoyo para trabajar la situación-problema con el grupo completo. En esta etapa, cada tutorada orienta a pequeños grupos de estudiantes en la toma de datos, explicándoles cómo se colocan el péndulo y los sensores, cómo se maneja la calculadora para tomar y guardar los datos, y cómo se maneja la cámara para la captura en video del movimiento del péndulo. Las tutoradas muestran control sobre el manejo de las herramientas e identifican rápidamente si las tomas hechas por los estudiantes sirven o no para la secuencia de actividades que posteriormente realizarán. Por ejemplo, determinan si debe repetirse la toma de datos o explican cómo deben lanzar la bola para que se mueva en una trayectoria lo más alineada posible y que no salga de la visión del sensor.

Para apoyar a los estudiantes en la resolución de las actividades en las hojas de trabajo, las tutoradas retoman la experimentación con el péndulo y su relación con la gráfica, y reproducen la dinámica de la profesora de no darles las respuestas, sino hacer preguntas para que ellos mismos obtengan los resultados. Es decir, orientan al grupo de estudiantes a realizar la recreación del experimento y la lectura de gráficas para conseguir la apropiación de la situación que ellas mismas lograron.

Al igual que las tutoradas, los estudiantes del grupo recrean el experimento y realizan la lectura de las gráficas utilizando los recursos que tienen a la mano o sus manos y brazos, con el objetivo de relacionar el elemento de análisis del experimento con su representación en la gráfica. Aunque su análisis no fue objeto de estudio en la presente investigación, los registros en video y en las hojas de trabajo dan evidencia de la emergencia de los artefactos clave en los estudiantes del grupo completo, al manifestarse los elementos de la FT en los argumentos que construyen para explicar la respuesta a cada una de las preguntas. Por ejemplo, a la pregunta 6 “El ir y venir de la bola, ¿cómo se identifica en la gráfica?” y con la recomendación de la tutoradas por “describir y anotar cómo se sabe cuándo va y cuándo viene”, un estudiante responde reelaborando la gráfica y anotando sobre ella un punto de alejamiento y otro de acercamiento, y explicando verbalmente cuándo la bola está “más lejos” o “más cerca” del sensor (Figura 24).

6. El ir y venir de la bola, ¿cómo se identifica en la gráfica?

Figura 24. Respuesta a la pregunta 6 de la actividad 1

Se identifica también que los estudiantes están leyendo las gráficas como alturas en tiempos específicos, por ejemplo, haciendo uso de líneas verticales (para ubicar el tiempo) y líneas horizontales (para ubicar la distancia) sobre la gráfica (Figura 25).

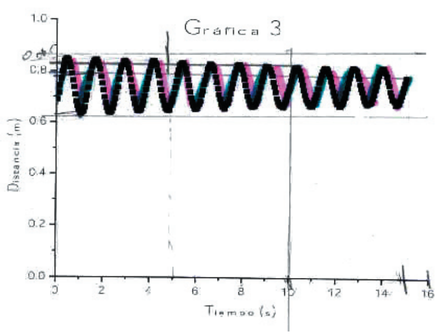


Figura 25. Manipulación de la gráfica para resolver la actividad 2

Analizar la actividad y la producción matemática del estudiante, reconociendo los procesos de construcción que le son propios, para reconocer su desarrollo del pensamiento matemático nos obliga a entender sus formas de explicar y argumentar. Es decir, ante un diseño didáctico no tradicional (al menos en el IEMS-DF) no podemos, ni debemos, esperar que el estudiante responda con conceptos matemáticos formales. Por ejemplo, la epistemología de prácticas de Montiel (2011) propone el manejo de una escala de tiempo infinitesimal (para lo local) – infinita (para lo global) en el estudio del movimiento oscilatorio, lo que se manifiesta explícita e intencionalmente en el diseño cuando se reducen los intervalos de tiempo en la toma de distancias entre la bola y el sensor, hasta donde lo permite la herramienta tecnológica. En la actividad y las producciones del estudiante, no se espera que éste hable de "intervalos", ni de "infinitamente pequeños"; pero se le otorga ese significado a su expresión "… lo más curvita es por cada cuánto tomas los datos".

Éstas son el tipo de evidencias recolectadas, organizadas y analizadas en la experiencia. Un momento de institucionalización escolar nos permitiría el paso de la construcción del estudiante al establecimiento del saber escolar que, para efectos de la investigación, no fue necesario por el objeto de estudio que se planteó de inicio. Aunado a ello, presupone establecer también procesos de institucionalización para el conocimiento físico en juego y ello puede resultar más complejo que abordar solamente la función trigonométrica. Sin embargo, una estrategia que hemos encontrado pertinente para transitar hacia una institucionalización, sólo de la matemática escolar en juego, es continuar con tareas como las que proponen Moore (2014) y Ozgün-Koca, Edwards y Meagher (2013). Éstas demandan del estudiante sólo mediciones y construcciones geométricas básicas, además, su fundamentación en el pensamiento cuantitativo y covariacional resulta significativa también para un futuro rediseño de la situación-problema, principalmente para ampliar el estudio de los cambios y las variaciones del movimiento del péndulo.

6. Conclusiones

Considerando que las tutoradas no hicieron alusión a la función trigonométrica, al movimiento oscilatorio o periódico, o a algún referente de la física para abordar la situación-problema, asumimos que representaba una situación indeterminada para ellas y, con base en ello, continuamos la puesta en escena según lo planeado en la adaptación del diseño.

El diseño no pretende el aprendizaje del movimiento oscilatorio como tal, ni de la función trigonométrica, sino la construcción de aquello que le da uso y sentido a ésta. Para ello, iniciamos estudiando el movimiento del péndulo. Son necesarias otras actividades, pero sobre todo un acercamiento distinto a su estudio para hablar, en sentido estricto, del movimiento oscilatorio y del estudio de sus variaciones sucesivas. Es posible que la experiencia aquí reportada sea sólo una fase de experimentación y acercamiento al fenómeno si nuestro enfoque hubiese sido desde la didáctica de las ciencias o de la física en particular. Sin embargo, a la luz de nuestro estudio, la implementación del diseño cumplió su objetivo como un ejercicio de matematización para rediseñar el discurso trigonométrico escolar y consideramos que el aprendizaje científico que podríamos identificar es solamente aquél relacionado con la observación, la medición, la recolección de datos, la identificación y el control de variables, la experimentación y el uso de varias representaciones matemáticas, actividades que Matthews, Gauld y Stinner (2005) consideran esenciales de la investigación científica.

Las estudiantes tutoradas logran modelar la situación planteada y, para ello, integran al conjunto de actividades que pide el diseño, la recreación del experimento y la lectura de gráficas. Los modelos construidos son principalmente las gráficas que, si bien realiza la calculadora, son manipuladas para identificar momentos concretos del experimento (lectura puntual) o analizar comportamientos (lectura global), con el propósito de argumentar sus respuestas. Con base en las evidencias y su análisis a la luz de nuestros referentes teóricos, identificamos a la modelación como una práctica de referencia pertinente en el contexto escolar del IEMS-DF.

Experiencias de innovación como ésta pueden ser la vía para rediseñar el discurso matemático escolar, desde el salón de clases, y para ir cambiando la actividad matemática de los estudiantes a una más participativa, es decir, pasar del "aprender matemáticas" al "hacer matemáticas". En la medida en que pueda generarse este cambio, podríamos hablar de la modelación como la práctica social que norme la actividad matemática del estudiante. Ésa es nuestra expectativa.

Referencias bibliográficas

Anderson, T. & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher, 41*(1), 16-25. doi: 10.3102/0013189X11428813

Barwell, R. (2009). Researchers' descriptions and the construction of mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 255-269. doi: 10.1007/s10649-009-9202-4

Buendía, G. & Montiel, G. (2011). From History to Research in Mathematics Education: socio-epistemological elements for trigonometric function. In V. Katz, & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (67-82). Washington DC, USA: Mathematical Association of America.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 255-270. doi: 10.1023/A:1026008829822

Cantoral, R. et Farfán, R. M. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2/3), 137–168.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R.A. y Garza. A. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. D.F., México: Trillas.

Confrey, J. & Maloney, A. (2007). A theory of Mathematical modeling in technological settings. In M. Artigue & B. R. Hodgson (Eds.), *Modelling and applications in Mathematics Education* (Vol. 10, pp. 57-67). St. Louis, U.S.: Springer.

Espinoza-Ramírez, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el Siglo XIX. Un estudio socioepistemológico* (Tesis de Maestría no publicada). Distrito Federal, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Garrido, V. (2010). Determinación de la aceleración de gravedad utilizando un sistema péndulo simple-CBR. Texas Instruments, Education Technology: Actividades para el aula. Obtenido de https://education.ti.com/~/media/DD2D873CF5074ADF956782EA57957D04

Grabovskij, M. & Kotel'Nikov, P. (1971). The use of kinematic models in the study of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics, 3*(2), 147-160. doi: 10.1007/BF00305443

Matthews, M., Gauld, C., & Stinner, A. (2005). The pendulum: Its place in science, culture and pedagogy. In M. Matthews, C. Gauld & A. Stinner, (Eds.), *The pendulum. Scientific, historical, philosophical and educational perspectives* (pp. 1-17). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 69-84.

Montiel, G. (2011). Construcción del Conocimiento Trigonométrico. Un Estudio socioepistemológico. D.F., México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica: Ejemplos e Ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). D.F., México: Lectorum.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Eds), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169-205. D.F., México: Ediciones Díaz de Santos.

Moore, K. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 102-138. doi: 10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Ochs, E. (1979). Transcription as theory. In E. Ochs & B. B. Schiffelin (Eds.), *Developmental pragmatics* (pp. 43–72). New York, USA: New York Academic Press.

Ozgün-Koca, S., Edwards, M., & Meagher, M. (2013). Spaghetti sine curves: Virtual Environments for Reasoning and Sense Making. *Mathematics Teacher, 107*(3), 180-187. doi: 10.5951/mathteacher.107.3.0180

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 360-382. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a14

Salinas, P., Alanís, J.A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J.C., y Garza, J.L. (2007). *Matemáticas Preuniversitarias: Significado de nociones y procedimientos*. D.F., México: Trillas.

Suárez, L. (2008). *Modelación-graficación una categoría para la matemática escolar: Resultados de un estudio socioepistemológico* (Tesis de doctorado no publicada). Distrito Federal, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación de las Ciencias, 3*(1), 51-58.

Tall, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 195-215.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 7*(3), 91-112. doi: 10.1007/BF03217423

Autoras

María del Pilar Beltrán Soria. Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal Plantel Iztapalapa 1, México. pilysoria@gmail.com

Gisela Montiel Espinosa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. gmontiele@cinvestav.mx

Cristina Steegman, Alejandra Pérez-Bonilla,
Montserrat Prat, Angel A. Juan

MATH-ELEARNING@CAT: FACTORES CLAVES DEL USO DE LAS TIC EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA SECUNDARIA

Math-Elearning@cat: Key Factors in the use of Information Technologies in Secondary Mathematical Education

RESUMEN

Este artículo presenta los principales resultados obtenidos en el desarrollo del proyecto de investigación *Math-Elearning@cat*, contextualizado en educación secundaria. En concreto se identifican aquellos factores que, en opinión de los docentes, resultan más relevantes a la hora de incorporar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en las asignaturas de carácter matemático. Se trata de un estudio híbrido, basado en una encuesta realizada a profesores de matemáticas de educación secundaria en Cataluña (España). Para analizar los datos, se emplean técnicas de análisis factorial. El análisis muestra la existencia de cuatro factores que intervienen de manera relevante en el uso de las TIC en las aulas de matemáticas. Otro resultado del estudio es la constatación de que los profesores tienen, por lo general, una predisposición positiva al uso de las TIC en su actividad docente, aunque dicha predisposición no parece corresponderse con su uso real.

PALABRAS CLAVE:

- *Aprendizaje en línea*
- *Educación matemática*
- *Educación secundaria*
- *Tecnologías de la información y la comunicación (TIC)*
- *Análisis factorial*

ABSTRACT

This article presents the main results obtained during the development of the research project *Math-Elearning@cat*, contextualized in secondary education. The main purpose of this research is to identify those factors which in the opinion of teachers are more relevant when it comes to mainstream Information Technologies and Communication Technologies (ICT) in mathematical subjects. This is a hybrid study, and it is based on a survey of mathematics teachers in secondary education in Catalonia (Spain).To analyze the data obtained, we used factor analysis techniques. The analysis shows that there are four factors involved in a relevant way of ICT use

KEY WORDS:

- *E-learning*
- *Mathematics education*
- *Secondary education*
- *Information technology and communication technology (ICT)*
- *Factor analysis*

Recepción: Diciembre 30, 2013 / Aceptación: Agosto 10, 2014. DOI: 10.12802/relime.13.1932

in mathematics classrooms. Another result of the study is the finding that teachers have, in general, a positive predisposition to the use of ICT in their teaching, although this theoretical predisposition does not seem to correspond to actual use.

RESUMO

Este artigo apresenta os principais resultados obtidos no desenvolvimento do projeto de investigação *Math-Elearning@cat*, contextualizado em educação secundária. Em concreto, foram identificados fatores que, na opinião dos docentes, foram os mais relevantes na hora de incorporar as Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) nas matérias de caráter matemático. Trata-se de um estudo híbrido, baseado em um questionário realizado a professores de matemática de educação secundária, na Catalunha (Espanha). Para analisar os dados, foram usadas técnicas de análise fatorial. A análise mostra a existência de quatro fatores que intervêm de maneira relevante no uso das TIC nas aulas de matemática. Outro resultado do estudo é a constatação de que os professores têm, de maneira geral, uma predisposição positiva para o uso das TIC na sua atividade docente, ainda que essa predisposição não parecesse corresponder-se com seu uso real.

PALAVRAS CHAVE:

- *Aprendizagem on line*
- *Educação matemática*
- *Educação secundária*
- *Tecnologias da informação e a comunicação (TIC)*
- *Análise fatorial*

RÉSUMÉ

Cet article présente les principaux résultats obtenus lors de l'élaboration du projet de recherche *Math-Elearning@cat*, contextualisée dans l'enseignement secondaire. Spécifiquement identifier les facteurs qui, dans l'opinion des enseignants, sont plus pertinentes quand il s'agit de technologies de l'information et de la communication (TIC) dans les sujets mathématiques. Il s'agit d'une étude hybride, et basé sur une enquête auprès des enseignants de mathématiques dans l'enseignement secondaire en Catalogne (Espagne). Pour analyser les données obtenues, nous avons utilisé des techniques d'analyse des facteurs. L'analyse montre qu'il existe quatre facteurs qui interviennent d'une façon pertinente. Un autre résultat de l'étude est le constat que les enseignants ont, en général, une prédisposition favorable à l'utilisation des TIC dans leur enseignement, même si cette prédisposition théorique ne semble pas correspondre à l'utilisation réelle.

MOTS CLÉS:

- *E-learning*
- *L'enseignement des mathématiques*
- *L'enseignement secondaire*
- *Technologies de l'information et de la communication (TIC)*
- *L'analyse factorielle*

1. Introducción

El auge de las TIC en general, y de Internet en particular, han permitido la aparición de numerosos espacios virtuales de aprendizaje de las matemáticas que, en muchos casos, refuerzan o complementan los métodos de enseñanza tradicionales (Juan, Steegman, Huertas, Martínez, & Simosa, 2011). A la aparición de estos espacios virtuales hay que añadir un uso, cada vez más intensivo e integrado en el currículum de las asignaturas, de programas computacionales estadístico-matemáticos que: (a) fomenta los aspectos creativos del estudiante, posibilitando que éste sea capaz de experimentar y trabajar con conceptos y técnicas avanzadas; y (b) resalta la vertiente aplicada de las matemáticas al modelaje y resolución de problemas propios de otros ámbitos de conocimiento (Juan, Huertas, Steegmann, Corcoles, & Serrat, 2008).

En el ámbito de la educación secundaria es manifiestamente creciente el interés que muestran los departamentos de muchos centros por incorporar las TIC en la enseñanza de las matemáticas (González, Cobo, Martí y Muñoz, 2006; Gras y Cano, 2005). En este artículo presentamos los principales resultados del proyecto *Math-Elearning@cat*, una investigación descriptiva que pretende aportar información sobre cómo se está produciendo la integración de las TIC en la enseñanza secundaria de las matemáticas. En particular, uno de los objetivos básicos del proyecto es el de identificar, a partir de una encuesta a profesores del área, los factores más relevantes en el momento de integrar las TIC en las asignaturas matemáticas. Debido a la gran cantidad de variables que componen la encuesta, resulta conveniente tratar los datos obtenidos mediante técnicas de análisis factorial (Santos, Muñoz, Juez y Guzmán, 1999). Estas técnicas permiten reconocer estructuras latentes cuando hay una cantidad grande de variables. El análisis factorial parte de la idea que cuando entre varios fenómenos hay interrelaciones, éstos pueden deberse a que lo que se mide son aspectos o manifestaciones de un mismo fenómeno subyacente, no observable directamente. Estos fenómenos ocultos son los denominados factores o componentes. Un segundo objetivo básico del proyecto es identificar si hay una correspondencia entre la percepción que tienen los profesores sobre la utilidad docente de las TIC y su uso real en las aulas de matemáticas.

Este artículo se estructura de la siguiente manera: en la sección 2 se introduce brevemente el proyecto *Math-Elearning@cat*; la sección 3 presenta la literatura más directamente relacionada con nuestra investigación; en la sección 4 se describe la metodología empleada en este estudio; la sección 5 ofrece una visión general del análisis factorial realizado a partir de datos provenientes de la encuesta; la sección 6 se dedica a analizar y discutir los resultados del estudio; finalmente, la sección 7 actúa a modo de conclusiones.

2. El proyecto *Math-Elearning@cat*

El proyecto *Math-Elearning@cat*, acrónimo de «*E-Learning* de las matemáticas en los centros de educación secundaria de Cataluña: Estado actual, tendencias tecnológicas emergentes, y adaptación a las TIC», se desarrolló durante los años 2009 y 2010. En este proyecto se propuso analizar el uso e integración de los entornos de aprendizaje en línea y de los programas computacionales especializados en la enseñanza de las matemáticas a nivel de educación secundaria. Con ello se pretendía ofrecer a la comunidad educativa información útil sobre el estado actual de la incorporación de las TIC en el ámbito de las matemáticas. El estudio se fundamentó en una encuesta que recogía las opiniones de los profesores del área. Los resultados de esta encuesta se analizaron mediante técnicas de análisis factorial, lo que permitió identificar los factores relevantes relacionados con el uso de las TIC en las aulas como herramienta docente.

Los resultados del proyecto *Math-Elearning@cat*, que presentamos en este artículo, muestran las opiniones y el papel decisivo que tiene el profesor cuando se trata de usar o no las TIC para enseñar matemáticas. Esto es así ya que el presente estudio identifica qué factores son claves para los profesores en el momento de plantearse el uso de tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

3. Revisión de la literatura

En este apartado se destacan algunos trabajos vinculados con la integración y uso de las TIC en educación matemática. La presente revisión bibliográfica incluye estudios que muestran experiencias concretas de uso del aprendizaje en línea en general y de las TIC en particular.

El interés por el uso de la tecnología en las aulas de secundaria no es un tema reciente en la bibliografía sobre educación matemática. De hecho, ya en trabajos de los años 80 y 90 aparece un interés por la integración de los ordenadores y los lenguajes de programación en las aulas de matemáticas. Entre otros, es posible citar el trabajo de Howe, Ross, Johnson, Plane y Inglis (1982), los cuales investigan sobre el uso del ordenador como "laboratorio" matemático. De forma similar, Hoyles, Sutherland y Evans (1986) persiguen describir bajo qué condiciones el lenguaje de programación *Logo* podía usarse para ayudar a los alumnos a aprender y a pensar matemáticamente. Finalmente, Bishop, Beilby y Bowman (1992) relacionan un amplio listado de materiales disponibles para trabajar las matemáticas usando los ordenadores, junto con una breve reflexión acerca de cómo afecta el uso de estos materiales a la calidad de la enseñanza matemática.

Sobre el uso de los ambientes de aprendizaje en línea en la enseñanza secundaria destacamos el trabajo de Cobo y Fortuny (2005), así como el de Cobo, Fortuny, Puertas y Richard (2007). En estos trabajos se presenta un sistema tutorial llamado *AgentGeom*. Además, se expone un caso concreto para ejemplificar cómo los alumnos pueden adquirir habilidades estratégicas y argumentativas en la resolución de problemas. Por su parte, Nikolova, Georgiev y Gachev (2008) presentan el desarrollo e implementación de una plataforma de aprendizaje en línea en secundaria, centrándose en el aspecto didáctico y pedagógico del sistema. Aguaded y Fandos (2009) ofrecen en su artículo los resultados de una investigación que tiene como finalidad describir y explorar el uso de la plataforma *Educans*, una herramienta telemática destinada a los alumnos de educación secundaria. En otro estudio, Journell (2010) utiliza una serie de entrevistas a expertos y alumnos de secundaria que utilizaron procesos de aprendizaje en línea. En todas las experiencias se concluye que una de las grandes características del aprendizaje en línea es que favorece la transmisión de información gracias a la superación de muchas barreras temporales y geográficas. Finalmente, Granic, Misfud y Cukusic (2009) discuten como el marco pedagógico influye de forma esencial en la implantación de entornos de aprendizaje en línea en secundaria.

Por lo que se refiere a estudios que analizan el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de tecnología, cabe destacar el artículo de Sharim y Khlaif (2010), el cual explora el potencial de los métodos basados en el aprendizaje en línea con el fin de proporcionar un aprendizaje continuo para los estudiantes de secundaria. También en este apartado cabría citar el trabajo de Barkatsas, Kasimatis, y Gialamas (2009), en el cual se recurre a las técnicas de análisis factorial para investigar, desde el punto de vista del alumno de secundaria, cómo el uso de las tecnologías influye en el aprendizaje de las matemáticas.

Entre la extensa bibliografía relacionada con el uso de las TIC en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, cabe destacar el libro de Oldknow, Taylor y Tetlow (2010), que ofrece recomendaciones prácticas a la hora de usar las TIC para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Otro libro a destacar es Juan, Huertas, Treholm y Steegman (2011), el cual reúne diferentes experiencias y buenas prácticas internacionales relacionadas con el uso de las TIC y de programas computacionales especializados en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas universitarias. Por su parte, Chang y Lee (2010) presentan un modelo de trabajo en equipo basado en la colaboración entre profesores, alumnos y tecnologías. De forma similar, Baki y Çakiroglu (2010) presentan un modelo basado en el concepto de objetos de aprendizaje (OA). El artículo muestra una aplicación de los OA en el aula de matemáticas de secundaria. Los autores concluyen que los alumnos fueron capaces de seguir las instrucciones proporcionadas en dichos objetos, así como desarrollar convenientemente las actividades propuestas en ellos. Otros estudios interesantes son el de Brom, Sisler y Slavik (2009) y el de Evoh (2007). El primero presenta un marco para el aprendizaje mediante tecnologías basado en el juego "Europa 2045". La clave de este juego es que combina los principios del juego en línea con los roles sociales. La evaluación de la experiencia muestra que la integración de ambos aspectos fue un éxito por su alta aceptación entre profesores y alumnos. El segundo de los trabajos expone la experiencia de dos grupos de alumnos que utilizan las TIC para la enseñanza, usando cada grupo una combinación tecnología-metodología diferente. El objetivo es entender cómo la implementación de las TIC puede beneficiar la educación de los alumnos de secundaria. En Hohenwarter, Hohenwarter y Lavicza (2009) se identifican, entre otros aspectos, los obstáculos más comunes relacionados con la introducción de un programa computacional de geometría dinámica (GeoGebra en este caso). En Arranz, Losada, Mora, Recio y Sada (2011); y, Juan, Huertas, Cuypers y Loch (2012) se analizan algunas de las principales oportunidades y beneficios que las TIC ofrecen en enseñanza de las matemáticas, tanto en educación secundaria como en educación universitaria. Por último, el artículo de Castillo (2008) presenta una revisión bibliográfica relacionada con la enseñanza de las matemáticas mediante el uso de las TIC y su relación con la teoría del constructivismo en educación.

4. Metodología

La población objeto de nuestra investigación está compuesta por los profesores de matemáticas pertenecientes a centros de educación secundaria de Cataluña (España). Dado que sería tremendamente costoso –en tiempo y desplazamientos de personal– entrevistar a toda la población, se optó por seleccionar una muestra de la misma. La muestra se obtuvo mediante muestreo no probabilístico. En concreto, se empleó el llamado "método de bola de nieve" (Grande y Abascal, 2005). Este tipo de muestreo asegura la obtención de muestras representativas en un grupo de tamaño reducido y no censado, como es nuestro caso. Los profesores de secundaria que imparten docencia en asignaturas de matemáticas son, en comparación con todo el colectivo de profesorado, un grupo reducido. Además, es un grupo no completamente censado, pues este colectivo varía en función de las necesidades de cada centro. Así, por ejemplo, es habitual la existencia de docentes de matemáticas cuya titularidad oficial son las ciencias experimentales o la economía.

Se ha preferido disponer de una muestra relativamente pequeña aunque geográficamente dispersa, para poder así entregar el cuestionario en mano y explicarlo en persona con el fin de garantizar un muy elevado ratio de participación. Finalmente, la muestra elegida está formada por 29 profesores seleccionados por muestreo no probabilístico según el mencionado criterio de bola de nieve. La recogida de datos se llevó a cabo mediante un cuestionario compuesto por preguntas cerradas, en las que se usan escalas de tipo Likert para lograr una clasificación sistemática de las respuestas basadas en códigos semánticos y numéricos.

Cuando un profesor es seleccionado, se le explica el motivo de la investigación y se le hace entrega de un sobre que contiene un cuestionario anónimo. Dispone entonces de dos semanas para responderlo, siendo luego recogido en persona por el entrevistador. De este modo se pretende: (a) favorecer que los encuestados sean sinceros en sus respuestas, y (b) incrementar al máximo la ratio de respuesta (de hecho en nuestro caso se consiguió una tasa de respuesta del 100%). El cuestionario consta de seis bloques de preguntas, con un total de 66 ítems. Empieza con una sección dedicada a recoger información sobre el perfil profesional del encuestado: sexo, nivel, años de experiencia docente, colectivo profesional, centro y departamento. A continuación aparecen algunas recomendaciones sobre cómo rellenar el cuestionario adecuadamente, enfatizando la reflexión previa y una breve indicación sobre lo que se encontrará. Los bloques 1, 2, 3 y 4 constituyen el grueso modular de la encuesta, y se componen de 48 ítems enfocados todos ellos hacia la recogida de datos para la investigación. Son cuestiones sobre el uso y la integración de las TIC por parte del profesorado (bloques 1 y 2), sobre los obstáculos y las dificultades en incorporar las TIC (bloque 3), y sobre los retos y el futuro del uso de las TIC (bloque 4). Finaliza el cuestionario con el bloque 5 referente a la tipología de programa computacional matemático utilizado.

El uso de preguntas cerradas para la elaboración del instrumento de recogida de datos facilita el pre-procesado de los datos obtenidos, lo que resulta muy útil de cara a su tratamiento posterior, especialmente a la hora de realizar estadísticas descriptivas y usar técnicas de análisis factorial. La elección de este tipo de cuestionario también presenta limitaciones, puesto que siempre existe un cierto grado de subjetividad en las respuestas de los encuestados. Además, existe también una tendencia natural entre los encuestados a evitar los valores extremos de las escalas en sus respuestas.

5. Análisis de los datos

Las técnicas de análisis factorial permiten explicar un conjunto 'grande' de variables observadas, y que guardan cierto grado de correlación entre ellas, mediante un número más reducido de variables latentes –no observadas directamente– llamadas factores o componentes (Peña, 2002). Esta reducción de variables observadas en factores permite generar modelos explicativos más simples –con menos dimensiones–, en los que se han eliminado las redundancias causadas por la correlación existente entre las variables originales a la vez que se conserva gran parte de la información.

En nuestro análisis inicial se usaron un total de 48 variables (ver Anexo I), las cuales corresponden a las respuestas asociadas a los ítems de los bloques 1, 2, 3, y 4 del cuestionario. En un primer proceso de reducción de variables se eliminaron 23 variables, observándose que esta reducción era insuficiente. Tras un segundo proceso de reducción, se excluyó un total de 34 variables, quedando reducidas las 48 variables originales a 14 variables con una alta correlación entre ellas.

A continuación, se comprobó la viabilidad del análisis factorial para estas 14 variables (ver Tabla I). Se observó que el determinante de la matriz de correlación es muy cercano a cero, lo que implica la existencia de correlaciones muy elevadas entre las variables. Por otro lado, el índice KMO muestra un valor de 0,552, lo que establece la adecuación del análisis. Además, mediante el test de esfericidad de Bartlett se comprobó que la matriz de correlación no se corresponde con la matriz identidad, reforzando así la pertinencia del análisis factorial.

Cómo última comprobación se obtuvo el Coeficiente alfa de Cronbach, arrojando éste un valor de 0,807, i.e. superior al valor de referencia 0,7 (Campo-Arias, Díaz-Martínez, Rueda-Jaimes, Martínez-Mantilla, Amaya-Naranjo y Campillo, 2006), lo que contribuye a validar la consistencia interna de la encuesta. En definitiva, se concluyó que el análisis factorial que se describe a continuación resulta pertinente y proporciona conclusiones lícitas.

TABLA I
Pertinencia del análisis factorial (modelo 14 variables)

Determinante de la matriz de correlación		4,92E-005
Kaiser-Meyer-Olkin. Medida de la adecuación de la muestra		0,552
Test de esfericidad de Bartlett	Approx. Chi-Square	223,174
	df	91
	Sig.	0,000

Para el análisis de los datos se utilizó el procedimiento de extracción factorial de componentes principales-ACP (Harman, 1976). Con ello se asegura la generación de un modelo inicial que proporcione una primera estimación sobre cómo se distribuye la varianza compartida, además, de permitir obtener variables latentes y la naturaleza, o composición, de cada una de ellas. La Tabla II presenta la varianza explicada por cada factor (componente) y los autovalores iniciales. En ella se observa que los autovalores se encuentran ordenados por tamaño, indicando la varianza total explicada por cada factor común. Como se trata de un ACP, el punto de corte para la extracción del número de componentes viene dado por el valor unitario, por lo que se consideraron todos aquellos componentes con autovalores asociados superiores o iguales a 1 (ver Figura 1).

TABLA II
Varianza total explicada (Método de extracción: Análisis de Componentes principales)

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	4,808	34,340	34,340	4,808	34,340	34,340	3,042	21,728	21,728
2	2,859	20,425	54,765	2,859	20,425	54,765	2,966	21,184	42,912
3	1,426	10,188	64,953	1,426	10,188	64,953	2,207	15,763	58,675
4	1,104	7,882	72,835	1,104	7,882	72,835	1,982	14,161	72,835
5	,847	6,047	78,882						
6	,705	5,033	83,915						
7	,677	4,834	88,749						
8	,440	3,142	91,892						
9	,344	2,458	94,350						
10	,317	2,267	96,617						
11	,182	1,297	97,914						
12	,160	1,146	99,059						
13	,083	,596	99,655						
14	,048	,345	100,000						

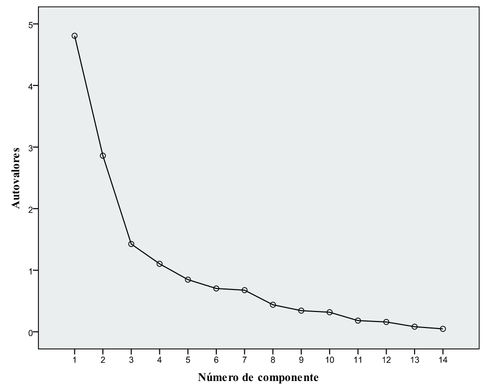


Figura 1. Gráfico de sedimentación

La Tabla III (izquierda) muestra la matriz factorial, en la cual se encuentran los factores extraídos y las variables que los componen, mostrando los pesos o coeficientes factoriales correspondientes a cada par variable/factor. Notar que el cuadrado de cada coeficiente factorial se interpreta de forma similar a como se haría con el cuadrado de los coeficientes de correlación, y representa la proporción de la varianza explicada por cada factor. La suma, para cada variable y en todos los factores, proporciona la comunalidad de extracción correspondiente.

TABLA III
Matriz de componentes (izquierda) y Matriz de componentes rotados (derecha)

	Componente			
	1	2	3	4
Utilidad	,733	-,003	,184	,420
Importancia	,698	-,147	,445	,346
Uso_metodología	,480	,579	-,175	-,042
Cambio_trabajo	,712	-,041	-,137	-,129
Mejora_E	,760	-,188	,331	-,290
Mejora_A	,845	-,153	-,196	,108
Mejora_Comprende	,646	,335	-,544	-,280
Desar_habilidades	,697	-,375	-,220	,400
E/A actual	,369	-,666	-,437	,002
Dif. Estils A	,546	-,204	,540	-,551
Prep_exámenes	-,184	,657	,206	,375
Uso_Internet	,420	,620	,021	-,077
Uso_programames	,229	,767	-,236	-,056
Uso_estadística	,392	,547	,265	,020

	Componente			
	1	2	3	4
Utilidad	,199	,826	-,033	,159
Importancia	-,012	,822	-,114	,371
Uso_metodología	,748	,172	-,083	,041
Cambio_trabajo	,397	,393	,359	,323
Mejora_E	,164	,425	,187	,752
Mejora_A	,350	,655	,438	,209
Mejora_Comprende	,835	,107	,433	,088
Desar_habilidades	,059	,784	,465	-,024
E/A actual	-,156	,302	,809	,008
Dif. Estils A	,020	,139	,066	,954
Prep_exámenes	,251	,042	-,699	-,309
Uso_Internet	,683	,133	-,250	,147
Uso_programames	,794	-,056	-,224	-,127
Uso_estadística	,500	,234	-,408	,229

Al observar los coeficientes factoriales de cada par variable/factor (Tabla III, izquierda), se percibe una estructura poco definida y difícil de interpretar, con saturaciones "significativas" (superiores a 0,30) en más de un factor. Tras aplicar la rotación Varimax (Cea, 2004; Hair, Anderson, Tatham,& Black, 2008; Visauta & Martori, 2003), la estructura se presenta mejor definida, reduciéndose el número de saturaciones significativas en cada factor.

Cabe observar que, previo a la rotación, el primer factor presenta un autovalor tras la extracción factorial igual a 4,808 (ver Tabla II), representando éste un 34,340% de la varianza explicada. Al rotar los ejes de los factores se produce una redistribución de la varianza, lo que desencadena cambios en la variabilidad explicada por cada factor, disminuyendo en el primero y redistribuyéndose entre los otros dos, sin que ello implique cambios en la varianza total explicada (Tabla I). Ésta se mantiene en el 72,84%, lo que significa que los 4 factores hallados explican casi un 73% de la varianza total –i.e. la pérdida de información es de un 27%, aproximadamente–.

Una vez clarificada la estructura es posible asignar las variables con mayores cargas significativas a cada componente, de modo que se facilita la asignación de significado propio a cada factor. La estructura queda definida así:

- Componente 1: Uso de tecnologías productivas:
  - Uso_metodología: Utilizo algún tipo de TIC que ayude al proceso de enseñanza y aprendizaje como parte de la metodología de trabajo.
  - Cambio_trabajo: Considero que la incorporación y uso de las TIC ha cambiado la manera de trabajar.
  - Mejora_Comprende: Considero que la incorporación de las TIC contribuye a una mejor comprensión de esta asignatura.
  - Uso_Internet: Utilizo programas concretos de Internet, animaciones en línea, etc.
  - Uso_programas: Utilizo programas computacionales específicos de geometría, análisis, estadística tipo Cabri, etc.
  - Uso_estadística: Utilizo programas computacionales para estadística.
- Componente 2: Valoración de la utilidad e importancia de las TIC:
  - Utilidad: Considero que las TIC tienen mucha utilidad.
  - Importancia: Considero que las TIC tienen mucha importancia.
  - Mejora_A: Considero que la incorporación de las TIC facilita el aprendizaje de esta asignatura.
  - Desar_habilidades: Considero que el uso de las TIC contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas.
- Componente 3: Uso efectivo de las TIC:
  - EA_actual: Considero que el uso de las TIC contribuye a una enseñanza más actualizada.
  - Prep_exámenes: Utilizo las TIC en la preparación de exámenes.

– Componente 4: Importancia del uso de las TIC en el proceso de aprendizaje.
  - Mejora_E: Creo que el uso y la integración de las TIC contribuyen a mejorar la enseñanza de esta asignatura.
  - Dif._Estilos_A: Considero que el uso de las TIC posibilita la elección entre diferentes estilos de aprendizaje.

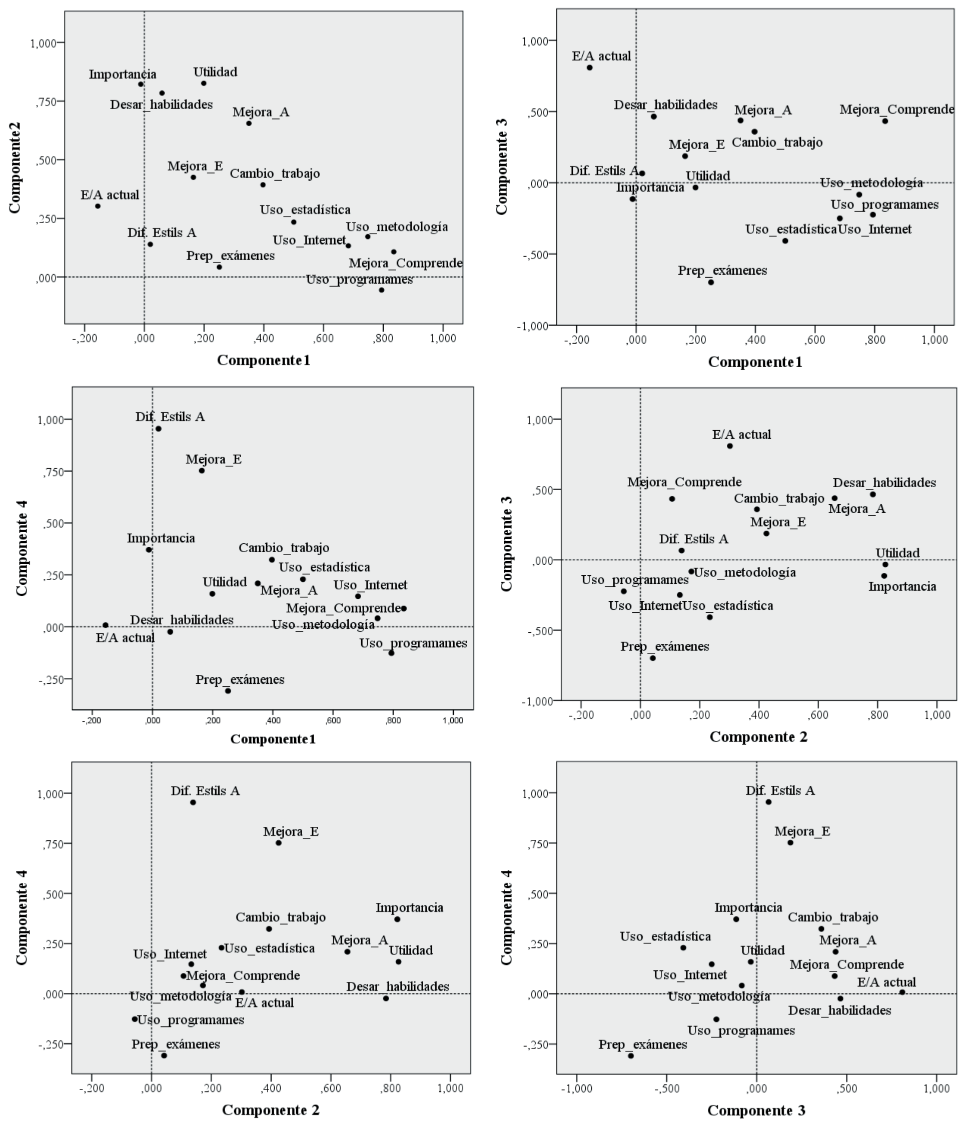


Figura 2. Representación de las componentes de cargas rotadas de las variables

La Figura 2 muestra la representación de las componentes de cargas rotadas. Las coordenadas vienen dadas por los respectivos coeficientes de correlación entre la variable y la componente, de forma que las variables saturadas en una misma componente aparecen agrupadas. Las variables al final de un eje son aquellas que tienen correlaciones elevadas sólo en ese factor y, por consiguiente, lo describen. Las variables cercanas al origen tienen correlaciones reducidas en ambos factores. Finalmente, las que no están cerca de ninguno de los ejes se relacionan con ambas componentes.

6. Discusión de resultados

A partir de los resultados obtenidos en la sección anterior, es posible dar un significado a los cuatro componentes o factores claves identificados:

- *Componente 1, Uso de tecnologías productivas:* Este componente trata de la relación del usuario con las tecnologías en general; dependiendo de los signos (en este caso positivos), puede interpretarse como la valoración o la disposición del individuo al uso de tecnologías en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- *Componente 2, Valoración de la utilidad e importancia de las TIC:* Este componente trata específicamente de la valoración de la utilidad de las TIC, es decir, de la importancia asignada a su uso.
- *Componente 3, Uso efectivo de las TIC:* Este componente trata del nivel o grado de uso de las TIC por parte del usuario; mide la aplicación de las TIC, mientras que el componente 2 mide la valoración que se le da a las TIC (notar que se puede definir un índice a partir de las variables valoración teórica vs. uso real).
- *Componente 4, Importancia del uso de las TIC en el proceso de aprendizaje:* Este componente trata de la valoración que el usuario otorga a las TIC en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

En la Figura 3, se puede observar que los profesores del estudio dan más importancia al *uso efectivo de las tecnologías (componente 3)*, dado que un 31% de ellos le asignan la mayor puntación. Por el contrario, lo que menor importancia parece tener es *la utilidad general de las TIC (componente 2)*, puesto que un 34,5% le asignan la menor puntuación de entre las 4 variables latentes que se evalúan. En ambos casos (componente 1 y 2), las variables observadas que conforman los componentes tienen correlaciones positivas, lo cual indica que a medida que aumenta la valoración que los profesores hacen de estas variables, aumentará también la valoración que se hace de estos componentes o variables latentes.

En cuanto al factor *importancia del uso de las TIC en el proceso de aprendizaje (componente 4)*, un 24% de los profesores encuestados le asigna una puntuación máxima, mientras que un 21% le asigna una puntuación mínima. Este hecho evidencia posiciones opuestas en términos de cómo se valora esta componente. Algo similar ocurre también con el factor *uso efectivo de las TIC (componente 3)*. De lo anterior se pude concluir que, en general, los profesores encuestados poseen una predisposición positiva al uso de las TIC.

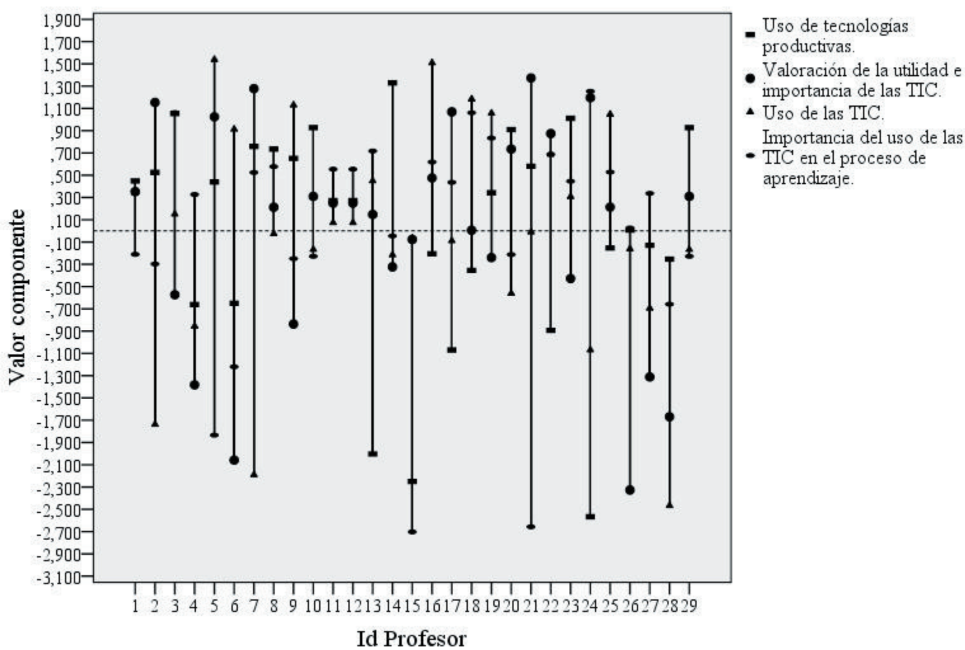


Figura 3. Valor que toman las 4 variables latentes identificadas por cada encuestado

A fin de ilustrar el análisis de los componentes, cabe decir que la proporción de mujeres en la encuesta es del 55,2% (por un 44,8% de hombres). También que el 7% de los participantes imparten docencia en Bachillerato (alumnos entre 16 y 18 años); el 27% en 3º y 4º de ESO (alumnos entre 14 y 16 años); el 46% en 1º y 2º de ESO (alumnos entre 12 y 14 años); el 10% en Ciclos Formativos de Grado Medio; el 7% en Ciclos Formativo de Grado Superior; y el 3% imparten en cursos dispersos (aulas abiertas, aulas de iniciación para alumnos recién llegados, aulas para estudiantes con necesidades especiales, etc.). En relación a los años de experiencia de los docentes, se tiene que casi la mitad de los profesores del estudio tienen más de 20 años de experiencia. Considerando esta variable como variable de segmentación, se observa en la Figura 4 que los profesores que se sitúan en el tercer tramo de años de experiencia (12 a 19) le dan mayor puntuación al uso de las tecnologías productivas. Sin embargo, estos son también los que menos parecen valorar la importancia del uso de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Asimismo, los profesores del tramo de mayor edad parecen tener una valoración más equilibrada en términos de asignar puntuaciones máximas a las 4 variables latentes y, a diferencia de los profesores del tramo anterior, ellos dan mayor importancia al uso de las TIC en la docencia.

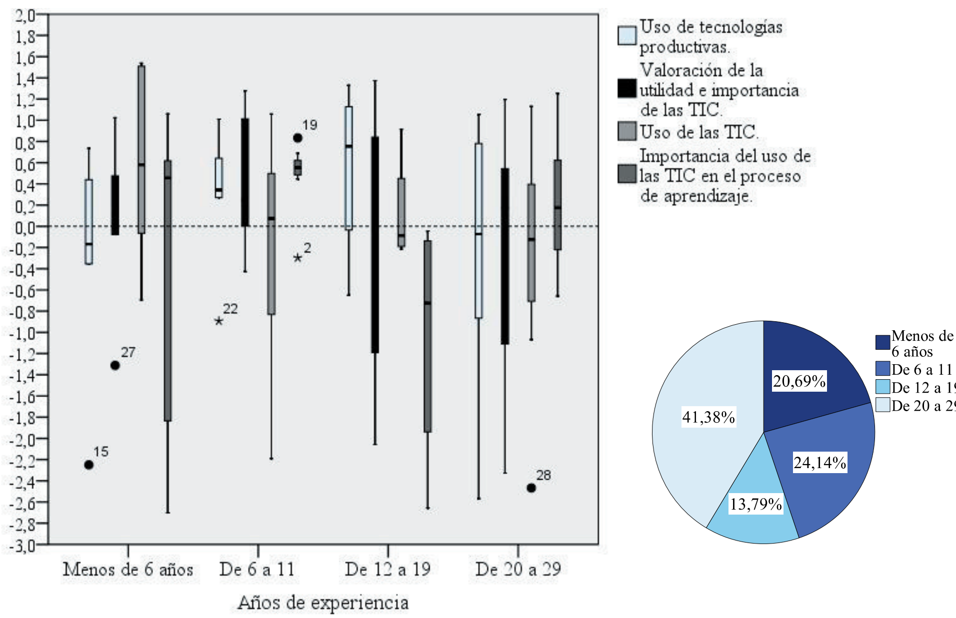


Figura 4. Boxplot múltiple de las 4 variables latentes identificadas, agrupadas por los años de experiencia de los profesores del estudio (izquierda) y diagrama de sectores para los años de experiencia (derecha)

Por otro lado, haciendo un análisis global y comparativo, la Figura 5 muestra el boxplot múltiple de los 4 factores identificados. Es posible observar que los valores máximos tienen cierta tendencia a coincidir, a diferencia de los valores mínimos en donde destaca el factor *valoración de la utilidad e importancia de las TIC*. De manera general se aprecia que los 4 factores no presentan diferencias significativas: 3 de ellos tienen el 50% de las observaciones medidas por encima del cero, confirmando predisposición positiva al uso de las TIC.

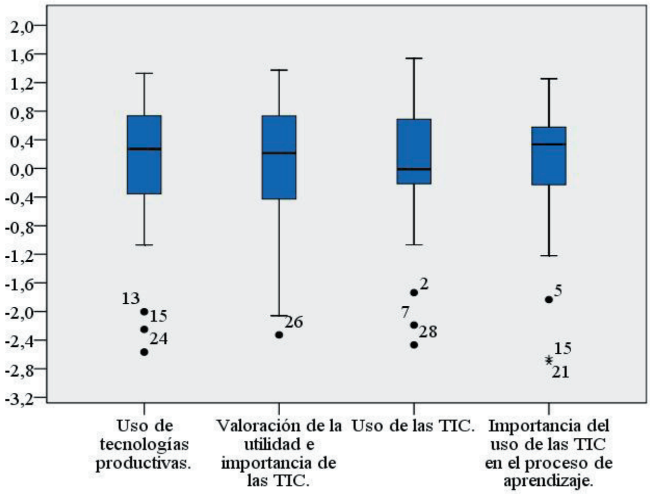


Figura 5. Boxplot múltiple de las 4 variables latentes identificadas

Como refleja la Figura 7, la mayoría de los encuestados considera que las TIC son importantes (*componente 2, valoración de la utilidad e importancia de las TIC*). De hecho, el 70% de los participantes ha preferido las opciones "De acuerdo" y "Totalmente de acuerdo" en referencia a la afirmación "Considero que las TIC tienen mucha importancia". Además, en la Figura 6 se aprecia que hasta un 76% de los encuestados están "De acuerdo" o "Totalmente de acuerdo" con la afirmación de que las TIC son útiles. También en la Figura 8 se aprecia que hasta un 72% respalda la afirmación de que las TIC facilitan el aprendizaje. Finalmente, en la Figura 9 se observa que hasta un 79% respaldan la hipótesis de que las TIC contribuyen al desarrollo de habilidades cognitivas.

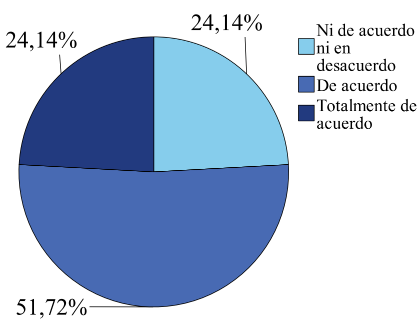


Figura 6. Diagrama de sectores para la variable *Utilidad* (Considero que las TIC tienen mucha utilidad)

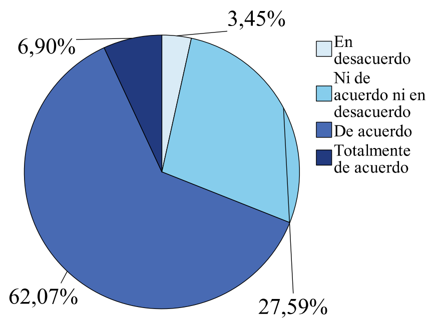


Figura 7. Diagrama de sectores para la variable *Importancia* (Considero que las TIC tienen mucha importancia)

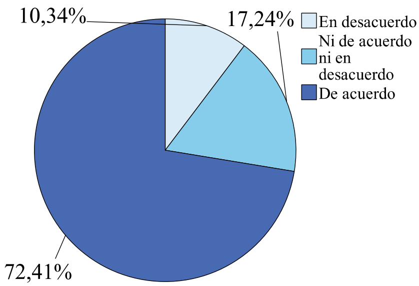


Figura 8. Diagrama de sectores para la variable *Mejora_A* (Considero que la incorporación de las TIC facilita el aprendizaje de esta asignatura)

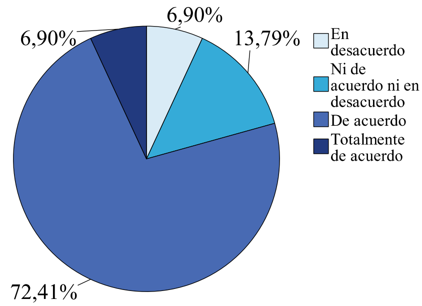


Figura 9. Diagrama de sectores para la variable *Desar_habilidades* (Considero que el uso de las TIC contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas)

Entre las razones por las cuales las TIC facilitan el aprendizaje, los encuestados destacan que las TIC permiten reducir el tiempo que los alumnos dedican al desarrollo de algunas destrezas tradicionales –e.g. cálculos largos y pesados–, pudiendo así dedicar más tiempo al desarrollo de conceptos e ideas. Sin embargo, al preguntar al profesorado sobre el uso de las TIC, sólo un 53% afirman que utilizan algún tipo de TIC como parte de la metodología de trabajo. Es más, llama la atención que un 20% de los encuestados no están de acuerdo en usar las TIC para ello. Esto hace pensar que el profesorado reconoce el potencial y la utilidad de las tecnologías pero admite que se les está sacando menos rendimiento del que sería posible.

Asimismo, un 60% del profesorado considera que las TIC han cambiado la manera de trabajar y, por el contrario, un 23% no están de acuerdo con la existencia de tal cambio (componente 1). Este hecho despierta interés, ya que enseñar matemáticas con ayuda de las TIC suele requerir de un esfuerzo importante a la hora de desarrollar metodologías docentes distintas a las tradicionales. A pesar de que sólo un 49% de los encuestados manifiesta hacer uso de las TIC durante los procesos de enseñanza-aprendizaje (componente 1), un 86% manifiestan que utilizan estos medios para preparar los materiales de sus clases, y un 83% para preparar los exámenes y ejercicios (componente 3). Parece pues deducirse que aquel profesor que utiliza las TIC, las utiliza de forma intensa y extensa (para preparar materiales y exámenes, realizar actividades y ejercicios, etc.). Respecto al uso de Internet y/o programas computacionales específicos (componente 1), resulta que un 41% de los encuestados está de acuerdo con utilizar Internet, mientras que hasta un 60% está de acuerdo en usar programas computacionales específicos. Sin embargo, un 33% no está de acuerdo ni en usar una cosa ni la otra. Esta coyuntura pone de relieve que, a pesar de las posibilidades que ofrece Internet para la docencia de las matemáticas, el profesorado prefiere utilizar el programa computacional matemático antes que hacer uso de los recursos matemáticos presentes en Internet. Este hecho puede ser debido a que los alumnos pueden caer fácilmente en la tentación de usar Internet como herramienta de ocio, más que como herramienta de aprendizaje, durante las clases.

7. Conclusiones

La investigación que hemos llevado a cabo, nos ha permitido alcanzar los objetivos que nos planteábamos en nuestro estudio: obtener información sobre el proceso de integración de las TIC en la enseñanza secundaria de las matemáticas. Y, de manera particular, identificar mediante una encuesta a profesores de matemáticas, la predisposición de estos docentes al uso de las TIC en el aula de matemáticas; las ventajas que perciben estos profesores al usar las TIC en sus aulas; el uso que hacen de dicha tecnología en el día a día del aula; o, estudiar la correspondencia que hay entre lo que opinan estos profesores acerca de la utilidad docente de las TIC, y el uso real de las mismas en sus aulas de matemáticas.

Tal y cómo se planteaba en las hipótesis, los resultados generales del análisis factorial han puesto de manifiesto que las variables de la encuesta se pueden sintetizar en una estructura de 4 componentes o factores: (1) uso de tecnologías productivas, (2) valoración de la utilidad e importancia de las TIC, (3) uso efectivo de las TIC, y (4) importancia del uso de las TIC en el proceso de aprendizaje. Con estas 4 componentes se explica el 72,8% de la varianza total. En otras palabras, es razonable reducir las 48 variables observadas a tan sólo 4 factores claves sin sufrir una pérdida importante de información. Se debe recordar que el objetivo del modelo es sacar a la luz la estructura subyacente de los datos. El modelo obtenido nos lleva a concluir que los profesores encuestados poseen una predisposición positiva al uso de las TIC en su actividad docente. Entre las ventajas percibidas del uso de las TIC en la construcción del conocimiento matemático destaca la opinión generalizada siguiente: las TIC permiten ilustrar mejor algunos conceptos (mediante gráficos 2D y 3D, por ejemplo), favorecen una aproximación constructivista (con la experimentación con diferentes escenarios y la simulación), potencian el desarrollo del espíritu crítico (con la comparación de distintos métodos de resolución), reducen el trabajo mecánico, y permiten minimizar la distancia entre teoría y práctica (mediante el estudio de casos reales que serían irresolubles sin ayuda de programas computacionales especializados). Sin embargo, si bien se valora positivamente su potencial, esto no ha conllevado hasta la fecha un cambio importante en su uso docente. Así, un porcentaje elevado de profesores afirman que no utilizan las TIC como parte de la metodología de trabajo. A partir de estos datos, se puede concluir que, si bien los docentes consideran positiva la existencia de las TIC, su incorporación efectiva en la docencia no está tan extendida como cabría esperar. A pesar de ello, el profesorado manifiesta que utilizan estos medios para muchas finalidades didácticas, especialmente durante la preparación de exámenes y ejercicios. Se observa también que los profesores que usan las TIC hacen un uso intensivo de las mismas, y adaptan la metodología docente al uso de las mismas. El innovador proceso formativo, caracterizado por las TIC conlleva un esfuerzo importante por parte de todos los agentes implicados (estudiantes, profesores, e instituciones docentes). Este esfuerzo se debe centrar, principalmente, en la superación de algunos obstáculos de tipo metodológico que son básicamente debidos al hecho de que los modelos de formación tradicionales no son directamente aplicables en entornos de formación con TIC. Probablemente esta barrera explique que exista una discrepancia entre su valoración y su uso real.

La existencia de la discrepancia entre la valoración alta que se hace de las TIC y su no tan alto uso real en docencia, hace pensar que en los próximos años se producirá un incremento significativo, tanto en su nivel de uso dentro de las aulas como en su nivel de integración dentro de los procesos de evaluación. Esta transformación deberá permitir que los estudiantes se involucren más en el desarrollo de su formación y realicen, mediante la experimentación con las TIC, sus propios descubrimientos matemáticos en aras de conseguir un aprendizaje más significativo.

Referencias bibliográficas

Aguaded, J. I. & Fandos, M. (2009). Las plataformas educativas en el e-learning en la educación secundaria: análisis de la plataforma Educans. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia,12*(1), 125-168.

Arranz, J. M., Losada, R., Mora, J. A., Recio, T., & Sada, M. (2011). Modeling the cube using GeoGebra. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 119-131). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Baki, A. & Çakiroglu, Ü. (2010). Learning objects in high school mathematics classrooms: Implementation and evaluation. *Computers & Education, 55*(4), 1459-1469. doi:10.1016/j.compedu.2010.06.009

Barkatsas, A., Kasimatis, K., & Gialamas, V. (2009). Learning secondary mathematics with technology: Exploring the complex interrelationship between students' attitudes, engagement, gender and achievement. *Computers & Education, 52*(3), 562-570. doi:10.1016/j.compedu.2008.11.001

Bishop, P., Beilby, M., & Bowman, A. (1992). Computer-based learning in mathematics and statistics. *Computers & Education, 19*(1-2), 131-143. doi:10.1016/0360-1315(92)90019-2

Brom, C., Sisler, V., & Slavik, R. (2009). Implementing digital game-based learning in schools: augmented learning environment of 'Europe 2045'. *Multimedia Systems, 16*(1), 23-41. doi: 10.1007/s00530-009-0174-0

Campo-Arias, A., Díaz-Martínez, L., Rueda-Jaimes, G., Martínez-Mantilla, J., Amaya-Naranjo, W. & Campillo, H. (2006). Consistencia interna y análisis factorial del cuestionario SCOFF para tamizaje de trastorno de conducta alimentaria en adolescentes estudiantes: una comparación por género. *Universitas Psychologica, 5*(2), 295-304.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 171-194.

Cea, M. A. (2004). *Análisis multivariable. Teoría y práctica en la investigación social* (2da. ed.). Madrid, España: Síntesis.

Cobo, P. & Fortuny, J. M. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. En A. Alexander, B. Gómez y M. Torralbo, (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 55-70). Córdoba, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Cobo, P., Fortuny, J. M., Puertas, E., & Richard, P. (2007) AgentGeom: a multiagent system for pedagogical support in geometric proof problems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(1), 57-79. doi: 10.1007/s10758-007-9111-5

Chang, L. Ch. & Lee, G. C. (2010). A team teaching model for practicing project-based learning in high school: Collaboration between computer and subject teachers. *Computers & Education, 55*(3), 961-969. doi:10.1016/j.compedu.2010.04.007

Evoh, C. J. (2007). Collaborative Partnerships and the Transformation of Secondary Education through ICTs in South Africa. *Educational Media International, 44*(2), 81-98. doi:10.1080/09523980701295091

González, J., Cobo, E., Martí, M. & Muñoz, P. (2006). Desarrollo y aplicación de nuevas tecnologías para la formación universitaria. *Teoría de la Educación, Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 7*(1). Obtenido de http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_07/n7_art_gonzalez_cobo_marti_munoz.htm.

Grande, I. & Abascal, E. (2005). *Análisis de encuestas.* Madrid, España: ESIC.

Granic, A., Misfud, C., & Cukusic, M. (2009). Design, implementation and validation of a Europe-wide pedagogical framework for e-Learning. *Computers & Education, 53*(4), 1052-1081. doi:10.1016/j.compedu.2009.05.018

Gras- Martí, A. & Cano, M. (2005). Debates y tutorías como herramientas de aprendizaje para alumnos de ciencias: análisis de la integración curricular de recursos del campus virtual. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(2), 167-180.

Hair, J., Anderson, R., Tatham, R. & Black, W. (2008). *Análisis multivariante* (5ta. ed.). Madrid, España: Pearson/ Prentice Hall.

Harman, H. (1976). *Modern Factor Analysis*. Chicago, U.S.A.: The University of Chicago Press.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009). Introducing Dynamic Mathematics *Software* to Secondary School Teachers: The Case of Geogebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28*(2), 135-146.

Hoyles, C., Sutherland, R., & Evans, J. (1986). Using logo in the mathematics classroom. What are the implications of pupil devised goals? *Computers & Education, 10*(1), 61-71. doi:10.1016/0360-1315(86)90053-9

Howe, J. A. M., Ross, P. M., Johnson, K. R., Plane, F., & Inglis, R. (1982) Teaching mathematics through programming in the classroom. *Computers & Education, 6*, 85-91. doi:10.1016/0360-1315(82)90016-1

Journell, W. (2010). Perceptions of e-learning in secondary education: a viable alternative to classroom instruction or a way to bypass engaged learning? *Educational Media International, 47*(1), 69-81.

Juan, A. A., Huertas, M. A., Cuypers, H., & Loch, B. (Eds.) (2012). Mathematical E-Learning. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, *9*(1), 1-3.

Juan, A. A., Huertas, M. A., Steegmann, C., Corcoles, C., & Serrat, C. (2008). Mathematical E-Learning: state of the art and experiences at the Open University of Catalonia. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(4), 455-471. doi: 10.1080/00207390701867497

Juan, A. A., Huertas, M. A., Treholm, S., & Steegman, C. (2011). *Teaching Mathematics Online: Emergent Technologies and Methodologies.* Hershey, U.S.A.: IGI Global.

Juan A. A., Steegmann, C., Huertas, A, Martinez, M. J., & Simosa, J. (2011). Teaching mathematics online in the European Area of Higher Education: an instructor's point of view. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 42*(2), 141-153. doi: 10.1080/0020739X.2010.526254

Nikolova, N., Georgiev, A., & Gachev, G. (2008). The challenges in the secondary school e-learning process. In D. Remenyi (Ed.), *Proceedings of the 7th European Conference on e-learning ECEL* (Vol. 2, pp. 205-213). Agia Napa, Cyprus, Greece: University of Cyprus.

Oldknow,A., Taylor, R., & Tetlow, L. (2010). *Teaching Mathematics using ICT (3rd ed.)*. London, United Kindom: Continuum International Publishing Group.

Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Santos, J., Muñoz, A., Juez, P., & Guzmán, L. (1999). *Diseño y tratamiento estadístico de encuestas para estudios de mercado.* Madrid, España: Centro de estudios Ramón Areces.

Sharim, K. & Khlaif, Z. (2010). An e-learning approach to secondary education in Palestine: opportunities and challenges. *Information Technology for Development, 16*(3), 159-173. doi: 10.1080/02681102.2010.501782

Visauta, B. & Martori, J. (2003). *Análisis estadístico con SPSS para Windows (2a ed.)*. Madrid, España: McGraw-Hill.

ANEXO I

Descripción de las variables usadas en el análisis factorial

Nº	*Variable*	*Descripción*
1	Utilidad	Considero que las TIC tienen mucha utilidad.
2	Importancia	Considero que las TIC tienen mucha importancia.
3	Uso_metodología	Utilizo algún tipo de TIC que ayude al proceso de enseñanza y aprendizaje como parte de la metodología de trabajo.
4	Cambio_trabajo	Considero que la incorporación y uso de las TIC ha cambiado la manera de trabajar.
5	Mejora_E	Creo que el uso y la integración de las TIC contribuyen a mejorar la enseñanza de esta asignatura.
6	Mejora_A	Considero que la incorporación de las TIC facilita el aprendizaje de esta asignatura.
7	Mejora_Comprende	Considero que la incorporación de las TIC contribuye a una mejor comprensión de esta asignatura.
8	Actitud_activa	Considero que, en general, la actitud que tienen los profesores del Centro a la hora de promover el uso y la integración de las TIC es activa.
9	Más_Edad_uso	Considero que a medida que aumenta la edad del profesorado disminuye el uso de las TIC.
10	Exp._docente	Considero que la experiencia docente es un factor favorable al uso de las TIC.
11	Desar_habilidades	Considero que el uso de las TIC contribuye al desarrollo de habilidades cognitivas.
12	EA_flexible	Considero que el uso de las TIC contribuye a una formación más flexible y práctica.
13	EA_actual	Considero que el uso de las TIC contribuye a una enseñanza más actualizada.
14	Ritmo_propio	Considero que el uso de las TIC posibilita estudiar a ritmo propio.
15	Dif._Estilos_A	Considero que el uso de las TIC posibilita la elección entre diferentes estilos de aprendizaje.
16	Género_uso	Considero que el género del profesorado afecta al uso de las TIC.
17	Tiempo_libre_uso	Considero que la disposición de tiempo libre del profesorado es un factor favorable para el uso de las TIC.
18	Asistente_mate	Considero que las TIC son una herramienta útil para el desarrollo de las matemáticas, pero únicamente como "asistente matemático", como un medio no como un fin.
19	Programación	Considero correcto que la programación de la asignatura incluya el uso de recursos TIC.
20	Prep_materiales	Utilizo las TIC en la preparación de materiales.
21	Prep_exámenes	Utilizo las TIC en la preparación de exámenes.
22	Realidad_ejerc	Utilizo las TIC en la realización de actividades y ejercicios.
23	Uso_Internet	Utilizo programas concretos de Internet, animaciones... on-line.
24	Uso_herr_mate	Utilizo herramientas matemáticas de carácter amplio: Hoja de cálculo Excel, Wiris, Derive, Mathematica,...

25	Uso_*software*	Utilizo *softwares* específicos de geometría, análisis, estadística, ... tipo Cabri, Funcionet,...
26	Uso_autoa	Utilizo tutoriales y programas de autoaprendizaje.
27	Uso_gráficas	Utilizo el *software* matemático para hacer gráficas.
28	Uso_estadística	Utilizo el *software* para estadística.
29	Uso_simulaciones	Utilizo el *software* matemático para hacer simulaciones de ejercicios.
30	Uso_cálculo	Utilizo el *software* matemático para resolver problemas, como asistente de cálculo.
31	Dispersión_inf	Considero que es un obstáculo la dispersión de información existente en Internet.
32	Caídas_red	Considero que es un obstáculo la solidez (las caídas) de la Red.
33	Idioma	Considero que es un obstáculo el idioma del *software* educativo matemático.
34	Velocidad	Considero que es un obstáculo la velocidad de la línea
35	Paciencia_alumn	Considero que es un obstáculo la poca paciencia de los alumnos para trabajar con las TIC.
36	Conocs_previos	Considero que es un obstáculo el requerimiento de un cierto conocimiento informático (previo) para manejar el *software*.
37	No_soft_adecuado	Considero que es un obstáculo la falta de *software* adecuado y adaptado al currículum de las asignaturas cuantitativas.
38	Cambio_rol_profe	Considero que es un obstáculo la necesidad de un cambio en el rol del profesor: De dipositario del saber a organizador del aprendizaje.
39	Uso_exclusivo	Considero que es un reto de futuro utilizar exclusivamente material multimedia en los cursos on-line.
40	Exam_virt	Considero que es un reto de futuro realizar exámenes virtuales.
41	Proyectos_interins	Considero que es un reto de futuro realizar proyectos interinstitucionales.
42	Discapacitados	Considero que es un reto de futuro aumentar la atención a discapacidades.
43	Trabajo_en_equipo	Considero que es un reto de futuro aumentar el trabajo en equipo.
44	Trabajo_flexible	Considero que es un reto de futuro aumentar el trabajo flexible (en horario y lugar) y personalizado.
45	Más_uso	Considero que es un reto de futuro aumentar el uso de recursos TIC –ya existentes pero que en la actualidad no se utilizan– en las matemáticas.
46	Uso_nuevas_tec	Considero que es un reto de futuro incorporar nuevos recursos TIC que vayan surgiendo en las matemáticas.
47	Menos_uso	Considero que es un reto de futuro disminuir el uso de las TIC de lo que se hace actualmente.
48	No_usar_tec	Considero que es un reto de futuro no utilizar nada –o lo menos posible- las TIC.

Autores

Cristina Steegman. Universitat Oberta de Catalunya, España. csteegmann@uoc.edu

Alejandra Pérez-Bonilla. Universidad de Santiago de Chile, Chile. alejandra.perez.b@usach.cl

Montserrat Prat. Universitat Autónoma de Barcelona, España. montserratprat@gmail.com

Angel A. Juan. Universitat Oberta de Catalunya (UOC), España. ajuanp@uoc.edu

Pedro Gómez, María C. Cañadas

DIFICULTADES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

Difficulties in mathematics teachers training in learning phenomenological analysis

RESUMEN

En este artículo exploramos el aprendizaje del análisis fenomenológico en un programa de máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio basado en el modelo del análisis didáctico. A partir de una descripción de los aspectos teóricos y técnicos de la noción de fenomenología, establecemos una serie de acciones que permiten describir la actuación de los grupos de profesores en formación en sus producciones escritas. Encontramos que los grupos no manifestaron dificultades de aprendizaje con la idea de situación, que tuvieron dificultades con las ideas de fenómeno y contexto —particularmente en relación con la noción de característica estructural—, y que lo hicieron en mayor medida respecto a la idea de subestructura y su relación con la noción de contexto.

PALABRAS CLAVE:

- *Análisis fenomenológico*
- *Dificultades*
- *Educación secundaria*
- *Formación de profesores*
- *Matemáticas*

ABSTRACT

In this paper, we explore the learning of phenomenological analysis in a mathematics secondary teacher education master program based on the didactical analysis model. From the description of theoretical and technical aspects, we establish a set of actions that allow us to describe the groups of teachers' performance through their written documents. We found that the groups did not have learning difficulties with idea of situation, had difficulties with the ideas of phenomenon and context — particularly when referring to the notion of structural characteristic—, and showed serious difficulties with the idea of substructure and its relation to the notion of context.

KEY WORDS:

- *Phenomenological analysis*
- *Difficulties*
- *Secondary*
- *Teacher education*
- *Mathematics*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (3): 311-334.
Recepción: Marzo 29, 2013 / Aceptación: Junio 14, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1933

RESUMO

Neste artigo vamos explorar a aprendizagem de análise fenomenológica em um programa de mestrado em ensino de matemática no Secundário baseado no modelo de análise didactico. Mediante de uma descrição dos aspectos teóricos e técnicos desta nação, estabelecemos uma série de ações que ajudam a descrever o desempenho de grupos de professores estagiários em seu trabalho escrito. Nós descobrimos que os grupos não apresentaram dificuldades com a idea de situação, expressam algumas dificuldades com as idéias do fenômeno e contexto —particularmente em relação à noção e característica estrutural— e revelou problemas graves com a idéia de sub-estrutura e sua relação à noção de contexto.

PALAVRAS CHAVE:

- *Análise fenomenológica*
- *Dificuldades*
- *Ensino Secundário*
- *Formação de Professores*
- *Matemática*

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous explorons l'apprentissage de l'analyse phénoménologique dans un programme de master en métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation de mathématiques de secondaire que suit le modèle de l'analyse didactique. De la description des aspects théoriques et techniques de cet organisateur curriculaire, nous établissons une série d'actions qui aident à décrire la performance des groupes de professeurs stagiaires dans leur travail écrit. Nous avons constaté que les groupes n'ont montré aucune difficulté avec l'idée de la situation, ont exprimé quelques difficultés avec les idées de phénomène et de contexte —en particulier en ce qui concerne la notion de caractéristique structurelle— et ont révélé de graves problèmes avec l'idée de sous-structure et de sa relation avec la notion de contexte.

MOTS CLÉS:

- *Analyse phénoménologique*
- *Difficultés*
- *Enseignement secondaire*
- *Formation des enseignants*
- *Mathématiques*

1. Introducción

Un concepto matemático es un medio para organizar un conjunto de fenómenos. Con base en esta idea, Freudenthal (1983) sugiere comenzar la instrucción por los fenómenos y, a partir de ellos, enseñar al alumno a manipular los conceptos, como medios de organización de esos fenómenos (pp. 28-32). En este sentido, "la realidad no solamente es un área de aplicación, sino que también es una fuente de aprendizaje" (Treffers, 1993, p. 89). El análisis fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares es un procedimiento que permite establecer los fenómenos que dan sentido al tema, identificar los contextos que organizan esos fenómenos y las subestructuras que les sirven de modelo, y describir las relaciones entre esas subestructuras y esos contextos. La capacidad de un profesor para realizar el análisis fenomenológico de un tema contribuye a su habilidad para diseñar, seleccionar o adaptar tareas que promuevan el desarrollo de las competencias que le pueden permitir a los escolares "plantear, formular e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones" (OCDE, 2005, p. 75). Por consiguiente, el análisis fenomenológico es una herramienta con la que los profesores pueden analizar los temas matemáticos que enseñan. Por esta razón, el análisis fenomenológico forma parte de los contenidos de algunos programas de formación de profesores de matemáticas. Su enseñanza y aprendizaje son procesos complejos. Algunas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades de los profesores en formación con respecto a la noción de fenomenología y la heterogeneidad de significados parciales que ellos construyen para cada tema. Por ejemplo, Gómez (2007) encontró que los profesores en formación no logran producir un análisis fenomenológico detallado de su tema en el que los fenómenos propuestos se organicen de acuerdo con la relación entre contextos y subestructuras. En este artículo, caracterizamos en detalle algunas de estas dificultades.

Este estudio se enmarca en la problemática de investigación en Educación Matemática que se centra en el conocimiento del profesor de matemáticas (e.g., Beijaard, Korthagen, & Verloop, 2007; Hill, 2011; Hurrell, 2013). Dentro de esta problemática, existen líneas de investigación que se preocupan por los procesos de aprendizaje de los profesores, en general (Gess-Newsome & Lederman, 2001; Sánchez, 2011), y por esos procesos de aprendizaje cuando los profesores participan en programas de formación (Borko, 2004; Carter, 1990; Cavanagh & Garvey, 2012). En particular, nuestro estudio aborda la reivindicación de los expertos en Educación Matemática de que, para planificar e implementar las clases de matemáticas, los profesores en formación deben conocer el tema a enseñar desde múltiples perspectivas (Cooney, 2004; Shulman, 1986) y ser capaces de analizarlo desde esas perspectivas para producir información que fundamente sus decisiones de planificación (Charalambous, 2008; Sullivan, Clarke, Clarke, & O'Shea, 2010). En este sentido, abordamos la solicitud de Simon (2008) sobre la necesidad de investigaciones que estudien el aprendizaje y la enseñanza de conceptos pedagógicos en la formación de profesores de matemáticas.

De la variedad de conocimientos y habilidades que configuran la competencia de planificación del profesor de matemáticas (Gómez, 2006), en este artículo nos centramos en un aspecto particular: la capacidad del profesor para relacionar un tema de las matemáticas escolares con los fenómenos y contextos que ese tema organiza. Es decir, nos centramos en las ideas universalmente reconocidas de Freudenthal (1983) sobre fenomenología didáctica en matemáticas y que, en el contexto de la Didáctica de la Matemática en España, se han concretado como análisis fenomenológico (Puig, 1997).

El objetivo de investigación de este artículo consiste en identificar y caracterizar las dificultades que grupos de profesores en formación manifestaron en sus producciones escritas sobre las ideas que configuran el análisis fenomenológico. En lo que sigue, presentamos una visión del aprendizaje de esta noción y describimos una conceptualización del análisis fenomenológico; presentamos el método que utilizamos para analizar las producciones de los grupos de profesores en formación; y exponemos e interpretamos los resultados obtenidos. Por último, presentamos las conclusiones de la investigación.

2. Marco conceptual

Los programas de formación de profesores en los que trabajamos se basan en un modelo funcional de la formación de profesores de matemáticas que se estructura mediante el modelo del análisis didáctico (Gómez & González, 2008, 2013a). Una descripción detallada del procedimiento de análisis didáctico se puede ver, por ejemplo, en Gómez (2002, 2007) y Lupiáñez (2009). Estos programas abordan el aprendizaje de los profesores en formación desde una perspectiva social del aprendizaje, desde una visión funcional de las matemáticas y con énfasis en los procesos de aprendizaje de nociones de la Educación Matemática denominadas organizadores del currículo.

2.1. *Aprendizaje de los organizadores del currículo*

Un organizador del currículo es un concepto que (a) forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática y (b) permite analizar un tema matemático con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997). Estructura conceptual, sistema de representación, análisis fenomenológico, y expectativas, limitaciones e hipótesis de aprendizaje son ejemplos de organizadores del currículo. Por ejemplo, cuando los profesores en formación realizan el análisis de los sistemas de representación de su tema, identifican los sistemas de representación más significativos para el tema y establecen las relaciones entre esos sistemas de representación. De la misma forma, cuando los profesores analizan el tema matemático desde la perspectiva fenomenológica, establecen los fenómenos que dan sentido al tema y los organizan en contextos y subestructuras. En los programas basados en el modelo del análisis didáctico, se pretende que los profesores en formación desarrollen tres tipos de conocimiento sobre los organizadores del currículo: conocimiento teórico, conocimiento técnico y conocimiento práctico. González y Gómez (Gómez & González, 2008, 2009; González y Gómez, 2008, 2014) los caracterizan de la siguiente manera.

Conocimiento teórico. Se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura.

Conocimiento técnico. Se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema con el organizador del currículo.

Conocimiento práctico. Se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del conocimiento técnico del organizador del currículo en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

Nuestra investigación sobre el aprendizaje de los grupos de profesores en formación se basa en el marco que hemos descrito. En este artículo, nos centramos, en particular, en el desarrollo del conocimiento teórico y el conocimiento técnico de grupos de profesores en formación cuando ellos abordaron el análisis de un tema de las matemáticas escolares con el análisis fenomenológico. Describimos este organizador del currículo a continuación.

2.2. *Análisis fenomenológico*

Con el análisis fenomenológico, se pretende que el profesor en formación identifique y organice los fenómenos que dan sentido al tema que está analizando (Gómez y Cañadas, 2011). A continuación, describimos este organizador del currículo en términos de su conocimiento teórico y su conocimiento técnico.

Conocimiento teórico

En su sentido básico, dentro del contexto de la Educación Matemática, la fenomenología didáctica es el estudio de los fenómenos (Freudenthal, 1983). Pero el análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar fenómenos que dan sentido a un tema de las matemáticas escolares. Consiste también en establecer las maneras en que el tema organiza esos fenómenos (Freudenthal, 1983; Puig, 1997). Para ello, consideramos las siguientes ideas clave como constituyentes de su conocimiento teórico: fenómeno, contexto, característica estructural, subestructura, relación entre subestructura y contexto, situación, usos de un tema y problemas a los que el tema da respuesta.

Por ejemplo, si nos interesa identificar fenómenos relacionados con la función cuadrática como tema de las matemáticas escolares, entonces podemos pensar en usos o problemas a los que este tema da respuesta. La antena parabólica de mi casa, el conjunto de todas las antenas parabólicas y el conjunto de todos los reflectores parabólicos son ejemplos de fenómenos que dan sentido al tema. La idea de reflectores parabólicos constituye un contexto que organiza todos los fenómenos que comparten una misma característica estructural que surge de un principio físico: su forma parabólica da lugar a que las ondas confluyan en un mismo lugar —antenas— y a que los rayos de luz se proyecten paralelamente —focos—.

Las características estructurales son aquellas propiedades de un fenómeno que involucran y dan sentido al tema matemático. De esta forma, las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen a un contexto permiten relacionarlo con una subestructura de la estructura conceptual del tema. Este es un significado del término subestructura más general que el estrictamente matemático (Gómez, 2007). En el caso que estamos ejemplificando, se refiere a la subestructura que establece las propiedades del foco de la parábola. Se establece así una relación biunívoca entre subestructuras y contextos. Subestructuras y contextos son dos formas de establecer las maneras en las que el tema organiza los fenómenos que le dan sentido. Las situaciones son otra forma de organizar los fenómenos que hace referencia al tipo de entorno al que pertenecen. Los fenómenos que son del tipo de reflector parabólico pueden referirse a situaciones personales (la antena parabólica de mi casa), laborales (los focos del edificio donde trabajo), científicas (un micrófono parabólico) y públicas (las antenas del sistema de telefonía móvil) (OCDE, 2003). Estos conceptos y sus relaciones configuran el significado de este organizador del currículo (ver figura 1, más adelante).

Conocimiento técnico

El análisis fenomenológico de un tema implica dos procedimientos: (a) la identificación de fenómenos que dan sentido al tema y (b) la organización de esos fenómenos. Cada uno de estos procedimientos involucra técnicas que surgen del conocimiento teórico del organizador del currículo. Para identificar fenómenos, se requieren técnicas que permitan distinguir aquellos fenómenos que corresponden al tema de aquellos que no corresponden. Establecer si el tema resuelve un problema relacionado con el fenómeno y determinar si el tema se usa en algún aspecto de ese fenómeno son dos técnicas que cumplen con ese propósito. Usamos estas técnicas para identificar algunos fenómenos que dan sentido a la función cuadrática.

Identificar otros fenómenos que sean "parecidos" a uno dado, desde la perspectiva del tema, y establecer en qué son parecidos es una técnica para caracterizar los fenómenos identificados, aproximarse a sus características estructurales y comenzar a abordar la identificación de contextos, como primer paso para organizar los fenómenos. Siguiendo con el ejemplo anterior de la función cuadrática, de esta forma identificamos los reflectores parabólicos como contexto que engloba diferentes tipos de fenómenos de la función cuadrática. La identificación de contextos implica entonces tres técnicas: (a) identificar los usos del tema; (b) establecer los tipos de problemas que el tema resuelve; y (c) determinar las características que son compartidas por los fenómenos que dan sentido al tema. Estas técnicas orientan la identificación de los fenómenos que se organizan en un mismo contexto.

Las características estructurales de los fenómenos pueden dar pistas sobre aquellos aspectos matemáticos del tema que organizan los fenómenos pertenecientes a un contexto. La identificación de la subestructura matemática que modeliza un contexto puede surgir de esta reflexión. Esto fue lo que hicimos al identificar la propiedad física que comparten los reflectores parabólicos y establecer su relación con la subestructura matemática que define las propiedades del foco de la parábola. Pero también es posible usar otra técnica: analizar la estructura conceptual del tema e identificar posibles subestructuras en ella, para establecer cuáles de esas subestructuras adquieren sentido —se usan, resuelven problemas— para, al menos, un fenómeno y de qué manera se relacionan con los contextos. Este sería el caso de identificar el modelo $x = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2$ como subestructura que organiza todos los fenómenos de movimiento de cuerpos en un campo de fuerzas uniforme.

Finalmente, se hace necesario desarrollar técnicas para presentar los resultados del análisis e incluir la organización de los fenómenos en términos de situaciones. En la figura 1, resumimos esquemáticamente las ideas clave e indicamos los lugares donde aparecen algunas de las técnicas del conocimiento técnico de la fenomenología (técnicas para identificar subestructuras, técnicas para identificar contextos o técnicas para establecer relaciones entre subestructuras y contextos, entre otras).

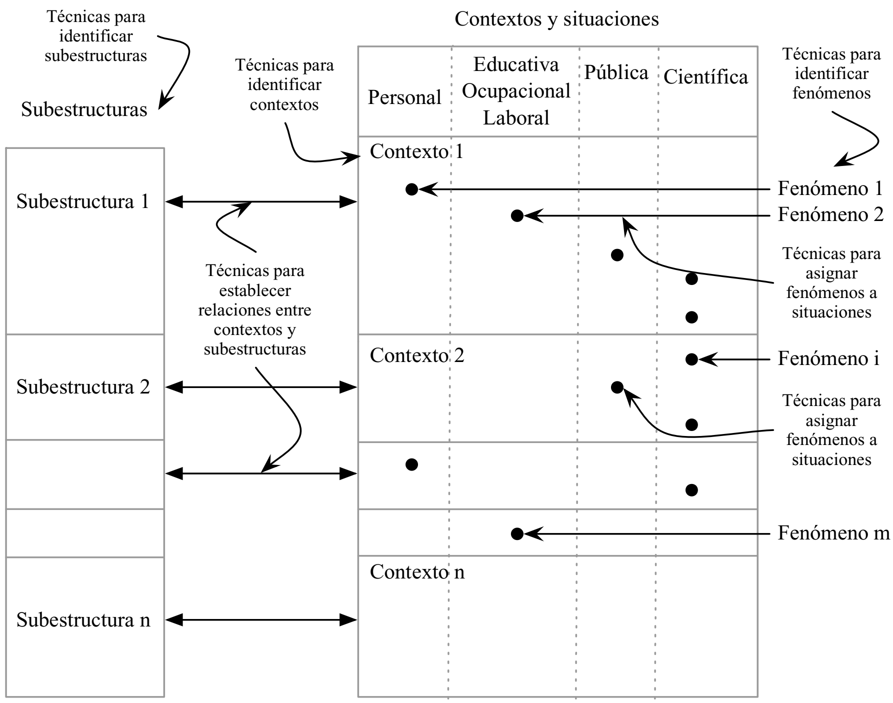


Figura 1. Ideas clave y técnicas del conocimiento técnico en el análisis fenomenológico

Para el ejemplo de la función cuadrática, una subestructura es aquella que establece las propiedades del foco de la parábola, que identificamos al reconocer las características estructurales de los reflectores parabólicos como contexto, en el que se incluyen como fenómenos los focos de los coches, siendo este un fenómeno ubicado en una situación pública.

Con referencia a este marco conceptual, el objetivo de investigación de este estudio consiste en identificar, describir y caracterizar las dificultades de aprendizaje que unos grupos de profesores en formación manifestaron en términos de las ideas clave que configuran el conocimiento teórico del análisis fenomenológico y de las técnicas que conforman su conocimiento técnico.

3. Método

En esta sección, describimos el tipo de investigación que realizamos, el contexto en el que desarrollamos el estudio, los sujetos participantes, y los procedimientos de recolección, codificación y análisis de la información.

3.1. *Tipo de investigación*

Con este estudio pretendemos contribuir al conocimiento de la comunidad en Educación Matemática sobre el aprendizaje del análisis fenomenológico de profesores en formación. Lo hacemos con base en un estudio de caso de carácter exploratorio y descriptivo. Es una investigación de corte naturalista (Erlandson, Harris, Skipper, & Allen, 1993) en la que la información surge de manera natural de un contexto de formación diseñado para contribuir al conocimiento de los participantes. En términos de los propósitos y los métodos de la investigación en Educación Matemática propuestos por Schoenfeld (2000), este trabajo (a) se enfoca al propósito aplicado de basarse en la comprensión de fenómenos de aprendizaje para contribuir a la mejora de la enseñanza y (b) presenta una "prueba de existencia", al proporcionar evidencias empíricas de un caso concreto de aprendizaje en una línea de investigación en Educación Matemática. Por estas razones, no pretendemos que los resultados de este estudio sean replicables, puesto que sería imposible restablecer todas las condiciones naturales del contexto de formación de donde surge la información. De la misma forma, no se pretende que los resultados sean extrapolables directamente a otros contextos. No obstante, este estudio contribuye al conocimiento de investigadores y formadores sobre aspectos concretos de los procesos de aprendizaje de profesores de matemáticas en formación.

3.2. *Contexto*

Realizamos el estudio en el contexto de la Maestría en Análisis Didáctico (MAD). Esta es una maestría de profundización en Educación Matemática ofrecida por la Universidad de los Andes en Bogotá (Colombia) para profesores de matemáticas en ejercicio de educación básica secundaria y educación media (de 11 a 16 años).

El programa de MAD está fundamentado en un modelo funcional de la formación de profesores de matemáticas y aborda el aprendizaje de los organizadores del currículo que configuran el análisis didáctico (Gómez y González, 2013a). El principal propósito de esta maestría es ofrecer oportunidades para que los profesores en formación puedan complementar y profundizar en el conocimiento didáctico necesario para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas de matemáticas (Gómez, Cañadas, Flores, González, Lupiáñez, Marín *et al.*, 2010). El análisis didáctico se utiliza como herramienta para que los profesores en formación analicen un tema de las matemáticas escolares, de tal forma que este análisis les sea útil para justificar el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica (para una descripción detallada del programa y de su fundamentación ver Gómez et al., 2010; Gómez y González, 2013a, 2013b; Gómez y Restrepo, 2010).

MAD tiene una duración de dos años y está compuesto por 8 módulos. Cada módulo está constituido por cuatro actividades. Los profesores que participan en MAD se organizan en grupos de 4 o 5 personas para trabajar las actividades que se les proponen. Cada grupo escoge un tema concreto de las matemáticas escolares sobre el que trabaja a lo largo del programa y tiene asignado un tutor, quien lo guiará en el trabajo. Los formadores presentan e introducen el contenido de cada módulo durante una semana presencial al comienzo de cada módulo y presentan las actividades a realizar a lo largo del módulo.

Cada actividad dura dos semanas. Para cada actividad, los profesores en formación elaboran un borrador y lo envían a su tutor por correo electrónico al final de la primera semana de trabajo. El tutor reacciona al trabajo por la misma vía. Los profesores en formación mejoran su trabajo con base en esos comentarios y preparan y realizan una presentación final al término de la segunda semana.

Los profesores que cursaron MAD 1 (2010-2011) se organizaron en 6 grupos y abordaron los siguientes temas de las matemáticas escolares: (a) números enteros, (b) introducción al lenguaje algebraico (dos grupos), (c) rectas en el plano y (d) ecuaciones trigonométricas (dos grupos). Las presentaciones finales de los futuros profesores en cada actividad del módulo 2 fueron presenciadas por la formadora responsable del módulo (segunda autora de este trabajo) y el coordinador de MAD 1 (primer autor de este trabajo). Las presentaciones se grabaron en vídeo. En este módulo, los grupos de profesores abordaron su tema de las matemáticas escolares a través de tres organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología. En este artículo, nos centramos en el último de los organizadores del currículo mencionados, al que se dedicó una de las actividades propuestas en el módulo.

3.3. *Sujetos*

Los sujetos participantes en la investigación fueron los 26 profesores de matemáticas matriculados en MAD 1. Todos eran profesores de secundaria en ejercicio en colegios públicos y privados de Colombia. La mayoría de ellos eran licenciados en Matemáticas y Física o en Matemáticas. Una quinta parte de ellos eran licenciados en educación básica con énfasis en Matemáticas. Todos eran menores de 40 años y se habían graduado hacía al menos 10 años.

3.4. *Recogida de información*

La actividad sobre análisis fenomenológico constituyó el ámbito en el que se recogió la información. Los objetivos que se pretendían con esta actividad eran los siguientes.

- Que los profesores dieran sentido a la fenomenología como organizador del currículo.
- Que los grupos de profesores realizaran el análisis fenomenológico de su tema.

En el texto que describe la actividad a los profesores en formación se solicitaba lo siguiente.

- Identificar y delimitar los fenómenos que dan sentido a los conceptos.
- Identificar los conceptos que organizan los fenómenos.
- Identificar las subestructuras matemáticas del tema que permiten organizar grupos de fenómenos.
- Establecer las relaciones entre los fenómenos y las subestructuras matemáticas.
- Organizar los grupos de fenómenos que comparten características estructurales mediante la identificación de contextos.
- Establecer las relaciones entre los contextos y las subestructuras matemáticas.
- Identificar las situaciones donde se utilicen las subestructuras matemáticas.

Al final de la primera semana de trabajo, los grupos de profesores en formación produjeron el borrador de la actividad en formato Word o PowerPoint. En el caso del formato Word, la extensión máxima era de 1000 palabras y para el formato PowerPoint, el documento se restringió 8 diapositivas. La información sobre la presentación final se obtuvo tanto del archivo PowerPoint, como del vídeo de la presentación.

3.5. *Acciones*

Con objeto de codificar y analizar las producciones de los grupos en la actividad, utilizamos la idea de acción. Una acción de un grupo de profesores en formación hace referencia a una actuación concreta que él realiza cuando se enfrenta al análisis de un tema haciendo uso de un organizador del currículo y que pone en evidencia en su producción textual. Las acciones deben ser observables en las producciones, surgen del análisis de la descripción del organizador del currículo y de codificaciones preliminares de los datos, y se organizan de acuerdo con las ideas clave que caracterizan su conocimiento teórico y con las técnicas que configuran su conocimiento técnico. Dado que las acciones se pueden ejecutar sobre cualquier tema de las matemáticas escolares y que las producciones de todos los grupos para cualquier tema se codifican con esas acciones, las producciones se pueden comparar en términos de esas acciones, independientemente del tema de las matemáticas escolares que trabajen los grupos.

En la descripción del análisis fenomenológico que presentamos en el marco conceptual, mencionamos las ideas clave para este tipo de análisis: fenómenos, contextos, subestructuras, relaciones entre subestructuras y contextos, y situaciones. Por ejemplo, "Identificar fenómenos" es una acción que se refiere al conocimiento teórico de la idea de fenómeno, mientras que "Organizar fenómenos con subestructuras" es una acción que se refiere al conocimiento técnico de la idea de subestructura. Con base en el marco conceptual, los requerimientos de la actividad y una codificación previa de las producciones de los grupos, desglosamos las diferentes acciones para cada una de las ideas clave implicadas en el análisis fenomenológico y obtuvimos el listado que recogemos en la tabla 1, organizado según la idea clave con la que se encuentran vinculadas. Representamos cada acción por medio de un código en el que el primer carácter es un guión que solamente aparece cuando la acción depende de otra acción[1], el segundo hace referencia a la idea clave con la que se relaciona (fenómeno [F], contexto [C], subestructura [B], relación [R] o situación [S]), el tercero distingue su correspondencia con el conocimiento teórico (O) o conocimiento técnico (C), y el cuarto identifica el orden del código dentro de la idea clave y el tipo de conocimiento. En la tabla I recogemos el listado de acciones y el código correspondiente. Por ejemplo, la acción "Identificar fenómenos" tiene el código FO1 porque corresponde a la idea de fenómeno (F), se refiere al desarrollo del conocimiento teórico (O) y es la primera acción relativa a fenómenos (1).

3.6. *Codificación*

Los dos autores de este artículo codificamos los documentos del borrador y las presentaciones finales de la actividad sobre análisis fenomenológico. En la codificación, utilizamos las acciones anteriores, atendiendo a si, en un documento, se realizaba o no la acción, incluyendo además comentarios que consideramos

---

[1] Una acción depende de otra si la información que se produce al realizar la segunda es necesaria para realizar la primera. Por ejemplo, "Utilizar apropiadamente los usos" (-FC5) depende de que, previamente, se hayan identificado usos (FO4).

[2] En este caso, los investigadores identificamos todos los contextos posibles. Así, esta acción hace referencia a que los profesores en formación identifican la mayoría de esos contextos posibles para el tema en el que trabajan.

TABLA I
Acciones

Acción	*Código*
Fenómenos	
Identificar fenómenos	FO1
Identificar fenómenos válidos	FO2
Identificar problemas	FO3
Usar problemas para identificar fenómenos	-FC1
Utilizar al menos un problema para identificar al menos un fenómeno	-FC2
Utilizar apropiadamente los problemas	-FC3
Identificar usos	FO4
Utilizar los usos para identificar fenómenos	-FC4
Utilizar apropiadamente los usos	-FC5
Contextos	
Identificar contextos	CO1
Identificar contextos válidos	-CO2
Identificar una proporción de, al menos, el 80% de todos los contextos posibles[2]	-CC1
Identificar características estructurales	CO3
Usar características estructurales para identificar fenómenos	-CC2
Organizar fenómenos con contextos	-CC3
Subestructuras	
Identificar subestructuras	BO1
Identificar subestructuras válidas	-BO2
Hacer referencia a la estructura conceptual	BO3
Describir las subestructuras	-BC1
Organizar fenómenos con subestructuras	-BC2
Relación de subestructuras y contextos	
Establecer relaciones	-RO1
Establecer relaciones válidas	-RO2
Establecer todas las relaciones	-RO3
Justificar las relaciones entre los principios y las características estructurales	-RO4
Proponer justificaciones válidas	-RO5
Situaciones	
Proponer situaciones	SO1
Proponer situaciones válidas	-SO2
Usar PISA para clasificar	-SC1
Usar bien PISA	-SC2
Usar alguna clasificación	SC3

relevantes para los objetivos de este trabajo. Cada uno de los dos investigadores cumplimentamos la información de manera independiente, y comparamos y discutimos los resultados para lograr acuerdos consistentes y compartidos. Hecho esto, revisamos la información para obtener la versión final de la codificación de la información.

A continuación, presentamos un ejemplo de la codificación para una parte del trabajo de uno de los grupos. El grupo en cuestión trabajó las razones trigonométricas y en el borrador elaboraron esta parte del trabajo mediante tablas. Para la presentación final (ver ejemplo en figura 2), se pueden observar varias subestructuras (figura 2, columna izquierda), su correspondencia uno a uno con sus contextos (figura 2, columna central), y el listado de fenómenos que se relacionan con cada par subestructura-contexto. Por ejemplo, para el contexto "Resolución de triángulos cualesquiera dados dos ángulos y el lado opuesto", recogen el rastreo de un satélite y la distancia de la tierra a la luna como fenómenos concretos. Como se observa en la parte inferior de la figura 2, este grupo utilizó las situaciones según la clasificación de PISA (OCDE, 2003). El proyecto PISA define situación como "la parte del mundo del estudiante en la que se localizan los ejercicios que se le plantean" (p. 35) y establece cuatro categorías para clasificar las situaciones: personal, educativa, pública y científica. Para los fenómenos presentados en el primer contexto, consideran que se tratan de situaciones científicas.

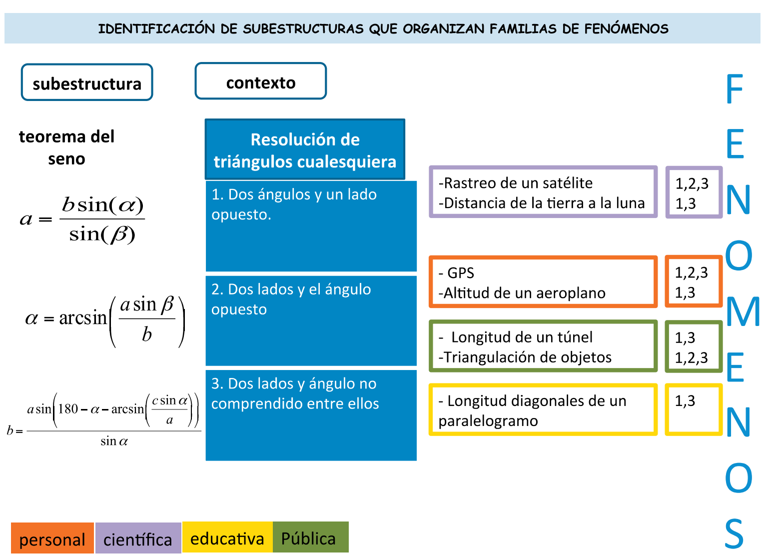


Figura 2. Tabla-resumen de fenómenos de razones trigonométricas

A partir de la información de la figura 2 y con base en el trabajo de este grupo y la descripción de las acciones de la tabla 1, codificamos esta producción con los códigos FO1, FO2, CO1, -CO2, -CC1, -CC3, BO1, -BC2, -RO1, -RO2, -RO3 y SO1. Por ejemplo, en relación con los fenómenos, este grupo puso en evidencia la identificación de fenómenos válidos para el contenido matemático (FO1 y FO2). En lo que concierne a los contextos, identificó contextos válidos (CO1 y -CO2), reconoció una proporción de contextos superior al 80% de entre los posibles (-CC1) y organizó fenómenos con los contextos identificados para ese tema (-CC3).

3.7. *Análisis*

A partir de los datos obtenidos de la codificación, establecimos cuántos grupos realizaron cada una de las acciones, tanto en el borrador como en la presentación. Ubicamos las acciones en una tabla (ver tabla II), siendo una entrada el número de grupos (de 0 a 6) que podían realizar una acción en el borrador; y la otra entrada el número de grupos que realizaban la acción en la presentación final. Por ejemplo, la acción "Identificar fenómenos válidos" (FO2) fue realizada por tres grupos en el borrador y cinco grupos en la presentación final. Por lo tanto, se ubica en la celda (3,5) de la tabla II.

Organizamos la información y los resultados en torno a las ideas clave que configuran el análisis fenomenológico (fenómeno, contexto, subestructura, relaciones subestructuras-contextos y situaciones). A partir del número de grupos que lograron superar una determinada acción definimos la dificultad de una acción para los grupos. Consideramos que una idea clave es difícil si como máximo dos grupos lograron realizar la acción, ya sea en el borrador o la presentación; es medianamente difícil si la mitad de los grupos lograron realizarla en el borrador y la presentación; es menos difícil si tres o cuatro grupos lograron realizarla en el borrador y en la presentación; y es fácil si cinco o seis grupos lograron realizarla en el borrador y en la presentación. Consideramos que se ha producido una *progresión* cuando el número de grupos que realizan una determinada acción es mayor en la presentación que en el borrador de la actividad. La progresión puede ser un indicador de que la ayuda del tutor pudo contribuir a resolver esas dificultades. Una *regresión* se produce cuando el valor es menor en la presentación que en el borrador.

4. Resultados

La tabla II resume los resultados obtenidos. Las filas y las columnas indican el número de grupos que realizaron una acción en el borrador y en la presentación, respectivamente. Por ejemplo, en la celda (3,5) de la tabla, se observa que tres grupos propusieron fenómenos válidos (FO2) en el borrador y cinco lo hicieron en la presentación final. Dado que hemos considerado que una acción fue difícil si pocos grupos pudieron realizarla tanto en el borrador como en la presentación, las acciones difíciles se encuentran en las primeras cuatro filas y columnas de la tabla. Hemos delimitado esa zona de la tabla con una línea gruesa de color negro. Las acciones más difíciles (-RO4 y -RO5) se ubican en la celda (0,0) de la tabla. Análogamente, las acciones fáciles se ubican en la última fila y columna de la tabla —celda (6,6)—. Hemos identificado esta celda con una línea gruesa gris claro. Diferenciamos estas acciones de aquellas que se encuentran en la mitad de la tabla, en las celdas (3,5) y (5,5), que denominamos medianamente difíciles, y a las que hemos asignado un borde grueso de color gris oscuro. Las progresiones se encuentran en las celdas (0,3) y (3,5). Se identifican en la tabla por un borde punteado. Finalmente, las regresiones se encuentran en las celdas (3,1) y (3,2) y han sido identificadas en la tabla con un borde discontinuo.

TABLA II

Dificultad de las acciones

	Presentación						
Br.	0	1	2	3	4	5	6
0	-RO4, -RO5			CS3, -CT2			
1		FO4, -FC4 -FC5					
2			FO3, -FC1 -FC2, -FC3				
3		-RO2	-BO2	BO3, -BC1		FO2,-RO3 -CO2,-CC1	
4							
5						SO1, -SO2 -SC1, BC2 -RO1, -SC2	
6							FO1, CO1 -CC3, BO1, SC3

Nota. Br. = borrador.

Analizamos estos resultados con base en la descripción de las acciones de la tabla I y atendiendo a las zonas que hemos identificado en la tabla II. Primero, establecemos los resultados en términos de la dificultad de las acciones. Después, analizamos las progresiones y, finalmente, describimos las regresiones.

Hay 15 acciones que resultaron difíciles para los grupos. Aunque cinco grupos establecieron relaciones entre los contextos y las subestructuras, tres propusieron relaciones válidas en el borrador y solamente uno en la presentación. Este grupo no justificó esas relaciones en términos de principios y características estructurales. Solamente un grupo identificó usos del tema y los utilizó para identificar fenómenos. Los tres grupos que distinguieron características estructurales en la presentación, las usaron para identificar fenómenos. Solamente dos de ellos justificaron apropiadamente ese uso. Aunque todos los grupos distinguieron contextos en el borrador y en la presentación, tres propusieron contextos válidos en el borrador y cinco lo hicieron en la presentación. De la misma forma, aunque cinco grupos establecieron relaciones entre contextos y subestructuras en el borrador y en la presentación, tres de ellos establecieron relaciones válidas en el borrador y solamente uno de ellos lo hizo en la presentación. Solamente dos grupos identificaron problemas en el borrador y en la presentación y los usaron apropiadamente para identificar fenómenos. Aunque todos los grupos distinguieron subestructuras en el borrador y en la presentación, y cinco de ellos las usaron para organizar los fenómenos, tres de ellos hicieron referencia a la estructura conceptual en los dos documentos y describieron las subestructuras correspondientes. De esos cinco grupos, tres distinguieron subestructuras válidas en el borrador y dos en la presentación. Solamente un grupo organizó los fenómenos con la ayuda de las subestructuras. Cinco grupos propusieron situaciones de forma adecuada con base en la clasificación de PISA.

Se aprecian progresiones en el trabajo con las características estructurales. Ningún grupo las distinguió en el borrador. No obstante tres de ellos lo hicieron y las usaron para identificar fenómenos en la presentación. También encontramos varias regresiones. Tres grupos propusieron contextos válidos en el borrador, pero solamente uno lo hizo en la presentación. De la misma forma, tres grupos presentaron subestructuras válidas en el borrador, pero solamente dos lo hicieron en la presentación.

5. Interpretación de los resultados

Los resultados que presentamos en el apartado anterior nos llevan a establecer las dificultades que los grupos manifestaron al realizar el análisis fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares. Abordamos la dificultad de una idea clave atendiendo a varios criterios. El primero de ellos, que se evidencia en la tabla II, tiene que ver con el número de grupos que realizaron las acciones correspondientes a cada una de las ideas clave consideradas en el análisis fenomenológico y que hemos analizado tanto en el borrador como en la presentación. El segundo criterio tiene en cuenta el número de grupos que realizaron la acción de manera válida en el borrador y en la presentación. En ambos casos establecimos una escala de dificultad que dependía del número de grupos que no realizó una acción en el borrador y sí la realizó en la presentación. El tercer criterio de dificultad se refiere al caso en el que se constaten regresiones para la acción. A continuación, interpretamos los resultados que presentamos en el apartado anterior en términos de estos criterios.

La idea de fenómeno es fundamental para la realización del análisis fenomenológico y por ello se solicitó a los grupos que identificaran fenómenos relacionados con su tema y que los organizaran según contextos y subestructuras. Todos los grupos identificaron fenómenos para su tema en el borrador. Sin embargo, sólo la mitad de ellos distinguieron fenómenos válidos. Esto pone de manifiesto que algunos grupos tuvieron dificultades con esta idea clave. Esto se aprecia, por ejemplo, en el hecho de que dos grupos confundieron la idea de fenómeno con la idea de situación y de sistema de representación, respectivamente. Identificamos otro ejemplo en un grupo que escogió fenómenos de temas diferentes al suyo. Todos los grupos menos uno propusieron fenómenos válidos en la presentación, poniendo en evidencia que los grupos que manifestaron dificultades en el borrador pudieron resolverlas. La formadora propuso dos técnicas para identificar fenómenos: (a) mediante usos y (b) mediante problemas. Solo uno de los grupos utilizó los usos del tema para identificar fenómenos y dos grupos utilizaron los problemas para el mismo fin, tanto en el borrador como en la presentación. Dado que, pese a no haber utilizado las estrategias presentadas en la instrucción, los grupos lograron identificar fenómenos, concluimos que las estrategias que la formadora presentó no resultaron útiles para los grupos.

La actividad requería que los grupos distinguieran contextos y los usaran para organizar los fenómenos. Todos los grupos lo hicieron en el borrador y en la presentación. No obstante, solamente la mitad de los grupos propuso contextos válidos en el borrador. Otros dos grupos lograron hacerlo en la presentación. Por consiguiente, desde la perspectiva del conocimiento teórico de las ideas clave, los grupos manifestaron un nivel de dificultad para la idea de contexto similar al que se constató para la idea de fenómeno. Aunque todos los grupos lograron organizar los fenómenos en contextos, ninguno de ellos utilizó la idea de característica estructural para hacerlo en el borrador y solamente la mitad de ellos lo hizo en la presentación. Este resultado pone en evidencia la dificultad de los grupos con la idea de característica estructural.

La idea de subestructura también generó dificultades. Aunque todos los grupos identificaron subestructuras para su tema, la mitad de ellos identificó subestructuras válidas en el borrador y dos grupos lo hicieron en la presentación final. Por lo tanto, se observa una regresión para esta idea clave, que pone de manifiesto la dificultad de los grupos con el conocimiento teórico de la noción de subestructura. Los grupos que identificaron subestructuras válidas son los mismos que hicieron referencia a la estructura conceptual. Por otra parte, cinco grupos organizaron los fenómenos mediante las subestructuras, tanto en el borrador como en la presentación. Puesto que al menos la mitad de los grupos propuso subestructuras que no eran válidas, la organización que estos grupos hicieron de los fenómenos tampoco era válida. Estos resultados indican que los grupos tuvieron dificultades importantes con el conocimiento teórico de la idea de subestructura y, por ende, con su conocimiento técnico para organizar fenómenos.

Establecer la relación entre subestructuras y contextos es una acción que depende de que los grupos hayan establecido subestructuras y contextos válidos, y de que las relaciones que establecen sean válidas. Aunque cinco grupos intentaron realizar esta acción en el borrador y la presentación, de los tres grupos que presentaron subestructuras válidas en el borrador, ninguno propuso relaciones válidas en ese documento. Por su parte, uno de los dos grupos que presentaron subestructuras válidas en la presentación, propuso relaciones válidas en ese documento. Estos resultados muestran que los grupos manifestaron claras dificultades con la idea de relación entre subestructuras y contextos, tanto por su dependencia de otras ideas, como por la dificultad de la idea en sí misma.

Los grupos no manifestaron dificultades con la idea clave de situación. Cinco grupos identificaron situaciones válidas para sus temas, según la clasificación de PISA presentada por la formadora, tanto en el borrador, como en la presentación final. El otro grupo utilizó otra clasificación de situaciones. Todos los grupos organizaron apropiadamente los fenómenos en las clasificaciones propuestas.

El análisis anterior permite clasificar las ideas clave del análisis fenomenológico de acuerdo con la dificultad que manifestaron los grupos. La idea de situación no presentó dificultades para los grupos. Los grupos manifestaron un nivel de dificultad similar con el conocimiento teórico de las ideas de fenómeno y contexto. No obstante, ellos pusieron en evidencia una dificultad mayor a la hora de caracterizar los contextos en términos de sus características estructurales. Las mayores dificultades se presentaron con las ideas de subestructura y de relación entre subestructuras y contextos.

6. Síntesis y conclusiones

El objetivo de investigación de este estudio consistió en establecer y caracterizar las dificultades que seis grupos de profesores en formación manifestaron cuando analizaron un tema de las matemáticas escolares desde la perspectiva del análisis fenomenológico en un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. Para lograr este objetivo, asumimos una posición acerca del aprendizaje de quienes participan en planes de formación basados en el modelo del análisis didáctico y, a partir de ese modelo de aprendizaje, describimos el conocimiento teórico y el conocimiento técnico de este organizador del currículo que se esperaba que los grupos de profesores en formación desarrollaran durante su formación. Con base en esta descripción, en la información que se proporcionó durante la instrucción, en los requisitos de la actividad que los grupos debían realizar y en codificaciones preliminares de las producciones de los grupos, establecimos un lista de acciones que los grupos podían realizar y hacer explícitas en sus producciones —borrador y presentación— al abordar la actividad. Organizamos estas acciones atendiendo al conocimiento teórico y al conocimiento técnico de las ideas clave que configuran el análisis fenomenológico. Para cada acción, establecimos el número de grupos que la realizó en el borrador y en la presentación. Este análisis nos permitió establecer y comparar la dificultad de las acciones. Con base en esta información, establecimos las dificultades que los grupos pusieron de manifiesto para cada una de las ideas clave involucradas. Encontramos que los grupos no manifestaron dificultades con la idea de situación, manifestaron algunas dificultades con las ideas de fenómeno y contexto —particularmente en relación con la idea de característica estructural— y pusieron de manifiesto serias dificultades con la idea de subestructura y su relación con la noción de contexto.

El estudio fue de carácter exploratorio y descriptivo. No obstante, podemos formular conjeturas acerca de las razones por las que los grupos manifestaron diferentes niveles de dificultad para las nociones que tendrán que ser contrastadas en investigaciones posteriores. La primera tiene que ver con la complejidad de su conocimiento teórico. Mientras que el significado de algunas ideas clave —como fenómeno o contexto— involucra un número reducido de conceptos, otras ideas clave —como la de subestructura o la que se refiere a la relación entre subestructuras y contextos— involucran un mayor número de conceptos y de relaciones entre ellos. Y, en la medida en que el conocimiento teórico de una idea clave es más complejo, también lo es su conocimiento técnico. Adicionalmente, el significado de algunas ideas clave involucra otras ideas clave del análisis fenomenológico, lo que genera la dependencia de unas acciones con otras. Esto implica que la realización correcta de una acción de este tipo depende de que se hayan realizado correctamente las acciones de las que depende. Por ejemplo, mientras que la idea de fenómeno no depende de otras ideas clave relacionadas con el análisis fenomenológico, la relación de subestructuras y contextos depende de la identificación de subestructuras, contextos y del establecimiento de relaciones entre ellos. También, para la muestra considerada, observamos que algunos profesores en formación tienden a usar el significado del lenguaje cotidiano e ignorar el significado técnico de algunos de los términos que caracterizan el conocimiento teórico de las ideas clave. Por otro lado, es posible conjeturar que la dificultad en la realización del análisis fenomenológico depende del tema de las matemáticas escolares que se esté analizando. Es posible que haya temas de las matemáticas escolares para los que la identificación de fenómenos, contextos y subestructuras sea más evidente que para otros. En este estudio, no hemos explorado empíricamente esta conjetura para los temas en los que trabajaron los seis grupos.

Los resultados presentados en este artículo invitan a la reflexión sobre la instrucción llevada a cabo con los grupos de profesores en formación (Adler & Jaworski 2009), en el sentido del propósito práctico de la investigación en Educación Matemática propuesto por Schoenfeld (2000). Conocer las ideas clave que generan más dificultades en los profesores identifica aquellas cuestiones que se deben atender con mayor atención en su formación. Además, desde la perspectiva del diseño y el desarrollo de la instrucción en el programa de formación, la distinción entre su conocimiento teórico y su conocimiento técnico parece clave. El aprendizaje de un organizador implica tanto entender su significado como conocer las técnicas que permiten poner en práctica ese conocimiento teórico. La instrucción debe promover el desarrollo coordinado de esos dos tipos de conocimiento. Los ejemplos parecen también jugar un papel importante. Mientras que en las sesiones de instrucción se presentaron ejemplos en los que las acciones estaban realizadas adecuadamente, los resultados nos llevan a resaltar la importancia de introducir ejemplos en los que las acciones no estén correctamente realizadas. Conjeturamos que la presentación de contraejemplos puede contribuir al desarrollo del conocimiento teórico y técnico de las nociones.

En este trabajo, hemos propuesto un procedimiento para hacer operacional las ideas de conocimiento teórico y conocimiento técnico de un organizador del currículo, con el propósito de analizar las actuaciones de los grupos de profesores en formación y describir y caracterizar algunos aspectos de su proceso de aprendizaje. Este procedimiento utiliza la idea de “acción” como elemento central para la codificación y análisis de las producciones de los grupos. Una acción se refiere a una actuación concreta que los grupos pueden realizar. Las acciones deben ser observables en las producciones, surgen del análisis de la descripción conceptual del organizador del currículo y de codificaciones preliminares de los datos, y se organizan de acuerdo con las ideas clave que caracterizan su conocimiento teórico y con las técnicas que configuran su conocimiento técnico. El análisis de la codificación de las producciones en términos de acciones nos permitió establecer la dificultad que los grupos manifestaron para cada noción y comparar los niveles de dificultad de las diferentes ideas clave. Hemos mostrado que el esquema metodológico que utilizamos permite describir algunos aspectos relevantes del aprendizaje de los grupos de profesores en formación a partir de un conjunto reducido de manifestaciones de esas actuaciones. Consideramos que esta es una contribución metodológica de esta investigación.

Este artículo complementa conceptual y metodológicamente otros estudios que estamos realizando. Mientras que este se centra en el conocimiento teórico y el conocimiento técnico del análisis fenomenológico y focaliza su atención en las dificultades que los grupos manifestaron al trabajar con ese organizador del currículo en términos de esos dos tipos de conocimiento, otros estudios tienen en cuenta el conocimiento práctico del organizador del currículo y focalizan su atención en cómo los grupos desarrollan los tres tipos de conocimiento correspondientes (Arias, 2011; González, Gómez y Restrepo, 2015; Polo, González, Gómez y Restrepo, 2011; Suavita, 2012).

Agradecimientos

Este proyecto ha sido apoyado parcialmente por el proyecto EDU2012-33030 del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España.

Referencias bibliográficas

Adler, J. & Jaworski , B. (2009). Public writing in the field of mathematics teacher education. In R. Even y D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 249-254). Dordrecht, Holanda: Springer. doi:10.1007/978-0-387-09601-8_26

Arias, M. (2011). *Actuación de tutores en un programa de formación de postgrado para profesores de matemáticas* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.

Beijaard, D., Korthagen, F., & Verloop, N. (2007). Understanding how teachers learn as a prerequisite for promoting teacher learning. *Teachers and Teaching, 13*(2), 105-108. doi: 10.1080/13540600601152298

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher, 33*(8), 3-15. doi: 10.3102/0013189X033008003

Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 291-310). New York, NY: MacMillan.

Cavanagh, M. S., & Garvey, T. (2012). A professional experience learning community for pre-service secondary mathematics teachers. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(12), 57-65. doi: 10.14221/ajte.2012v37n12.4

Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 281-288). Morelia, México: PME.

Cooney, T. J. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby, & K. Wallby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg, Suecia: National Center for Mathematics Education.

Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L., & Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry. A guide to methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47235-X

Gess-Newsome, J., & Lederman, N. G. (Eds.). (2001). *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education*. Dordrecht, Holanda: Kluwer. doi: 10.1002/sce.10098

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Especial), 78-89.

Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiáñez, J. L., Marín, A., et al. (2010). Máster en Educación Matemática en Colombia. En M. T. González, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gómez, P. & González, M. J. (2008). Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 27, Monterrey. Obtenido de http://tsg.icme11.org/document/get/392

Gómez, P. & González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, 223-235. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/431/1/GomezP09-2909.PDF

Gómez, P. y González, M. J. (2013a). Papel del análisis didáctico en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas. En G. Obando (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 656-674). Medellín, Colombia: ASOCOLME.

Gómez, P. y González, M. J. (2013b). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Formación de profesores, innovación curricular y metodología de investigación* (pp. 121-139). Granada, España: Comares.

Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (2010). Organización del aprendizaje en programas funcionales de formación de profesores de matemáticas. En G. García (Ed.), *11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 22-32). Bogotá, Colombia: CENGAGE Learning.

González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434.

González, M. J. y Gómez, P. (2014). Conceptualizing and describing teachers' learning of pedagogical concepts. *Australian Journal of Teacher Education*, *39*(12), 13-30. doi: 10.14221/ajte.2014v39n12.2

González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (en prensa). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, *370*, 71-95. doi: 10.4438/1988-592X-RE-2015-370-297

Hill, H. C. (2011). The nature and effects of middle school mathematics teacher learning experiences. *Teachers College Record, 113*(1), 205-234.

Hurrell, D. P. (2013). What teachers need to know to teach mathematics: an argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education, 38*(11), 54-64. doi: 10.14221/ajte.2013v38n11.3

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia. Obtenido de http://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf

OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana. Obtenido de http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

Polo, I., González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (2011). Argumentos que utilizan los futuros profesores cuando seleccionan tareas matemáticas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 491-502). Ciudad Real, España: SEIEM.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society, 47*(3), 641-649. doi: 10.1007/0-306-47231-7_22

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Suavita, M. A. (2012). *Aprendizaje de profesores sobre el organizador del currículo hipótesis de aprendizaje* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., & O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, *4*(4), 133-142.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal. Realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 25*(1), 89-108. doi: 10.1007/978-94-017-3377-9_6

Autores

Pedro Gómez. Universidad de los Andes, Colombia. argeifontes@gmail.com

María C. Cañadas. Universidad de Granada, España. mconsu@ugr.es

M. Pedro Huerta, Patricia I. Edo, Rubén Amorós, Joaquín Arnau

UN ESQUEMA DE CODIFICACIÓN PARA EL ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Encoding scheme for the analysis of resolutions of conditional probability problems

RESUMEN

En este trabajo proponemos un esquema de variables para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. Se consideran tres variables principales: las variables del enfoque, del proceso y del producto o resultado, las cuales describen aquello que el resolutor hace desde que lee el enunciado del problema hasta que produce un resultado. Estas tres variables principales pueden ser explicadas por medio de no menos de 15 variables secundarias, la mayoría de ellas dicotómicas.

PALABRAS CLAVE:

- *Resolución de problemas*
- *Probabilidad condicional*
- *Variables del enfoque*
- *Variables del proceso*
- *Variables del producto*

ABSTRACT

In this article, a scheme of variables is proposed for analysing resolutions of conditional probability problems. Three main variables are considered, which we call: the approach variable, the process variable and the product variable. These variables try to describe solvers' behaviour since the moment they start reading the text of a problem up to the moment they give an answer. At least 15 secondary variables, being most of them dichotomous, can be defined to explain those main variables.

KEY WORDS:

- *Problem solving*
- *Conditional probability*
- *Approach variables*
- *Process variables*
- *Product variable*

RESUMO

Neste trabalho, propomos um esquema de variáveis para a análise das resoluções de problemas de probabilidade condicional. Consideram-se três variáveis principais: a variável do enfoque, a do processo e a do produto ou resultado, as quais descrevem aquilo que o resolvedor faz desde que lê o enunciado do problema até que produz um resultado. Estas três variáveis principais podem ser explicadas por, pelo menos, qinze variáveis secundárias, a maioria delas dicotómicas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Resolução de problemas*
- *Probabilidade condicional*
- *Variável do enfoque*
- *Variável do processo*
- *Variável do produto ou resultado*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (3): 335-362.
Recepción: Septiembre 18, 2013 / Aceptación: Octubre 27, 2014. DOI: 10.12802/relime.13.1934

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous vous proposons un système de variables pour l'analyse des résolutions des problèmes de probabilité conditionnelle. Trois principales variables sont considérées: les variables de l'approche, les variables de processus et les variables de produit, lesquelles décrivent ce qui fait le sujet depuis qu'il lit l'énoncé du problème jusqu'à ce qu'il produise un résultat. Ces trois variables principales peuvent s'expliquer par pas moins de 15 variables secondaires, la plupart d'entre elles dichotomiques.

MOTS CLÉS:

- *Résolution de problèmes*
- *Les probabilités conditionnelles*
- *Les variables d'approche*
- *Les variables de processus*
- *Les variables du produit*

1. Introducción

Desde que la probabilidad y la estadística forman parte de los programas escolares y su presencia en los currículos se ha generalizado en todo el mundo, el número de investigaciones y el interés por abordar aspectos sobre su enseñanza y aprendizaje han ido en aumento (Jones & Thornton, 2005). En particular, la probabilidad ha pasado de ser objeto de investigación casi exclusivo de la psicología a ser objeto de interés para los educadores matemáticos. Uno de los objetos más estudiados, tanto por la psicología como por los educadores matemáticos, es la probabilidad condicional. Para la psicología el centro de interés ha sido el estudio de los sujetos y los mecanismos que estos ponen en marcha para emitir juicios subjetivos sujetos a incertidumbre sobre determinados sucesos. Digamos que, en el pasado, se han dedicado muchos esfuerzos con el fin de averiguar los mecanismos por los cuales los sujetos asignan una cantidad como la medida objetiva o subjetiva de la realización de un suceso. Pero el estudio de estos procesos cognitivos no puede quedarse ahí y ser ajeno al estudio del comportamiento que tienen los sujetos (ahora resolutores de problemas) cuando la probabilidad condicional, siendo una cantidad, se ve implicada en una red compleja de relaciones con otras cantidades, esto es, cuando esas cantidades y sus relaciones son utilizadas en un contexto de resolución de problemas. Desafortunadamente, hay muy pocos trabajos de investigación que aborden esta problemática, tal vez por falta de tradición o por no disponer de una metodología adecuada que permita su estudio sistemático. En cambio gran cantidad de estudios utilizan a menudo problemas ampliamente conocidos y usados por los investigadores, por ejemplo The Taxi Cab Problem o The Disease Problem, considerados ya en Tversky y Kahneman (1982), centrándose en medir el éxito en la obtención del resultado correcto, sin informar sobre aspectos que tienen que ver con el proceso de resolución (estrategias de resolución, errores y dificultades), y su dependencia de aspectos relacionados con la tarea propuesta.

Por el contrario, nosotros estamos interesados en lo que ocurre durante el proceso de resolución del problema y no solo en el éxito o el fracaso. Es decir, estamos interesados en la observación, en detalle, del comportamiento de un resolutor a lo largo del proceso de resolución y de la influencia que pudieran tener las variables de la tarea, en el sentido de Kulm (1979), en dicho comportamiento. Para ello, se necesita disponer de un número suficiente de variables explicativas que faciliten la identificación de estrategias de resolución con éxito, errores y dificultades. Estas variables serán, a buen seguro, dependientes de algunas o de todas las variables de la tarea consideradas. Éste es el objetivo principal de este trabajo: proporcionar un conjunto, posible y viable, de variables dependientes que permitan explicar la actuación de cualquier resolutor, así como una manera de codificación de las mismas para su posterior tratamiento, ya sea cualitativo o cuantitativo.

2. Antecedentes

Hasta donde nosotros sabemos, muy pocos artículos abordan de un modo sistemático y metódico la investigación de aspectos relacionados con la resolución de problemas de probabilidad, en los que se muestre la metodología de investigación seguida y en la que se citen las variables que se han considerado y la manera en la que se han codificado para su posterior tratamiento. Una investigación así, que comparte con la nuestra elementos teóricos, como el modelo de fases de Polya, y la consideración de variables dependientes, en el sentido de Kulm (1979), se puede encontrar en Corter y Zahner (2007) y Zahner y Corter (2010). Lo que nos separa de estos investigadores es, de una parte, los problemas sobre los que se investiga: problemas de probabilidad de cualquier tipología (incluido algún caso de probabilidad condicionada) en Zahner y Corter (2010) y los *problemas ternarios de probabilidad condicional* (Cerdán y Huerta, 2007), escolares y de enunciado verbal (Lonjedo, Huerta & Carles, 2012) en nuestras investigaciones; de otra, la codificación de las variables que describen el proceso de resolución, que en Zahner y Corter (2010) se centran en los sistemas de representación y en los métodos de cómputo de la probabilidad pedida, y que en el nuestro se considera el proceso completo de resolución de los problemas, en relación con todas sus fases, desde que el estudiante se enfrenta al problema hasta que redacta la respuesta a la pregunta formulada. Otras investigaciones que, por ejemplo, abordan la comprensión de la probabilidad condicional se limitan a considerar aspectos puntuales de las resoluciones, generalmente el éxito o el fracaso, interpretándolos en términos de alguna de las variables de la tarea propuesta. No sería razonable citar la multitud de investigaciones en las que se da este fenómeno, que desde la perspectiva de la investigación en resolución de problemas constituye una cierta debilidad metodológica (Huerta, 2009).

La investigación en resolución de problemas comienza con el análisis de aquellos problemas que son objeto de investigación y que proporcionan las variables independientes. Así, hablamos de problemas que llamamos *ternarios de probabilidad condicional* y que se caracterizan por ser problemas escolares, de probabilidad condicional, de enunciado verbal, formulados utilizando el menor número posible de cantidades conocidas, tres, y que permiten proporcionar una respuesta a una cantidad desconocida por la que se pregunta. Todas estas cantidades son convenientemente escogidas entre probabilidades marginales, conjuntas o de intersección y condicionales (Cerdán y Huerta, 2007; Huerta, 2014). En estos problemas, siempre se menciona al menos una probabilidad condicionada, ya sea como cantidad conocida o desconocida o como ambas. Más adelante, en el apartado 4 pueden verse ejemplos de estos problemas.

Son problemas que se clasifican en cuatro familias y veinte subfamilias así que proporcionan una primera variable independiente asociada a la tarea: la variable estructura (Huerta, 2009). Esta variable da cuenta del tipo de datos conocidos y desconocidos con el que se formula el problema.

Como problemas verbales, siempre están formulados en algún contexto particular (Carles & Huerta, 2007) del que se insta a una situación más general como las descritas en Henry (2005). El contexto, como variable independiente de la tarea, siempre habrá que tenerlo en cuenta para el análisis de las actuaciones de los resolutores, como en Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo (2009).

Suele decirse que los resolutores abordan mejor las tareas en las que se implican probabilidades condicionales cuando los datos conocidos se expresan en términos de frecuencias condicionales y porcentajes (Jones, Langrall & Mooney, 2007; Watson & Kelly, 2007) o frecuencias naturales (Hoffrage, Gigerenzer, Krauss & Martignon, 2002). Siendo probablemente el formato de expresión de las cantidades conocidas y desconocidas un factor influyente en el éxito en la resolución de problemas de probabilidad condicionada, como informan Huerta y Lonjedo (2007), está por saber si también tiene cierta influencia en otras fases del proceso. La variable formato de datos, pues, es otra de las posibles variables independientes a tener en cuenta.

Por otra parte, resolver un problema es un proceso. Polya ya lo describió, desde el resolutor ideal, mediante lo que es conocido como el modelo de las cuatro fases. Puig y Cerdán (1988) parten de él y lo reinterpretan para la familia de problemas aritméticos de enunciado verbal, considerando el modelo ampliado a seis: lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución y revisión-comprobación.

Dado que los problemas de probabilidad pueden verse de alguna manera, en algún instante de la resolución, como una clase particular de problemas aritméticos-algebraicos, las fases consideradas por Puig y Cerdán son reinterpretadas para los problemas de probabilidad condicional, como veremos en el apartado siguiente.

3. El esquema de variables dependientes y las fases

En Kulm (1979) se presenta un esquema teórico mostrando cómo las variables de la tarea pueden influir sobre el proceso de resolución de un problema dividido en fases. Entonces, aceptando esta posibilidad teórica, es posible considerar un conjunto de variables dependientes con las que describir todo el proceso de resolución del problema. Este conjunto de variables dependientes forma parte de las que allí se citan como variables del proceso y del producto. Por medio de los valores que estas variables puedan tomar será posible describir el comportamiento de un resolutor dado, desde que se le proporciona la tarea de resolver un problema hasta que da por terminada ésta, proporcionando, o no, una respuesta a la pregunta formulada. Lo que es particular aquí, para los problemas de los que hablamos, es que aquello que se observa es el uso que hace el resolutor de las probabilidades conocidas en el problema y de sus relaciones con el fin de dar una respuesta a lo que se pregunta, otra probabilidad, siendo siempre una de ellas una probabilidad condicionada.

Como, por lo general, la información de la que se va a disponer consiste en una resolución escrita, conviene descomponerla comparándola con aquello de lo que dispondríamos por escrito de una resolución ideal que recorriera las fases (Huerta y Arnau, 2013). Lo que significa que no toda resolución podrá explicarse por la totalidad del conjunto de las variables que citaremos, pues podría haber resoluciones reales que no las recorrieran todas. Así, por ejemplo, podríamos encontrar resoluciones en las que la respuesta a la pregunta del problema fuera una simple asignación subjetiva a la probabilidad preguntada, sin que para ello hubiera habido en el proceso ninguna fase previa de cálculos intermedios y ni siquiera un cálculo final.

El esquema es fruto, de una parte, de la reflexión teórica anterior y, de otra, de la observación de 960 resoluciones de estudiantes de 15-16 años y 651 resoluciones de estudiantes graduados en Matemáticas e Ingenierías resolviendo problemas de probabilidad condicional en los que las variables de la tarea (independientes) que se han considerado tienen que ver con el contexto, la estructura de datos y el formato de expresión de éstos. Así, podemos considerar tres conjuntos de variables dependientes cuyos valores permiten describir lo que ocurre, ya sea a lo largo de todo el proceso de resolución o bien en alguna de las fases en las que éste puede descomponerse y que pueda interesar observar con más detenimiento (Figura 1).

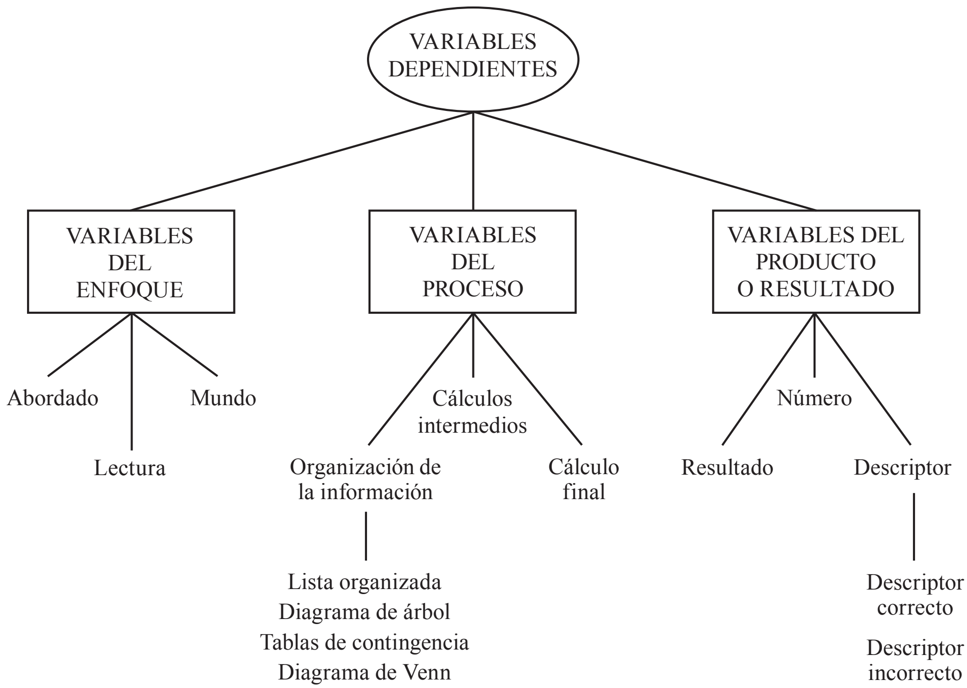


Figura 1. Esquema de variables dependientes para el análisis del proceso de resolución de un problema de probabilidad condicional

Si bien entraremos en el detalle en la próxima sección, en la Figura 1 se ponen en relación las variables que se pueden considerar con las distintas fases del proceso de resolución. El proceso de resolución, llevado a cabo por un resolutor ideal, se corresponde con una lectura de izquierda a derecha de las variables descritas en la Figura 1. Explicaremos, a continuación, estas fases por las variables consideradas, señalando en cursiva en qué fase podrían observarse.

a) Variables del enfoque. Conjunto de variables que pretende identificar las decisiones previas que el resolutor toma cuando aborda un problema particular. Estas variables son:

1. Abordado: variable que indicará si el resolutor ha abordado la resolución de un problema particular o no.

2. Lectura: variable que informa de la presencia o no del álgebra en la resolución.

3. Mundo: variable que determina el protagonismo que tienen las probabilidades en la resolución del problema, si es que lo tienen.

b) Variables del proceso. Este conjunto de variables está compuesto por:

1. Organización de la información. Es usual que la enseñanza proporcione medios para la representación de los datos conocidos en el enunciado de los problemas que facilitan la lectura y comprensión del problema, proporcionando, en algunos casos, además, un plan para su resolución. Pueden ser medios de organización disponibles:

1.1 Lista organizada
1.2 Diagramas de árbol
1.3 Tablas de contingencia
1.4 Diagramas de Venn

Por diagramas de árbol y tablas de contingencia, o tablas 2x2, nos referimos a lo que habitualmente es proporcionado por la enseñanza como recursos para la resolución de problemas. Por lista organizada nos referimos a la presencia en la resolución, generalmente al principio de la misma, de un listado con las cantidades conocidas y desconocidas presentes en el enunciado del problema. Este listado puede ser el resultado de una lectura analítica del problema, es decir, el resultado de una lectura en la que el resolutor se fija solamente en qué cantidades son conocidas y desconocidas. En cualquier caso es la respuesta a una lectura intencionada del texto del problema. Por otra parte, por diagramas de Venn nos referimos a la representación de los datos mediante conjuntos que representan a los sucesos y a sus operaciones, como unión e intersección. Generalmente, el resolutor asocia a estos conjuntos un número que representa la medida del suceso (en frecuencias o porcentajes). Es preciso decir, finalmente, que muchas resoluciones contienen más de una manera de organizar la información, al combinar más de una de las formas que hemos mencionado.

Del análisis de esta parte inicial del proceso de resolución, que se correspondería con las fases de *lectura, comprensión y traducción*, va a depender en gran medida el análisis posterior que se haga. Es aquí donde puede verse si el resolutor interpreta correctamente los datos conocidos, a partir de la forma en que describe los números que aparecen en el enunciado. Es decir, si el resolutor interpreta o malinterpreta las probabilidades conocidas y desconocidas proporcionadas por el problema y si, además, la lectura organizada le proporciona un plan para resolver el problema o no, como se correspondería, por ejemplo, con el uso de los diagramas de árbol, las tablas de contingencia o el uso de expresiones formales.

> 2. Cálculos intermedios. Con esta variable se pretende identificar si el resolutor produce nuevas cantidades, llamadas cantidades intermedias, a partir de las cantidades conocidas inicialmente por el problema. Estas cantidades intermedias no resuelven la pregunta sino que contribuyen a su resolución. Si la lectura que hace el resolutor del problema es algebraica, entonces es posible ver si produce nuevas expresiones algebraicas como cantidades intermedias.

Para esto, el resolutor ha de producir las cantidades con sentido, partiendo de una correcta interpretación de las que ya son conocidas. Es aquí, en esta etapa de la *fase de cálculos*, donde es posible confirmar si las cantidades han sido interpretadas correctamente, pues son usadas para la producción de las cantidades intermedias mediante el establecimiento de las relaciones pertinentes entre ellas.

> 3. Cálculo final. De especial interés cuando en el problema se pregunta por una probabilidad condicional. Con esta variable se pretende observar si el resolutor realiza un cálculo específico para proporcionar una respuesta a la pregunta del problema.

En ocasiones, este cálculo es substituido por una de las cantidades intermedias o por un juicio subjetivo o por cualquier otra cantidad distinta de aquella por la que se pregunta. Es esperable, no obstante, que la respuesta sea producida por un cálculo *ad hoc*, lo que permite a su vez determinar hasta qué punto el resolutor interpreta o malinterpreta la pregunta del problema en función de si la obtiene o no por medio de la relación pertinente entre las cantidades apropiadas. En probabilidad condicional esta observación es totalmente pertinente por la variedad de interpretaciones que los estudiantes proporcionan a este concepto que, de una parte, convierte los problemas en tareas difíciles de resolver con éxito para amplias muestras de estudiantes y, de otra, permite observar algunas de las causas de estas interpretaciones equivocadas que se pueden situar también en el lenguaje particular con el que se expresa.

c) Variables del resultado. Variables que nos permiten observar y analizar lo que el resolutor declara como respuesta a la pregunta formulada por el problema. Esta variable la dividimos en otras secundarias, como sigue:

1. Resultado. Variable que nos indica si el resolutor ha proporcionado una respuesta a la pregunta del problema, sea ésta del tipo que sea, numérica o no.

2. Número. Con este nombre nos referimos a la variable que nos indicará si el resolutor ha dado una respuesta numérica correcta a la pregunta del problema.

3. Descriptor correcto. Con esta variable observamos si el resolutor interpreta correctamente el número dado como respuesta. Esta interpretación la observamos por medio de la descripción verbal que hace de él, es decir, si se dota al número del significado de una probabilidad o una frecuencia condicional o un porcentaje, o no.

4. Descriptor incorrecto. Con la misma intención que en la variable anterior, pero en este caso el resolutor proporciona una descripción verbal que no parece proporcionar al número el significado deseado.

El hecho de observar la variable resultado por medio de ésas cuatro se fundamenta en la noción de cantidad que hemos introducido para los problemas de probabilidad condicional (Edo, Huerta y Cerdán, 2011). Teniendo su origen en el trabajo de Cerdán (2007), definimos cantidad como una terna (x, S, f) en la que x es un número, S es una proposición que describe el número (dicho de otra forma, que x "mide" algo expresado por S) y f el formato con el que se expresa el número. Dependiendo del formato de expresión estamos hablando de frecuencias, porcentajes o probabilidades entre 0 y 1. Es por eso que observamos si la respuesta dada por el resolutor se realiza en términos de cantidades o no, lo mismo que la interpretación y uso de la información proporcionada por el enunciado del problema. Es decir, se observa si, durante la resolución del problema, el problema y el resolutor comparten o no los significados de las probabilidades implicadas y de sus relaciones. Este último conjunto de variables aparecen en la fase de *solución* del problema y *comprobación-revisión*, al exigir del resolutor la respuesta en términos de cantidades.

4. Codificación de las variables. ejemplos

Descritas las variables y su relación con las fases procede sugerir un esquema para su codificación, mostrando ejemplos de cómo se ha hecho.

4.1. *El conjunto de las variables del enfoque*

Recordemos que lo que hemos llamado variables del enfoque de resolución es un conjunto de tres variables: variable abordado, variable mundo y variable lectura. La codificación de las variables que describirán el proceso de resolución del problema puede depender de los valores que tomen éstas.

4.1.1. *Variable abordado*

Esta variable informa sobre si un problema ha sido abordado por un resolutor o no. Este conocimiento permite referir los resultados de la investigación bien a toda la muestra de resolutores a quienes se les proporciona un problema o bien restringirlos a aquellos que lo abordaron. Por otra parte, puede suponerse que si un estudiante no aborda un problema dado es debido a que, después de la lectura del mismo, percibe la dificultad de resolverlo y decide no abordarlo. Esta variable pues nos dará una aproximación de la *dificultad percibida o apreciada* del problema antes de que puedan considerarse otras dificultades. La dificultad apreciada se sustenta en la hipótesis anterior, aunque se es consciente de que otras causas de tipo emocional pueden provocar el abandono de un problema antes de comenzar: cansancio, falta de motivación, frustración, etc.

Dependiendo de la muestra de estudiantes, se considerará, en general, que un problema no ha sido abordado si el espacio reservado para la respuesta está en blanco. El investigador puede ser más o menos exigente en cuanto al contenido mínimo que debe tener una resolución para considerar que sí se ha abordado. Siendo una variable binaria, se codificará con 1 si existe algún tipo de registro de escritura numérica, literal o gráfica no tachado. Se codificará con 0 en caso contrario.

4.1.2. *Variable mundo*

Llamamos así al campo de las matemáticas en el que el resolutor ubica la resolución del problema. Esta distinción entre campos se puede observar por el sistema de signos utilizado en la resolución. En efecto, la resolución de problemas como el que figura a continuación puede tener lugar tanto en el campo de la aritmética como en el de la probabilidad. Ésto depende solamente de cómo sean percibidos por el resolutor. Así, un problema como el siguiente:

Problema 1. El 20% de los ciudadanos se vacunan para la gripe común. Por otra parte, el 15% de los ciudadanos contrae la gripe común y un 70% ni se vacuna ni contrae la gripe común. Entre los ciudadanos que no se vacunan, ¿qué porcentaje contrae la gripe común?

es percibido como un problema de aritmética por la totalidad de los 165 estudiantes de 15-16 años, sin enseñanza previa en probabilidad, a los que se les propuso su resolución (Carles et al., 2009), porcentaje que se reduce al 53,7% en una muestra de 54 estudiantes para profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria graduados en Matemáticas, Ingenierías o Arquitectura (Amorós, 2012). Pero, al mismo tiempo un 46,3% de estos futuros profesores percibieron el problema como de un problema de probabilidades:

Es un problema de probabilidad condicionada, pues se puede reformular en:
Elegido un ciudadano al azar, ¿ cuál es la probabilidad de que contraiga la gripe si sabemos que no se ha vacunado ?

traduciendo los datos conocidos y desconocidos a probabilidades de sucesos:

Sean: V: "se ha vacunado" $\bar{V}$: "no se ha vacunado" $\to P(V) = 0'2 \to P(\bar{V}) = 0'8$.
A: "contrae la gripe" $\bar{A}$: "no contrae la gripe" $\to P(A) = 0'15 \to P(\bar{A}) = 0'85$.

Entonces, el sistema de signos y las matemáticas que emplean los resolutores al usar esos sistemas de signos son diferentes y perfectamente identificables, aunque compartan la intención de encontrar una respuesta al mismo problema. Lo que sigue (Figuras 2 y 3) son ejemplos paradigmáticos de resoluciones en ambos mundos.

		VACUNA		
		SÍ	NO	TOTAL
CONTRAE	SÍ	5%	10%	15%
	NO	15%	70%	85%
TOTAL		20%	80%	100%

Del total de ciudadanos, un 15% contrae la gripe A, luego el 85% restante (100% - 15%) no la contrae.
Además sabemos que un 70% de la población no se vacuna y no contrae la gripe, luego hay un 10% (80% - 70%) que no se vacuna y contrae la gripe.
En términos globales:

$\frac{10\%}{80\%} \cdot 100 =$

Un 12'50% de la población contrae la gripe A sin haberse vacunado.

Figura 2. Una resolución aritmética del Problema 1

Mientras que la resolución en el mundo de la aritmética (Figura 2) se ha producido en el mismo contexto en el que se formula el problema, en el que las cantidades intermedias y final se obtienen mediante relaciones aritméticas, la resolución en el mundo de la probabilidad ha requerido de una traducción de las cantidades conocidas y desconocidas en el contexto del problema a cantidades en el lenguaje formal de las probabilidades (Figura 3). Esta traducción puede hacerse explícita o contener los registros suficientes con los que apreciar si el papel de las probabilidades en la resolución del problema es determinante, escaso o nulo. Así, esta variable se codificará atendiendo a este papel protagonista de las cantidades y sus relaciones en alguno de estos dos mundos o bien en una posible "transición" entre ellos (Huerta, 2009).

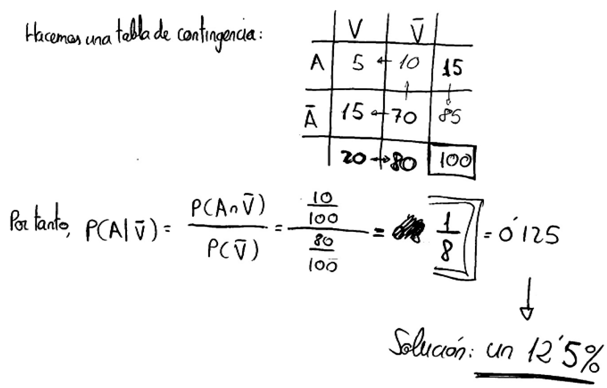


Figura 3. Una resolución en probabilidad del Problema 1

Además, el enfoque dado a una resolución, en uno u otro *mundo*, e incluso en mundos intermedios, puede ocurrir tanto si en el problema aparecen referencias explícitas a las probabilidades como si no, como ocurre con la versión del problema anterior en la investigación de Arnau (2012):

El 20% de los ciudadanos se vacunan para la gripe común. Por otra parte, el 15% de los ciudadanos contrae la gripe común y un 70% ni se vacuna ni contrae la gripe común. Si un ciudadano se vacuna, ¿qué probabilidad tiene de contraer la gripe común?

Mientras que en la primera versión el problema es percibido por el estudiante como un "problema de aritmética o de probabilidad" y a partir de esta percepción resuelve el problema, en la segunda esta percepción no tiene lugar pues el problema es un "problema de probabilidad" y lo que sí decide el resolutor es abordarlo como tal o bien traducirlo al sistema de signos de la aritmética y resolverlo en este campo.

4.1.3. *Variable lectura*

El término lectura se entiende aquí en el mismo sentido que le da el resolutor a la resolución de un problema dado y que aquí distinguimos como aritmética o algebraica. Lo tomamos prestado del mismo uso que se hace, por ejemplo, en Cerdán (2007) para los problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos. En efecto, como ya se ha dicho, los problemas ternarios de probabilidad condicional pueden considerarse como una subfamilia de aquéllos, aunque, en nuestro caso, implican cantidades y relaciones entre cantidades impregnadas de una fuerte carga conceptual. Así, sus resoluciones pueden acarrear lecturas analíticas teóricas tanto aritméticas como algebraicas a las que los resolutores pueden responder, indistintamente, con lecturas aritméticas o algebraicas (ver Figura 4).

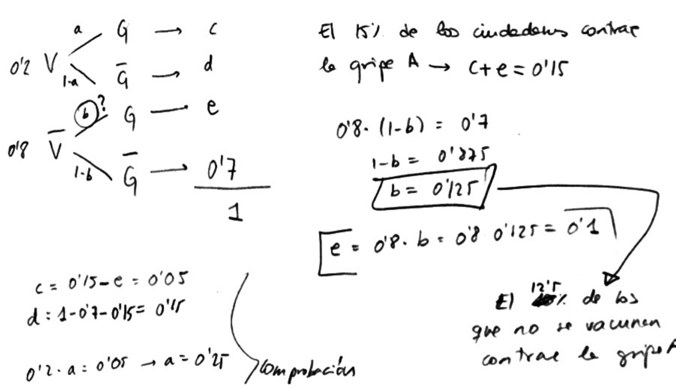


Figura 4. Resolución del problema 1 con lectura algebraica

En efecto, teóricamente hablando, si para resolver un problema solamente son requeridos los datos conocidos, se dice que tiene una lectura teórica aritmética, pero si, por el contrario, es necesario sobredimensionarlo con la incorporación de cantidades desconocidas, entonces tiene una lectura teórica algebraica. Pero un resolutor puede hacer una lectura aritmética o algebraica tanto de un problema que tiene una lectura teórica que es aritmética como de uno cuya lectura teórica es algebraica. Identificarlas y codificarlas, como aritméticas o algebraicas, puede ser determinante para el análisis del comportamiento de un resolutor a lo largo del cuestionario o en la comparación de resoluciones de un mismo problema con una lectura teórica dada. Además, el proceso de resolución del problema es dependiente del tipo de lectura que se realice. Los ejemplos de problemas mostrados hasta ahora tienen lecturas teóricas aritméticas. Compárelas el lector con la que haría del problema siguiente y compruebe que, a diferencia de aquéllas, ésta es algebraica.

> *Entre los ciudadanos que contraen la gripe común un tercio de ellos no se ha vacunado, mientras que de los ciudadanos que sí se han vacunado una cuarta parte ha contraído la enfermedad. Si entre los que no se vacunan el 12'5% contraen la gripe común, ¿qué probabilidad tiene un ciudadano cualquiera de contraer dicha enfermedad?*

La diferencia entre calificar la lectura de una resolución como algebraica o no está en la intención de usar las cantidades desconocidas como conocidas y operar con ellas. Una lectura puede ser aritmética aunque el resolutor use letras como incógnitas auxiliares con el único fin de obtener su valor en una expresión aritmética ternaria en la que dos de las tres cantidades son conocidas. En todo caso se trata de una variable dicotómica con dos posibles valores según sea la lectura aritmética o algebraica.

4.2. *El conjunto de las variables del proceso*

El conjunto de las variables del proceso de resolución lo constituyen las variables que llamamos organización de la información, cálculos intermedios y cálculo final.

4.2.1. *Variables de organización*

Esta variable está compuesta por otras variables como *lista*, *diagrama de árbol*, *tabla de contingencia* y *diagrama de Venn*. Un vector ordenado de cuatro componentes describirá la variable organización cuyos valores 0 o 1 indicarán, respectivamente, ausencia o presencia en la resolución de un medio de organización u otro.

Aquello que el resolutor expresa de forma organizada como resultado de la lectura ordinaria del texto del problema proporciona al investigador una primera aproximación de la interpretación que hace de las cantidades en el problema.

Esta aproximación deberá confirmarse con el uso posterior de estas cantidades en las variables de cálculo. No obstante, ciertos errores conceptuales, falacias y sesgos asociados con la probabilidad y, concretamente, con la probabilidad condicionada, comienzan a manifestarse en esta fase inicial de la resolución del problema.

4.2.1.1. *Lista*

Decimos que las cantidades se organizan en una lista cuando se expresan como una enumeración de los datos conocidos y desconocidos en el problema, colocados unos a continuación de los otros (casi siempre en el mismo orden en el que aparecen en el texto del problema) y procedentes de una lectura ordinaria, aunque analítica, del enunciado.

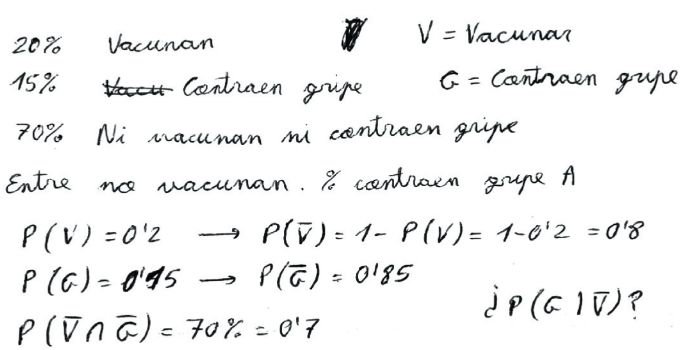


Figura 5. Elaboración de dos listas para el problema 1, en la misma resolución

En el ejemplo (Figura 5) la lista se ha producido tras una lectura analítica del enunciado, centrándose el resolutor en las cantidades. Estando ubicada la resolución del problema en el mundo de las probabilidades, la lista contiene, además, la traducción de los datos conocidos y desconocidos al sistema de signos de las probabilidades, expresando las cantidades en este sistema de signos.

Edo (2014) informa que puede producirse un error de cantidad cuando al expresarlas en una lista alguna de las componentes listadas no se corresponde con la cantidad expresada en el enunciado del problema. En el ejemplo siguiente, el error de cantidad se manifiesta en la cantidad desconocida pues el resolutor expresa la probabilidad condicionada preguntada como una probabilidad conjunta por la que el resolutor se interroga.

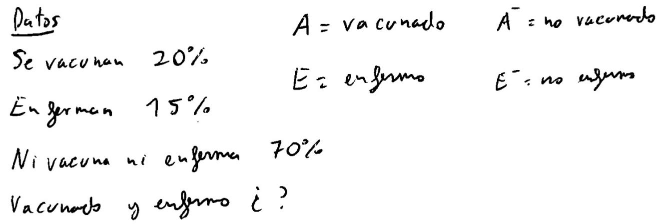


Figura 6. Elaboración de una lista para el problema 1 en la que puede observarse un error de cantidad para la cantidad desconocida (preguntada)

4.2.1.2. *Diagramas de árbol*

Junto con las tablas de contingencia, es habitual que este sistema de representación sea proporcionado por la enseñanza. Canónicamente se dice que las cantidades se expresan en un formato de diagrama de árbol cuando se describe una ramificación del espacio muestral en dos sucesos complementarios y, posteriormente, cada uno de éstos en otros dos sucesos, también complementarios, dando lugar a cuatro caminos que conducen a las cuatro intersecciones posibles. El proceso se considera compuesto de dos pruebas dependientes de tal manera que en la primera parte del diagrama se sitúan las probabilidades marginales y en la segunda las condicionadas. La regla del producto permite determinar las probabilidades conjuntas representadas por los cuatro caminos (véase, por ejemplo, Pluvinage, 2005).

Una organización de la información debería codificarse como árbol siempre que la representación de los datos mostrase, al menos, un análisis de posibilidades para los sucesos (con o sin las medidas de sus probabilidades) y las relaciones entre ellos, o bien una distribución de las cantidades numéricas (usualmente a partir del tamaño de la muestra o espacio muestral) aunque sea de manera incompleta o la representación no responda a la forma canónica. La siguiente representación se codificó como árbol (Figura 7):

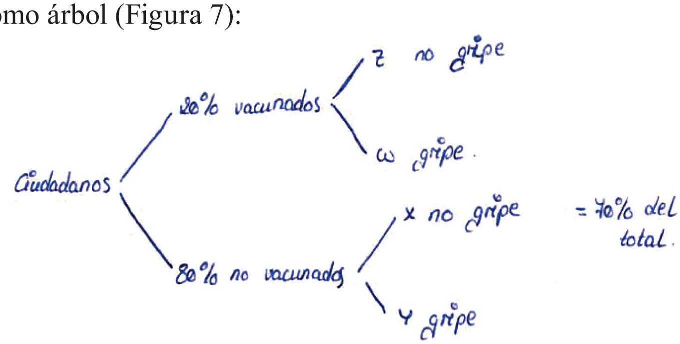


Figura 7. Construcción de un árbol para organizar la información del problema 1

Es preciso indicar que la lectura de las cantidades en un diagrama en árbol conlleva, muchas veces, la inclusión de las cantidades complementarias a las informadas explícitamente en el enunciado del problema, sean estas necesarias o no para la resolución posterior del problema.

La apariencia, por otra parte, no debería ser un factor determinante a la hora de decidir si la información se ha organizado en forma de árbol o no. Puede haber disposiciones en horizontal o en vertical, que usen (o no) líneas para conectar las diferentes pruebas compuestas, completas e incompletos, etc. La decisión de codificar una organización como árbol o no depende de que se cumplan total o parcialmente las características descritas más arriba. La siguiente organización (Figura 8) se codificó como diagrama de árbol en Amorós (2012):

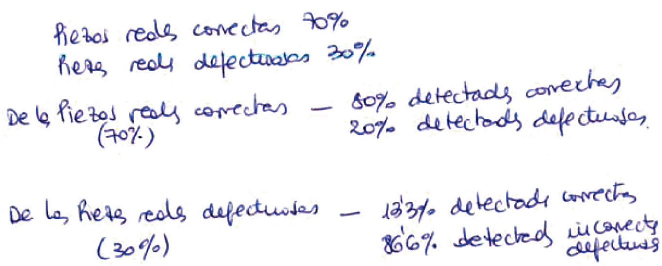


Figura 8. Representación de información en una resolución codificada como diagrama en árbol

4.2.1.3. *Tabla de contingencia*

Llamamos así a una tabla de doble entrada formada por tres filas y tres columnas en las que es posible representar hasta nueve cantidades: cuatro referidas a las cantidades marginales, cuatro a las intersecciones y una al tamaño de la muestra o espacio muestral. Estas tablas suelen usarse en los libros de texto escolares para la formulación de problemas de probabilidad. En estos casos, el papel de resolutor es distinto al del resolutor que usa las tablas de contingencia como una herramienta heurística para resolver el problema. En efecto, en este caso, el resolutor las usa para organizar la información de manera que le ayude a comprenderla y le proporcione además, un plan para la resolución (ver Figuras 2 y 3). En cambio, si esta información ya está organizada en el propio enunciado en formato de tabla, del resolutor se requiere comprensión de la información organizada de esta manera, lo que algunas investigaciones han mostrado que entraña dificultades y no mejora necesariamente la comprensión del problema (Contreras, Estrada, Díaz y Batanero, 2010).

Decimos que la información está organizada en una tabla de contingencia si el resolutor organiza la información en la forma habitual en la que se suele presentar como una tabla 2x2, ampliada o de cualquier otro modo, pero en la que aparezcan representados por etiquetas de cualquier índole los dos pares de sucesos y sus complementarios y, o bien las probabilidades que se enuncian explícitamente en el texto del problema o bien las derivadas de una lectura de las mismas en la propia tabla, como es el caso en el que la probabilidad conocida sea una probabilidad condicionada.

4.2.1.4. *Diagramas de Venn*

Habiendo casi desaparecido de los libros de texto escolares para la representación de conjuntos y operaciones entre conjuntos, todavía es posible encontrar diagramas de Venn en algunos libros de texto para la enseñanza de la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes. Aunque su uso como herramienta para la representación de la información es más bien escaso, prácticamente nulo en la enseñanza secundaria, existen resolutores que prefieren representar la información referida a sucesos mediante los diagramas de Venn y sus probabilidades mediante las áreas de las zonas que delimitan dichos diagramas.

Diremos que en una resolución hay presencia de diagramas de Venn si existe una representación gráfica de los sucesos básicos y sus intersecciones mediante cualquier forma geométrica que encierre una superficie (generalmente ovoides, círculos o cuadriláteros, ver Figura 9). En algunas ocasiones se incluyen medidas para las áreas, representando entonces a las probabilidades de los sucesos.

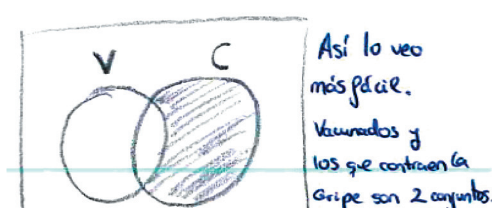


Figura 9. Inclusión de los diagramas de Venn en una resolución

Finalmente, es posible que una resolución contenga más de un medio de organizar la información del problema. En algunos casos, este hecho responde a la consideración de una manera de resolver el problema, un plan que pueden proporcionar las tablas de contingencia y los árboles pero no los diagramas de Venn ni las listas organizadas (Figura 10).

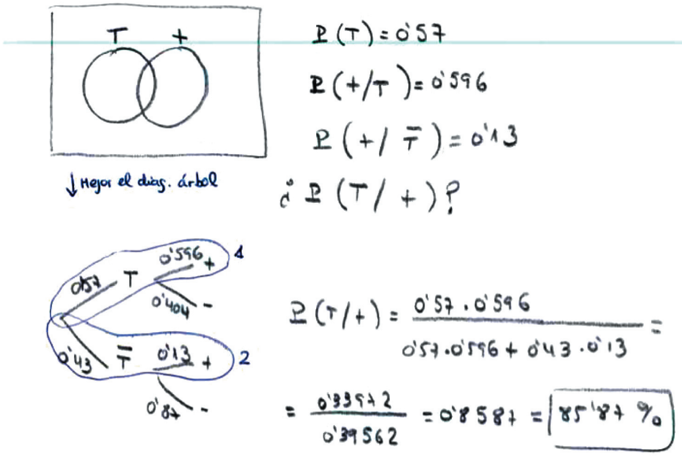


Figura 10. Resolución en la que es posible reconocer hasta 3 maneras de organizar la información de un problema: lista, diagrama en árbol y diagrama de Venn

4.2.2. *Cálculos intermedios*

Teóricamente hablando, el proceso de resolución del problema debería continuar con la determinación de cantidades intermedias, distintas de las conocidas y de la preguntada. Esta variable la descomponemos en otras dos, una que nos indica si hay presencia de cálculos intermedios y otra que nos indica si éstos se han producido con error. Evaluamos así si la respuesta es consecuencia de una serie de cálculos intermedios o no, no siendo extraño que ocurra esto último con resolutores jóvenes fuertemente influenciados por el contexto (Carles et al., 2009).

La variable cálculo se codifica dependiendo de la variable lectura del problema. Si la lectura es aritmética, decimos que en la resolución hay cálculos intermedios si aparece explícitamente el cálculo de al menos una cantidad intermedia, cálculo que está descrito mediante expresiones aritméticas expresadas de cualquier manera en la que se reconozca que la nueva cantidad producida se obtiene mediante su relación con otras dos cantidades ya conocidas. No reconocemos dicho cálculo intermedio cuando la cantidad obtenida sea el producto de una lectura del enunciado del problema, sin que ese cálculo se exprese explícitamente en la resolución, como podría ser el caso de las cantidades que son probabilidades complementarias de las enunciadas en el problema.

Si la lectura es algebraica, decimos que hay cálculos intermedios si las cantidades intermedias se expresan mediante expresiones algebraicas, producto de las relaciones entre cantidades conocidas, estando, necesariamente, alguna de ellas expresada de forma algebraica.

Decimos que hay error de cálculo, tanto si la lectura realizada es aritmética o algebraica, si alguna de las cantidades intermedias calculadas, necesarias para la obtención de la solución del problema, es errónea. Será errónea o bien porque es producto de alguna relación entre cantidades que es errónea o bien porque, aun siendo válida la relación que se establece, las cantidades que se relacionan son erróneas. Edo (2014) les llama, respectivamente, *error de relación* y *error de cantidad*.

4.2.3. *Cálculo final*

En la resolución de cualquier problema puede aparecer un cálculo específico para la probabilidad preguntada. Este hecho es muy acusado en aquellos problemas, como el problema 1, en los que se pregunta por una probabilidad condicionada. Así, parece apropiado explorar de qué manera los resolutores contestan a una pregunta de este tipo. Puede hacerse con la ayuda de un par de variables, la que informa de la presencia de dicho cálculo y aquella que informa de si éste se produce con o sin error.

El cálculo final es dependiente de la lectura realizada. Si la lectura es aritmética, se espera que el cálculo de la cantidad desconocida se realice por medio de expresiones aritméticas, mientras que si la lectura es algebraica entonces ese cálculo será consecuencia del establecimiento de una ecuación o sistema de ecuaciones cuya solución o soluciones conduzcan a la determinación de la cantidad preguntada, ya sea directamente o mediante alguna expresión aritmética posterior.

Decimos, entonces, que hay un cálculo final si en la resolución aparece un cálculo explícito o implícito para producir una cantidad final como respuesta a la pregunta (ver Figuras 2, 3), o bien si existen las comparaciones suficientes entre cantidades como para dar lugar a la ecuación o sistema de ecuaciones que resolvería el problema (Figura 4).

Si la lectura es aritmética, entonces el cálculo final que conduce a la respuesta puede ser realizado mediante una proporción (regla de tres), una relación multiplicativa o una relación aditiva e, incluso ser expresado de forma literal. Si la cantidad señalada como resultado final no procede de un último cálculo explícito, sino que ha sido elegido entre alguna de las varias cantidades intermedias disponibles, este cálculo no se considera como cálculo final, habiendo sido codificado en su momento como cálculo intermedio.

Si la lectura es algebraica es suficiente con que en la resolución aparezcan tantas ecuaciones como incógnitas implicadas en la obtención de la cantidad desconocida para que entonces se codifique que hay un cálculo final en esa resolución con lectura algebraica.

Decimos que en el cálculo final hay presencia de error, con independencia de si la lectura es aritmética o algebraica, si o bien las relaciones utilizadas para ello no son adecuadas o bien, aun siéndolo, las cantidades empleadas no pueden relacionarse de manera que conduzcan a la respuesta del problema. Si la lectura del problema es algebraica, la no resolución de la ecuación o del sistema de ecuaciones pertinentes no la calificamos como error en el cálculo final.

4.3. *El conjunto de las variables del producto (resultado)*

El proceso de resolución culmina, razonablemente, con la respuesta a la pregunta formulada, si es que el resolutor proporciona alguna. Si este es el caso, entonces se espera que sea una cantidad expresada mediante las tres componentes que la definen.

4.3.1. *Resultado*

Hemos llamado así a la variable que pretende evaluar la capacidad del resolutor de proporcionar una respuesta a la pregunta formulada. No se pretende evaluar su idoneidad sino el hecho de que se proporcione alguna respuesta. El resolutor suele destacarla de algún modo en su resolución (ver Figuras 2, 3, 4 y 10).

4.3.2. *Número*

Con la variable número pretendemos, ahora sí, evaluar la tipología de respuesta proporcionada, fundamentalmente cuando la respuesta dada es numérica. Distinguimos entre número correcto y número incorrecto, por lo que se asume que un valor (1 o 0, respectivamente) en esta variable indica que el estudiante proporciona una respuesta numérica y que el número proporcionado es o bien correcto o bien incorrecto. Queda vacía si el estudiante no proporciona una respuesta, o bien, si la respuesta es no numérica. Un error de cálculo aritmético o algebraico conducente a una respuesta numérica errónea no debería ser evaluada como número incorrecto si las cantidades y las relaciones entre las cantidades conducentes a la respuesta numérica correcta fuesen las adecuadas para ello.

4.3.3. *Descripción correcta*

Mediante esta variable evaluamos la capacidad del resolutor de dar la respuesta del problema en términos de cantidades, acompañando a la respuesta numérica con una descripción, siendo ésta considera correcta (Figuras 2 y 4). Dado que hablamos de problemas verbales de probabilidad, este descriptor puede ser una expresión verbal que dé cuenta de lo que es medido por el número. Si el resolutor usa el lenguaje simbólico de la probabilidad, se considerará un descriptor correcto el hecho de traducir la expresión simbólica de nuevo al contexto en el que esté formulado el problema y no simplemente la expresión del resultado en dicho lenguaje simbólico.

4.3.4. *Descripción incorrecta*

En el caso en el que el resolutor sí describa el resultado numérico proporcionado, pero lo haga mediante una proposición incorrecta, entonces registramos este hecho mediante el valor 1 en esta variable. Si un resolutor solamente proporciona una respuesta numérica pero no la describe, entonces valoramos las dos variables con 0, indicando así ausencia de descripción del resultado numérico (en Figura 3 y 10).

En resumen, para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional de enunciado verbal, este artículo propone tener en cuenta tres grandes variables que hemos llamado del enfoque, del proceso y del producto o resultado. En cualquiera de ellas puede observarse al resolutor en su relación con la probabilidad condicionada, bien cuando es una cantidad conocida en el problema, bien cuando es una cantidad desconocida. La actuación del resolutor durante el proceso dependerá de su correcta interpretación o no, lo que le permitirá establecer, o no, las relaciones pertinentes con otras cantidades: probabilidades marginales, probabilidades conjuntas y otras probabilidades condicionales. Esta actuación puede observarse con cierto detalle mediante el análisis de los resultados de un conjunto de, por lo menos, quince variables secundarias que explican las grandes variables anteriores: el enfoque con el que el resolutor aborda la resolución del problema, cómo lee, organiza e interpreta la información, y si esta interpretación es la esperada o hay presencia de errores de interpretación; si para dar respuesta al problema realiza los cálculos intermedios pertinentes y un adecuado cálculo final, sin la presencia de errores de relación o con ellos, que le permite obtener una respuesta a la probabilidad preguntada y si, finalmente, se responde o no a la pregunta del problema en términos de cantidades, es decir, mediante un número y una proposición que describa este número interpretado como una probabilidad. En este último caso, podemos evaluar la capacidad del resolutor de expresar probabilidades desconocidas y no solamente utilizarlas, como se hace al principio del proceso de resolución del problema.

5. Uso de este esquema para el análisis de las dificultades de los problemas

Asociado con el estudio de las variables que afectan a la resolución de los problema, es tradicional el estudio de sus dificultades (Lesh & Zawojewski, 2007). Así, en Carles et al. (2009); Huerta, Cerdán, Lonjedo y Edo (2011); Amorós (2012) y Arnau (2012) se introduce la idea de dificultades de los problemas y una forma de medirlas mediante lo producido por los resolutores y analizado con este esquema. Si bien la idea de medir una dificultad por medio de la razón entre el número de fracasos y el número de participantes no es nueva, lo que sí aporta estos estudios es la tipología de dificultades que se miden, fruto del análisis pormenorizado del proceso de resolución mediante las variables que hemos presentado. Además, se estudia si las dificultades dependen de las variables independientes de la tarea consideradas en la formulación de los problemas: la estructura de los datos y el contexto (Carles et al., 2009) e, incluso, del formato de pregunta del problema (Amorós, 2012). Así, teniendo su origen en el trabajo de Cerdán (2007) y tomando, por ejemplo, en consideración las variables Abordado, Resultado, Número, Descripción correcta y Descripción incorrecta, ya descritas, se definen las dificultades: *Dificultad apreciada* (DA), *Dificultad del problema* (DP), *Dificultad de la solución del problema* (DSP) y *Dificultad de la descripción correcta* de la solución del problema (DDRESCP). Estas dificultades informan sobre los problemas, proporcionando así la posibilidad de considerarlas como nuevas variables independientes en futuras investigaciones cuyo objetivo sea observar el comportamiento de los resolutores dependiendo del grado de dificultad de los problemas.

La dificultad apreciada (DA) mide hasta qué punto el problema es apreciado como “difícil” de ser resuelto, pues se basa en la cantidad de resolutores que deciden no abordarlo o abandonarlo prematuramente, antes ni siquiera de intentar organizar la información del problema de alguna manera que nos permita decir si el resolutor ha realizado algún tipo de lectura del problema encaminada a su resolución. Medimos esta dificultad mediante la razón entre el número de resolutores que sí abordan el problema y el número total de resolutores a los que se les propuso su resolución expresándolo en porcentajes, como todas las demás dificultades. Dado que esta dificultad es calculada, deberíamos prestar atención a la confirmación de este hecho: si la dificultad apreciada de un problema es sentida realmente por el resolutor, por ejemplo mediante entrevistas o registros filmados o audio-grabados en los que el resolutor confirme las dificultad que para él tiene el problema y que no le permiten avanzar.

La dificultad del problema (DP), para aquellos que sí abordaron su resolución, mide hasta qué punto es difícil dar una respuesta, del tipo que sea, a la pregunta del problema. Si esto no ocurre es porque razonablemente el resolutor abandona la resolución durante el proceso, en cualquiera de las fases anteriores, dejando el problema sin respuesta. Esta dificultad se mide mediante la razón entre el número de resolutores que no dan respuesta al problema y aquellos que abordaron su resolución, expresándola en porcentajes.

Dada una respuesta, esta puede ser expresada mediante un número o no y éste, a su vez, puede ser un número correcto o no. La dificultad de dar una respuesta numérica correcta a un problema la medimos con la dificultad de la solución del problema (DSP). Esta dificultad puede medirse respecto de aquellos que abordaron el problema, respecto de los que dieron algún tipo de respuesta a la pregunta o a ambas. En todo caso, la medimos mediante la razón entre el número de resolutores que dan una respuesta numérica no correcta al problema y el número de resolutores que lo abordan. Finalmente, asociada a la dificultad de la solución numérica del problema está la dificultad de su descripción. Dado que la descripción de la respuesta, ya sea correcta o incorrecta, puede que no aparezca en la solución de un problema, puede definirse una dificultad para la descripción de la respuesta del problema (DDRESP) y entre las respuestas con descripción una dificultad de que la descripción dada sea la correcta (DDRESCP). Se miden mediante la razón entre el número de resolutores que dan una descripción y los que dan una respuesta al problema (DDRESP), o por la razón entre el número de descripciones correctas y el total de las descripciones dadas (DDRESCP).

Carles et al. (2009) informan de las dificultades elevadas de los problemas de nivel N_0 (problema 1, p. 7) para estudiantes de 15 a 16 años y de la influencia del contexto y de la estructura de datos sobre ellas. Huerta y Cerdán (2010), Huerta et al. (2011), Amorós (2012), Arnau (2012) y Edo (2014) muestran como estas dificultades elevadas se presentan también en estudiantes graduados en Matemáticas o Ingenierías, futuros profesores de matemáticas de la educación secundaria lo que sorprende dada la alta preparación en matemáticas de los estudiantes.

El estudio de las dificultades no acaba en las que se mencionan. Puede extenderse a las dificultades en la realización de cálculos intermedios y de cálculos finales con el fin de analizar en qué fases de la resolución de los problemas los resolutores encuentran nuevas dificultades y a qué son debidas.

6. Conclusiones

El comportamiento de un resolutor de problemas no se puede describir solamente por la respuesta que proporciona a la pregunta formulada, si es que proporciona alguna. Ésta depende, o es consecuencia, de todo un proceso anterior del que debemos ser conocedores antes de obtener conclusiones. Así, en lo que es particular a los problemas de probabilidad condicional, las dificultades y errores en su uso pueden aparecer en cualquier instante del proceso. Es por esto que disponer de una metodología de análisis del proceso completo de resolución de los problemas de probabilidad condicional puede facilitar el análisis de las dificultades de comprensión de este concepto o el de sus interpretaciones equivocadas mostradas por una amplia mayoría de resolutores independientemente de su formación inicial, como lo demuestran algunos de los trabajos empíricos mencionados con anterioridad y que son consecuencia de esta metodología de codificación y análisis del comportamiento de un resolutor real. Comportamiento que puede describirse por medio de tres grandes variables dependientes, que hemos llamado del enfoque, del proceso y del producto, y nueve secundarias que las explican: abordado, lectura, mundo, organización de la información, cálculos intermedios y final, resultado, número y descripción del número. El análisis del comportamiento es consecuencia de las posibles relaciones entre dichas variables y entre ellas y las tomadas como independientes. Es obvio que con estas variables no se agotan las posibilidades, pero pueden tomarse como suficientes para producir una buena descripción y análisis del comportamiento de los resolutores.

Por otro lado, con esta propuesta, se abren nuevas líneas de investigación en el terreno de la educación probabilística al considerar la investigación en resolución de problemas de probabilidad como un tema de investigación que no había sido tenido en cuenta hasta el momento (Huerta, 2014). Además, un mayor y mejor conocimiento sobre el comportamiento de los resolutores en la resolución de los problemas de probabilidad, describiendo competencias, errores, interpretaciones equivocadas y dificultades, puede permitir diseñar unidades de enseñanza, como hace Edo (2014), que mejoren la situación actual de dicha enseñanza que Lonjedo et al. (2012) califican de, al menos, como insatisfactoria.

Referencias bibliográficas

Amorós, R. (2012). *Un ejemplo de análisis de datos mediante la inferencia bayesiana en resolución de problemas de probabilidad condicionada*. Tesis de Maestría no publicada. Universitat de València. Valencia, España.

Arnau, J. (2012). *Un estudio exploratorio de la resolución de problemas de probabilidad condicional centrado en la fase de cálculo.* Tesis de Maestría no publicada. Universitat de València. Valencia, España.

Carles, M., Cerdán, F., Huerta, M. P., Lonjedo, Mª A. y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 173-185). Santander: SEIEM. Obtenido de http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Carles, M. & Huerta, M. P. (2007). Conditional probability problems and contexts. The diagnostic test context. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 702-710). Retrieved from http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG5.pdf

Cerdán, F. (2007). *Estudios sobre la Familia de problemas Aritmético-Algebraicos*. Tesis Doctoral no publicada. Universitat de València. Valencia, España

Cerdán, F. y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, *19*(1), 27-61.

Contreras, J. M., Estrada, A., Díaz, C. y Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.271-280). Lleida: SEIEM. Obtenido de http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Corter, J. E. & Zahner, D. (2007). Use of External Visual Representations in Probability Problem Solving. *Statistics Education Research Journal*, *6*(1), 22-50. Retrieved from http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

Edo, P. (2014). *Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0 con estudiantes de secundaria (15-16 años).* Tesis Doctoral no publicada. Universitat de València. Valencia, España

Edo P., Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2011). Análisis de las resoluciones de problemas de probabilidad condicional mediante grafos. Un ejemplo. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco & M. Paralea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 337-350). Ciudad Real: SEIEM. Obtenido de http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Henry, M. (2005). Modélisation en Probabilités conditionnelles. En M. Henry (Ed.) *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 173-185). Presses universitaires de Franche - Comté- Université de Franche-Comté. Obtenu de http://www.univ-fcomte.fr/download/pufc/document/doc_en_ligne/ouvrages_en_ligne/autour_de_la_modelisation_des_probabilites.pdf

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S. & Martignon, L. (2002). Representation facilities reasoning: what natural frequencies are and what they are not. *Cognition, 84*(3), 343-352. doi: 10.1016/S0010-0277(02)00050-1

Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research − Structures and Context. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 163-194. Retrieved from http://www.iejme.com/

Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (pp. 613-639). Dordrecht, The Netherlands: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-7155-0_33

Huerta, M. P. y Arnau, J. (2013). Fases en la resolución de problemas de probabilidad condicional y variables de investigación. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 327-334). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Obtenido de : http://jvdiesproyco.es/index.php/actas.

Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 353-364). Lleida: SEIEM. Obtenido de http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, Mª. A. & Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. In M. Pytlak; T. Rowland & E. Swoboda (Eds.*), Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 807-817). University of Rzeszów, Poland. Retrieved from http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/5/CERME_Huerta-Cerdan-Lonjedo-Edo.pdf

Huerta, M. P. & Lonjedo, M. A. (2007). The same problem in three presentation formats: Different percentages of success and thinking processes. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 732-741). Retrieved from http://www.uv.es/lonjedo/documentos/cerme5huertalonjedo.pdf

Jones, G. A., Langrall, C. W. & Mooney, E. S. (2007). Research in Probability (Responding to Classroom Realities). In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on mathematic teaching and learning* (pp. 909-956). NCTM: Information Age Publishing.

Jones, G. A. & Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School (Challenges for Teaching and Learning)* (pp. 65-92). New York, USA: Springer.

Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. In G. A. Golding & C. E. McClintock (Ed.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, (pp. 1-22). Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED178366.pdf

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC, USA: Information Age Publishing.

Lonjedo, Mª A., Huerta, M. P. & Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(3), 319-338.

Pluvinage, F. (2005). Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(1), 91-99.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 153-160). Cambridge, USA: Cambridge Academic Press.

Watson, J. M. & Kelly, B. A. (2007). The development of conditional probability reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(2), 213-235. doi 10.1080/00207390601002880

Zahner, D. & Corter, J. E. (2010). The process of Probability Problem Solving: Use of External Visual Representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 177-204. doi: 10.108/ 10986061003654240

Autores

M. Pedro Huerta. Universitat de València, España. manuel.p.huerta@uv.es

Patricia I. Edo. IES Cova Santa, Segorbe, España. paegual@gmail.com

Rubén Amorós. Universitat de València, España. ruben.amoros.salvador@gmail.com

Joaquín Arnau. Universitat de València, España. joarbre@alumni.uv.es

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo

Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?

[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

En este último número del décimo noveno volumen de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Relime*, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. A través de sus comentarios críticos nuestros revisores contribuyen no solamente a mantener la calidad de los manuscritos publicados sino al desarrollo de nuestra disciplina en un ambiente de pluralidad a fin de fortalecer la escuela latinoamericana.

EVALUADOR / A	INSTITUCIÓN, PAÍS
Ana Caballero Carrasco	Universidad de Extremadura - España
Ana Sofía Aparicio	Universidad de Sao Paulo - Brasil
Analía Berger	Universidad de Quebec - Canadá
Ángel Contreras	Universidad de Jaén - España
Angélica Mª Martínez Quintero	Universidad Pedagógica Experimentar Libertador - Venezuela
Armando Albert	Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey - México
Aurora Gallardo	DME - Cinvestav - México
Avenilde Romo	PROME - CICATA - México
Bruno D'Amore	Università di Bologna - Italia
Cecilia Crespo	Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín González" - Argentina
Claudia Acuña	DME - Cinvestav - México
Corine Castela	Université Paris Diderot - Paris 7 - Francia
Daniel Eudave Muñoz	Universidad Autónoma de Aguascalientes - México
David Zaldívar	Universidad Autónoma de Coahuila - México
Francisco Rojas	Pontificia Universidad Católica de Chile - Chile
François Pluvinage	DME - Cinvestav - México
Hélia Jacinto	Universidad de Lisboa - Portugal
Iván López	Universidad Autónoma de Zacatecas - México
Javier Lezama	PROME - CICATA - México
Jesús Enrique Pinto	Universidad Autónoma de México - México
Jõao Pedro da Ponte	Universidad de Lisboa - Portugal
Jonei Barbosa	Universidade Federal da Bahia - Brasil
José Antonio Juárez López	Benemérita Universidad Autónoma de Puebla - México

Josep Gascón	Universidad Autónoma de Barcelona - España
Julio Cuevas Romo	Universidad Autónoma de San Luis Potosí - México
Jurema Peixoto	Universidade Estadual de Santa Cruz - Brasil
Laurent Vivier	Université Paris Diderot - Paris 7 - Francia
Lianggi Espinoza	Universidad de Valparaíso - Chile
María del Mar Moreno Moreno	Universitat de Lleida - España
María Elena Gavarrete	Universidad de Granada - España
María Laura Magalhanes	Universidade Federal de Minas Gerais - Brasil
Nicolás Balacheff	University of Grenoble - Francia
Patricia Salinas	Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey - México
Pedro Gómez	Universidad de Granada - España
Rodolfo Fallas	DME - Cinvestav - México
Rosa María Farfán	DME - Cinvestav - México
Ruth Rodríguez	Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey - México
Sonia Ursini	DME - Cinvestav - México
Teresa F. Blanco	Santiago de Compostela - España
Teresa Neto	Universidad de Aveiro - Portugal
Uldarico Malaspina	Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú
Ulises Xolocotzin	DME - Cinvestav - México
Verónica Molfino	Instituto de Profesores Artigas - Uruguay
Vicente Garnica	Universidade Estadual Paulista - Brasil
Victor Martínez Luaces	Universidad de la República - Uruguay

VOLUMEN 0, 1997

Presentación de Relime ROSA MARÍA FARFÁN / La investigación en matemática educativa en la Reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior.

VOLUMEN 1, 1998

I. GUZMÁN / Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. L. RICO / Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. M. ARTIGUE / Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? F. CORDERO / El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones.

VOLUMEN 2, 1999

H. J. DE LEÓN PÉREZ / Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. V. A. LÓPEZ GARCÍA / Historia de los inicios de la enseñanza del cálculo infinitesimal en México: 1785-1867. L. D. MELGAREJO / Modelos para la representación y procesamiento del conocimiento pedagógico en tutoriales inteligentes. E. MORALES / Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático de los alumnos de 9º grado de educación básica.

M. ANIDO DE LÓPEZ, H. E. RUBIO SCOLA / Un ejemplo de aprendizaje en el sentido de Polya. B. GÓMEZ ALFONSO / Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de "compañías". C. RIZO CABRERA, L. CAMPISTROUS PÉREZ / Estrategias de resolución de problemas en la escuela. L. RADFORD / La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica.

VOLUMEN 3, 2000

D. DENNIS, J. CONFREY / La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. B. D'AMORE, B. MARTINI / Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. E. DUBINSKY / De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. M. SIERRA VÁZQUEZ, M. T. GONZÁLEZ ASTUDILLO, C. LÓPEZ ESTEBAN / Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad.

Y. O'FARRILL / Sistema entrenador inteligente con tecnología multimedia. óptima-Geometría. G. MUÑOZ / Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el

VOLUMEN 4, 2001

VOLUMEN 5, 2002

matemáticas de los exponentes. L. SIÑERIZ / La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos.

A. CONTRERAS, M. CONTRERAS, M. GARCÍA / Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. F. CORDERO, E. MIRANDA / El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. I. ELICHIRIBEHETY, M. R. OTERO, M. A. FANARO / Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. M. M. SOCAS / Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática.

C. DOLORES, G. ALARCÓN, D. F. ALBARRÁN / Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: El caso de la velocidad y la trayectoria. A. GARCIADIEGO / El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. T. ORTEGA, M. ORTIZ / Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula.

VOLUMEN 6, 2003

C. BROITMAN, H. ITZCOVICH, M. E. QUARANTA / La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. R. CANTORAL, R. M. FARFÁN / Matemática Educativa: Una visión de su evolución. M. C. PAPINI / Algunas explicaciones vigostkianas para los primeros aprendizajes del álgebra.

L. ANDRADE, P. PERRY, E. GUACANEME, F. FERNÁNDEZ / La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación? L. J. BLANCO, M. BARRANTES / Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. R. CANTORAL, E. RESÉNDIZ / El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar.

A. BERGÉ, C. SESSA / Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. K. BARBOSA / La enseñanza de inecuaciones con el punto de vista de la teoría APOE. D.E. MEEL / Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. B. D´AMORE / Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática.

VOLUMEN 7, 2004

G. T. BAGNI / Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. A. BRUNO, J. A. GARCÍA / Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. S. M. SEGURA / Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Y. SERRES / Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática.

P. AGUILAR, A. OKTAÇ / Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. M. FERNÁNDEZ, C. RONDERO / El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. L. RADFORD / Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. L. ORTIZ-FRANCO / Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica.

C. DOLORES / Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. M. E. QUARANTA, P. TARASOW / Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. M. E. VALDEMOROS / Lenguaje, fracciones y reparto.

VOLUMEN 8, 2005

C. ACUÑA / ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. M. MARCOLINI, J. PERALES / La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación Universitaria. H. PARRA / Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. F. PLUVINAGE / Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades.

C. CASTELA / A propósito de los conocimientos que no se enseñan explícitamente, empero necesarios para tener éxito en las matemáticas escolares. M. F. DELPRATO / Educación de adultos: ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos? L. DÍAZ / Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. S. GARBIN / ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. G. MARTÍNEZ / Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. G. MONTIEL / Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada.

C. BATANERO / Significados de la probabilidad en la educación secundaria. F. CORDERO / El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. C. CRESPO, R.M. FARFÁN / Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. M. FALSETTI, M. RODRÍGUEZ / Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿Qué perciben los alumnos? J. LEZAMA / Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. M. ROSA, D. CLARK / Las raíces históricas del programa Etnomatemáticas. B. D´AMORE / Oscar Reutersvärd.

VOLUMEN 9, 2006

E. APARICIO, R. CANTORAL / Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. A. BERGÉ / Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del conjunto de los números reales. A. CONTRERAS, L. ORDOÑEZ / Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. L. GARCÍA, C. AZCÁRATE, M. MORENO / Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. J. D. GODINO, V. FONT, A. CONTRERAS, M. WILHELMI / Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. M.R. OTERO, L. BANKS-LEITE / Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media.

S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA, S.N. GATICA, J. BENEGAS / Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. A. BRUNO, M. NODA, R. AGUILAR, C. GONZÁLEZ, L. MORENO, V. MUÑOZ / Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. G. BUENDÍA / Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. A. CASTAÑEDA / Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. O. PEREZ / ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? E. RUIZ, M.E. VALDEMOROS / Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina.

M. A. ANIDO, R. LÓPEZ, H.E. RUBIO / Las superficies en el aprendizaje de la geometría. V. LARIOS / La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. A.L. LAVALLE, E.B. MICHELI, N. RUBIO / Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. Y. OTÁLORA, M. OROZCO / ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco? E. RESENDIZ / La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. R. UICAB, A. OKTAÇ / Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica.

RELIME ESPECIAL, 2006

L. RADFORD / Introducción. Semiótica y Educación Matemática. M. OTTE / Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. R. DUVAL / Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? R. CANTORAL, R.M. FARFÁN, J. LEZAMA, G. MARTÍNEZ / Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. L. RADFORD / Elementos de una teoría cultural de la objetivación. J.D. GODINO, V. FONT, M. WILHELMI / Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.

VOLUMEN 10, 2007

VOLUMEN 11, 2008

R. CANTORAL / ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad? V. ABOITES, G. ABOITES / Filosofía de la matemática en el nivel medio superior. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO, J. GIMÉNEZ / Modelos matemáticos a través de proyectos. C. STENGER, K. WELLER, I. ARNON, E. DUBINSKY, D. VIDAKOVIC / A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. M. E. VALDEMOROS, E. F. RUIZ / El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos.

R. CANTORAL / El papel de las revistas especializadas en las agendas de investigación en Matemática Educativa. S. CASTILLO / Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A. MATOS, J. P. DA PONTE / O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. º ano. A. B. RAMOS, V. FONT / Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. G. SÁNCHEZ-MATAMOROS, M. GARCÍA, S. LLINARES / La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.

R. CANTORAL / En defensa de "lo nuestro". M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. J. GALLARDO, J. L. GONZÁLEZ, W. QUISPE / Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. G. SCHUBRING / Gauss e a tábua dos logaritmos. C. VALDIVÉ, S. GARBIN / Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

VOLUMEN 12, 2009

R. CANTORAL / Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). G. BUENDIA, A. ORDOÑEZ / El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. C. CRESPO CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. U. T. JANKVIST / On empirical research in the field of using history in Mathematics Education. M. I. ROCHA, H. A. MENINO / Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos.

R. CANTORAL / Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. S. MAYÉN, C. BATANERO, C. DÍAZ / Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. N. PLANAS, N. IRANZO / Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. L. RADFORD, M. ANDRÉ / Cerebro, cognición y matemáticas. M. A. SORTO, J. H. MARSHALL,

T. F. LUSCHEI, M. CARNOY / Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative study in primary and secondary education.

R. CANTORAL / Revistas Latinoamericanas en ISI WoK, reflexiones con la comunidad. A.R. CORICA, M.R. OTERO / Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de evaluación. B.GARII, R. SILVERMAN / Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School. P. SALINAS, J.A. ALANÍS / Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una institución educativa. F. VISEU, J.P. DA PONTE / Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s.

VOLUMEN 13, 2010

R. CANTORAL / Finalmente… trois. A. ALSINA, M. DOMINGO / Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. M. APARECIDA VIGGIANI BICUDO, M. ROSA / Educação matemática na realidade do ciberespaço – que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? C. M. FERNÁNDEZ ESCALONA / Análisis epistemológico de la secuencia numérica. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas. C.ARANDA, M. L.CALLEJO / Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. M. BERGER / A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system. F. CORDERO OSORIO, C. CEN CHE, L. SUÁREZ TÉLLEZ / Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. J. A. FERNANDES, P. FERREIRA CORREIA, R. ROA GUZMÁN / Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.

R. CANTORAL / ¿Qué es la Matemática Educativa? F. J. BOIGUES, S. LLINARES, V. D. ESTRUCH / Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. C. CRESPO CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. M. D. POCHULU / Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. H. da S. ZAGO, C. R. FLORES / Uma proposta para relacionar arte e educação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2010

FRANCISCO CORDERO, CARLOS ÍMAZ, SONIA URSINI / Matemática Educativa en México. Aspectos sociales y cognitivos. G. BUENDÍA / Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. A. CAMACHO, B. SÁNCHEZ / Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. M. FERRARI, R. M FARFÁN / Una socioepistemología de lo logarítmico. G. MONTIEL / Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. R. PULIDO / La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. E. RESÉNDIZ / El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación. C. ACUÑA / Las funciones figurales y epistémicas de los dibujos. J. A. LANDA / Acercamiento a funciones con dos variables. V. LARIOS, N. GONZÁLEZ / Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. A. LÓPEZ / Interpretación de estudiantes de bachillerato sobre la identidad de la variable en expresiones algebraicas. T. MENDOZA, D. BLOCK / El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. R. RODRÍGUEZ / Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2010

FRANCISCO CORDERO, CARLOS ÍMAZ, SONIA URSINI / Matemática Educativa en México. Aspectos sociales y cognitivos. C. DOLORES / El lenguaje variacional en el discurso de la información. A. GALLARDO, E. BASURTO / La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. G. MARTÍNEZ / Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. G. MUÑOZ / Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. J. G. SÁNCHEZ, S. URSINI / Actitudes hacia las matemáticas, género y tecnología: estudios con alumnos mexicanos de educación básica. L. SUÁREZ, F. CORDERO / Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. R. ÁVILA, S. IBARRA, A. GRIJALVA / El contexto y el significado de los objetos matemáticos. S. MOCHÓN / La relación del comportamiento del profesor con el avance cognitivo de los estudiantes al introducir un software educativo en el aula. A. OKTAÇ, M. TRIGUEROS / ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? C. RONDERO / Cálculo promedial. El caso de la media aritmética. E. SÁNCHEZ / Una jerarquía de razonamiento estadístico sobre la noción de predicción/incertidumbre elaborada con profesores de secundaria. M. VALDEMOROS / Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones.

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI / 0.167. J. M. ANDRADE, M. J. SARAIVA / Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. A. ASSIS, J. D. GODINO, C. FRADE / As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. D. VEGA-CASTRO, M. MOLINA, E. CASTRO / Sentido estructural de estudiantes de Bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

R. CANTORAL, V. GARNICA / 2012, año nuevo: Relime – Bolema. A. BARBOSA, I. VALE, P. PALHARES / Pattern tasks: thinking processes used by 6th grade students. F. CORDERO OSORIO, H. SILVA-CROCCI / Matemática educativa, identidad y latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. M. A. LONJEDO VICENT, M. P. HUERTA PALAU, M. CARLES FARIÑA / Conditional probability problems in textbooks an example from Spain. M. L. OLIVERAS, M. E. GAVARRETE / Modelo de aplicación de etnomatemáticas en la formación de profesores para contextos indígenas en Costa Rica. M. STEPHENS, A. RIBEIRO / Working towards algebra: the importance of relational thinking.

VOLUMEN 16, 2013

R. CANTORAL / Tendencias: Los métodos de investigación para profesionalización docente en matemáticas. N. CLIMENT, J. ROMERO CORTÉS, J. CARRILLO, Mª C. MUÑOZ CATALÁN & L. C. CONTRERAS / ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?. A. ALVARADO MONROY & Mª T. GONZÁLEZ ASTUDILLO / Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. E.ALONSO SÁNCHEZ ORDOÑEZ / Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. S. SANHUEZA, M. C. PENALVA & M. FRIZ / Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría.

R. CANTORAL / *Relime:* DOI y OJS. M. ARAVENA DÍAZ & C. CAAMAÑO ESPINOZA / Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. S. INZUNSA CAZARES & J. V. JIMÉNEZ RAMÍREZ / Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. M. JARERO KUMUL, E. APARICIO LANDA & L. SOSA MOGUEL / Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior. J. RUIZ DE GAUNA GOROSTIZA, P. DÁVILA BALSERA, J. ETXEBERRIA MURGIONDO & J. SARASUA FERNÁNDEZ / Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970 - 2005.

problème de modélisation. B. PARZYSZ / Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. A. BRACONNE-MICHOUX / Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec et pour les futurs enseignants ? K. NIKOLANTONAKIS, L. VIVIER / Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve. S. COUTAT / Quel espace de travail géométrique pour l'apprentissage des propriétés au primaire ? X. XISTOURI, D. PITTA-PANTAZI, A. GAGATSIS / Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. P. MICHAEL-CHRYSANTHOU, A. GAGATSIS / Ambiguity in the way of looking at geometrical figures. E. MONTOYA - DELGADILLO, A. MENA-LORCA, J. MENA-LORCA / Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. I. ELIA, K. EVANGELOU, K. HADJITTOOULI, M. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN / A kindergartner's use of gestures when solving a geometrical problem in different spaces of constructed representation.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2014

R. I. BARRERA / Un Espace de Travail Mathématique pour la mise en evidence des significations géométriques de la multiplication de nombres réels et complexes : mediation semiotique et parcours des élèves. A. GAGATSIS, E. DELIYIANNI / Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. V. CARRIÓN, F. PLUVINAGE / Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. D. TANGUAY, L. GEERAERTS / Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : Comment intégrer le travail avec les LGD ? M. TESSIER-BAILLARGEON, P. R. RICHARD, N. LEDUC, M. GAGNON / Conception et analyse de geogebratutor, un système tutoriel intelligent : genèse d'un espace de travail géométrique idoine. M. BLOSSIER, P. R. RICHARD / Le travail mathématique en interaction avec un logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle. J. MITHALAL-LE DOZE / Initier un processus de preuve mathématique dans un environnement de géométrie dynamique 3D. I. Mª GÓMEZ-CHACÓN, J. ESCRIBANO / Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. A. KUZNIAK / Travail mathématique et domaines mathématiques. S. R. DE COTRET / Espaces de travail / espaces de connaissances : Peut-on imaginer une navette pour y voyager ? D. ZALDÍVAR, C. CEN CHE, E. BRICEÑO, M. MÉNDEZ, F. CORDERO / El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. O. FIGUERAS, P. FLORES, F. PLUVINAGE / La mediación docente y los espacios de trabajo matemático.

VOLUMEN 18, 2015

VOLUMEN 19, 2016

R. CANTORAL / Retos y logros para la comunidad de Matemática Educativa... / J. B. BÚA-ARES, Mª T. FERNÁNDEZ, Mª J. SALINAS / Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. T. GARCÍA, P. GONZÁLEZ, J. A. GONZÁLEZ, C. RODRÍGUEZ, L. BETTS / On-line assessment of the process involved in maths problem - solving in fifth and sixth grade students: self - regulation and achievement. C. DIAS, L. SANTOS / Portefólio reflexivo de matemática enquanto instrumento de autorregulação das aprendizagens de alunos do ensino secundário. D. LAGO-PEREIRA, M. DE CARVALHO-BORBA / Seres humanos - com - internet ou internet - com - seres humanos: uma troca de papéis?

R. CANTORAL / La publicación científica y algunos fenómenos emergentes. M. DEL P. BELTRÁN-SORIA, G. MONTIEL-ESPINOSA / La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. C. STEEGMAN, A. PÉREZ-BONILLA, M. PRAT, A. A. JUAN / Math-Elearning@cat: Factores claves del uso de las TIC en Educación Matemática Secundaria. P. GÓMEZ, M. C. CAÑADAS / Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. M. P. HUERTA, P. I. EDO, R. AMORÓS, J. ARNAU / Un esquema de codificación para el análisis de las resoluciones de los problemas de probabilidad condicional.

SUSCRIPCIÓN A RELIME

Costo del volumen 19 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Volumen 19, Número 3

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400 México, D. F.

Noviembre de 2016
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes