EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 26-1

9 771665 243002 02601

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 26, Núm. 1, marzo 2023

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 26, Núm. 1, 2023

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidenta:* Dra. Carmen Evarista Matías Pérez; *Secretaria:* Lic. Elizabeth Mariscal Vallarta; *Tesorera:* Mg. Santa Daysi Sánchez González; *Vocal Norteamérica:* Dra. Evelia Reséndiz; *Vocal Caribe:* Dra. Anelys Vargas Ricardo; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto; *Vocal Sudamérica:* Mg. Mónica Marcela Parra - Zapata.

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica - Scopus – Elsevier Database • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2023 Impresa en México

Volumen 26 – Número 1 – 2023

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2023

Volumen 26 Número 1 Marzo de 2023

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Dirección fiscal: Norte 79-A, No. 221. Col. Clavería, Alcaldía Azcapotzalco, C. P. 02080. Ciudad de México, México., www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel-Espinosa, direccion@relime.org.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

EDITORIAL

LA REVISIÓN COMO DIÁLOGO. UNA PIEZA CLAVE PARA EL CRECIMIENTO COLECTIVO EN LA COMUNICACIÓN CIENTÍFICA

Review as dialogue. A key for collective growth in scientific communication

Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

En la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime) se adoptó la *evaluación por pares doble ciego* desde su creación, el modelo donde se conserva el anonimato tanto de evaluadores como de autores. A pesar del debate en torno a la evaluación por pares en general, el anonimato de la autoría en el modelo doble ciego pudo haber favorecido la participación de, por ejemplo, mujeres y minorías en la investigación científica en el mundo (ver la reflexión que plantea Darling, 2014), a propósito de los sesgos hacia el prestigio de autores y de instituciones, así como a ciertas nacionalidades e idiomas, que se reportaron en diversos estudios al aceptar los artículos cuando es conocida la autoría (ver la revisión de Tennant et al., 2017).

Y es que por más que se le considere el estándar de oro en la comunicación científica, la revisión por pares es una creación humana que vamos adaptando y modificando en la comunidad académica según paradigmas, innovaciones tecnológicas y necesidades disciplinares y regionales –todos estos, factores de naturaleza humana también–. “La revisión por pares es el proceso por el que un trabajo de investigación científica es evaluado por otros colegas, debidamente cualificados y capaces de juzgarlo en términos de originalidad, solidez e importancia” (COPE, 2017, p. 1, traducción propia), pero para que ésta logre cumplir tal estándar debe haber compromisos y participación de todas las partes

Montiel-Espinosa, G. (2023). La revisión como diálogo. Una pieza clave para el crecimiento colectivo en la comunicación científica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(1), 5-12. https://doi.org/10.12802/relime.23.2610

involucradas en el proceso editorial: revisores, autores y editores; aunque el término nos lleve a interpretar que la responsabilidad recae solo en las y los revisores.

La revisión por pares es en realidad un diálogo que ha sufrido las peripecias propias de la vida académica en una sociedad que debe darle un valor a la actividad científica. A inicios del siglo XIX la "revisión por pares" consistía en una conversación entre autores y editores, es hasta las décadas post-Segunda Guerra Mundial, cuando el desarrollo de la *economía moderna del prestigio académico* se basó en la calidad o excelencia que proporcionaba la publicación en revistas científicas, que la evaluación por pares aquiere el formato tradiconal que se conoce hasta hoy día y se convierte en el mecanismo para legitimizar las revistas (Tennant et al., 2017). El capítal simbólico que ha ido adquiriendo se refleja en su presencia en todos los sistemas de evaluación y de asignación de estímulos y financiamiento por parte de: instituciones, consejos, ministerios, academias, organizaciones profesionales, entre otros.

En el caso de nuestro quehacer, la revisión por pares en el proceso editorial de las revistas científicas, ésta debe apoyarnos en al menos dos tareas fundamentales:

- en la decisión sobre la aceptación de un manuscrito, y
- en la mejora del manuscrito.

En la Relime, por ejemplo, la primera es un apoyo a la Dirección y al Equipo Editorial; la revisión recomienda si el manuscrito debe ser aceptado, aceptado con correcciones (menores o mayores), reestructurarse o rechazarse. El dictamen final es decisión de la Dirección Editorial, en discusión con el editor asignado dentro del Equipo Editorial, con base en *el contenido* de las evaluaciones –no solo en la recomendación– y teniendo siempre en consideración el *Enfoque y Alcance* de la revista: publicar artículos inéditos y arbitrados, con resultados *originales de investigación* científica en *Matemática Educativa*.

Por otro lado, el intercambio que logramos, con la mediación del Equipo Editorial, entre autores y revisores, permite robustecer los manuscritos con la mirada externa y especialista del campo, independientemente de si resultan aceptados o no. Incluso cuando un manuscrito es rechazado desde la pre-revisión, que sucede muchas más veces de las que una quisiera, la experiencia debe considerarse un momento de aprendizaje porque la escritura científica es una actividad profesional y toda persona quien desee llevarla a cabo debe realizarla con el nivel de atención que ésta demanda –empezando por conocer en profundidad la revista en la que se desea publicar–.

"La atención detallada y la reflexión madura requeridas para una revisión constructiva llevan tiempo" (Rennie, 2016, p. 33, traducción propia), y esto es lo que le pedimos a las y los colegas cuando hacemos una invitación a revisar un manuscrito, que nos *donen* una buena parte de su tiempo para atender un manuscrito y reflexionar en conjunto –autores, revisores y equipo editorial– la comunicación de la investigación. La valoración crítica de la revisión por pares evalúa la calidad, originalidad y contribución del trabajo, no de la persona que lo realiza; ayuda a identificar errores, a preservar la integridad científica y, como ya mencionamos, contribuye a mejorar el manuscrito. Desafortunadamente, con frecuencia esta despersonalización resulta difícil, pero es necesaria para lograr el diálogo académico y desarrollar habilidades de escritura científica.

Si bien el anonimato de las y los revisores promueve la libertad de expresión y fomenta la franqueza, honestidad e imparcialidad del proceso de evaluación, también puede protegerles de las consecuencias de sus acciones (Nobarany y Booth, 2016). Por ello, por parte de las revistas, debemos proveerles de una política editorial transparente e instrumentos claros para llevar a cabo la revisión, además de tener un equipo editorial que juegue un rol mediador en el diálogo y que vigile el cumplimiento de tales políticas.

Hace media década, la Relime se adhirió a los códigos de conducta y las directrices de buenas prácticas de publicación del *Comité de Ética de Publicaciones* (COPE por sus siglas en inglés). Desde entonces, en sus *Consideraciones Éticas*, se han utilizado algunos estándares para editores (Kleinert y Wager, 2011a), para autores (Kleinert y Wager, 2011b) y para revisores (Hames, 2013) –derivados de las discusiones de este comité– como referentes para la toma de decisiones en torno al diálogo que emerge en una revisión por pares. Si bien todos ellos continúan siendo pertinentes, las discusiones que se han dado desde entonces en el COPE, la experiencia en la dirección editorial durante poco más de veinte meses y la documentación que realicé para la escritura de esta editorial me muestran la importancia de actualizarlos como referentes, sobre todo adaptarlos a las necesidades de nuestra disciplina y nuestra comunidad académica… lo iremos haciendo poco a poco.

A partir de la fecha en que publiquemos este número se habrá actualizado el instrumento de evaluación por pares, para los nuevos envíos, con el objetivo de hacerlo congruente con nuestras *Normas para publicación* y *Lista de comprobación para la preparación de envíos*, esto es, las políticas que se comprometen a cumplir las y los autores. Conocernos como revista y querer publicar en ella querrá decir leer con cuidado estas políticas y estar al día con sus actualizaciones, las estamos realizando en beneficio de todas y todos para promover este diálogo y con ello lograr la mejor comunicación de sus investigaciones.

Para la mayoría de nosotros la revisión por pares se ha aprendido haciéndola, retroalimentándonos respecto a las evaluaciones de otros, sea como revisores o como autores; y a partir de la experiencia hemos buscado robustecer nuestra formación y formar a las generaciones siguientes. La realidad es que el quehacer editorial y de la comunicación científica están cambiando a un ritmo tan acelerado que cada vez más iniciativas –desafortunadamente, en su mayoría del norte global– están discutiéndola con cuidado y profundidad para hacerla una práctica académica profesional y, por lo que se puede apreciar, *abierta*… y van mucho más adelante que nosotros. Hace 39 años se llevó a cabo el primer Congreso de Revisión por Pares en Chicago, Illinois, y continúa celebrándose cada cuatro años (International Congress on Peer Review and Scientific Publication, 2023); y desde 2016 se realiza anualmente la Semana de la Revisión por Pares (Peer Review Week, 2023), evento comunitario, mundial y en formato virtual. Además de la diversidad de artículos que se publican en el contexto particular de las disciplinas (por ejemplo: DiDomenico, Baker, y Haines, 2017; y los citados en esta editorial), hay una revista internacional, de acceso abierto, arbitrada e indexada, dedicada a la discusión de "todos los aspectos de la integridad en la publicación de investigaciones, incluida la revisión por pares, la presentación de informes de estudios y la ética de la investigación y la publicación" (Research Integrity and Peer Review, 2023). Iniciativas latinoamericanas podemos mencionar el Seminario Permanente de Editores, que nace en 2014 como una iniciativa de la Red de Directores y Editores de Revistas Académicas y Arbitradas de la UNAM, pero que ahora reúne y convoca a revistas de toda Iberoamérica; y LILACS (Literatura Latino-Americana e do Caribe em Ciências da Saúde), una base de datos especializada en salud con literatura científica y técnica de 26 países de América Latina y el Caribe de acceso libre y gratuito, que organiza un webinario sobre "Buenas prácticas en los procesos editoriales de revistas científicas" y que ha llevado a cabo tres de ellos en torno a la revisión por pares (Red BVS, 2020, 2019, 2021).

En los webinarios de LILACS, además de las reflexiones en torno a mejorar las prácticas de la revisión por pares, es evidente que la discusión se orienta hacia el impacto que ha tenido en ella *el paradigma abierto de la ciencia*. Necesito más de una editorial para reflexionar en torno a este tema, pero en el fondo están resaltando los cambios más obvios de modificar el modelo a la revisión por pares abierta en combinación con los modelos *pre-print*, colaborativo y post-publicación: fomentar las revisiones transparentes, constructivas, dialógicas, de mayor calidad y en tonos más amables, que logran que la vida útil del artículo no concluya en su publicación. ¿No podemos tener esto con el modelo doble ciego y una participación colectiva de la difusión del artículo? La respuesta evidente es, claro que sí. Para transitar a un modelo de revisión por pares abierta debemos estar seguros de que la comunidad ha adoptado prácticas de ciencia abierta para realizar la investigación y, en consecuencia, la puede comunicar bajo el marco de este mismo paradigma. Entonces, ¿podríamos hacerlo?, ¿entendemos ya cómo se lleva a cabo la Ciencia Abierta en las Ciencias Sociales en general y en la investigación en Matemática Educativa en particular?, ¿contamos con los recursos para hacerlo?

Al escuchar los webinarios de LILACS me fue clara la dirección en la que van las cosas: *lo abierto*, pero al identificar que la mayoría de las referencias utilizadas por los ponentes no eran de nuestra región pude entender por qué nos resulta tan complejo aterrizar estas propuestas en acciones concretas de nuestro quehacer académico cotidiano. Yo misma tomé sus referencias para documentar redacción de esta editorial y también las utilicé como guía para buscar en nuestra disciplina discusiones cercanas. Encontré un capítulo interesante de Sandra Crespo y Jinfa Cai (2019) donde proponen la escritura como una *comunicación con los revisores*, poniendo atención en los criterios de *coherencia*, fundamentación de las *afirmaciones* y la *contribución* de la investigación, siendo estos los que más resaltan en las evaluaciones de los revisores; también de Sandra Crespo (2016), como editora de la *Mathematics Teacher Educator*, encontré una interesante editorial donde habla de la *retroalimentación de la revisión como proceso formativo*, para repensar la forma en que leemos y damos retroalimentación a los manuscritos de nuestros pares; y, finalmente, la serie de editoriales del *Journal for Research in Mathematics Education* en 2019, sobre la escritura científica tomando en cuenta los procesos de revisión por pares que se han vivido en la revista en un lapso considerable (Cai et al, 2019a, 2019b, 2019c, 2019d). En ninguno encontré un debate en torno a la revisión por pares en sí misma y sobre las dinámicas de sus modelos, así como del impacto de estos en la investigación y sus procesos de comunicación; pero claramente resultan importantes como punto de partida para caminar hacia la revisión por pares como un diálogo para aprender y crecer en colectivo.

Después de la reflexión, es necesario que comencemos los procesos de formación de revisores desde esta perspectiva y si bien no siempre contamos con los recursos (infraestructurales, financieros o, simplemente, de tiempo) para hacerlo formalmente, podemos empezar poco a poco con aquellos que el mismo colectivo académico nos ha facilitado. Por ejemplo, el COPE tiene una Guía ética para revisores pares en español (COPE, 2017) donde explica los modelos, las responsabilidades, las acciones a realizar en el proceso de revisión e incluso una reflexión sobre la capacitación y mentoría en la revisión por pares. Por otro lado, PLoS (Public Library of Science, 2023) tiene un sitio con herramientas sencillas para realizar la revisión por pares, desde que se recibe una invitación hasta que se elabora el reporte. Son consejos generales fundamentales, aunque en ocasiones es notorio que están hechos desde la experiencia de ciertas áreas o disciplinas, no es difícil adaptar algunos aspectos a nuestro quehacer disciplinar. Finalmente, en su sección *Voice of Young Science*, una organización benéfica independiente que promueve el interés público por la ciencia y la evidencia empírica, llamada *Sense about Science*, publicó la guía *Peer Review. The nuts and bolts* (2021) dirigida a investigadores nóveles, donde incluye no solo información sobre el proceso sino las miradas y experiencias de los distintos actores que rodean al proceso de revisión por pares.

Claramente necesitamos recursos hechos por y para nuestra comunidad académica, comenzar a explorar lo que ya hay es para entender lo que necesitamos construir, ojalá podamos hacerlo desde la colaboración y el diálogo. La ciencia abierta, o al menos algunas prácticas de este paradigma, ha empezado a impactar poco a poco el proceso editorial de las revistas científicas y, en consecuencia, cambiarán las demandas a la comunicación de la investigación. Bianca Amaro (Red BVS, 2023), en un webinar de LILACS, al hablar de los *Desafíos de la transición del acceso abierto hacia la ciencia abierta en América Latina y el Caribe* –a propósito de la larga e importante tradición de acceso abierto (diamante) que tenemos en esta región– fue categórica en decir que nuestras revistas no están tan bien como merece nuestra ciencia y, de las razones que dio para apoyar tal afirmación, la que vinculó a la revisión por pares la señaló como: “No adaptadas a la ciencia abierta – vinculación con los datos, revisión por pares abierta y flujo continuo”. Quizá solo el componente del *flujo continuo* es el que más se ha visto implementado en las revistas de nuestra región y, como bien lo menciona Bianca Amaro, resulta ser una estrategia de difusión benéfica para autores, revista y público en general. La *vinculación con datos* aún requiere de mucho trabajo e inversión, hablamos desde lo más básico que es infraestructura hasta temas legales de derechos de autor. Finalmente, el tema que nos concierne en esta editorial, la *revisión por pares abierta* se resalta por su carácter transparente y dialógico.

Empecemos entonces con fomentar el diálogo en la revisión por pares, los retos por venir son muchos y de cambios profundos, solo en colaboración y diálogo podremos avanzar en la comunicación de la investigación, atendiendo las particularidades de nuestra disciplina y resaltando las aportaciones hechas desde y para nuestra región.

> “Redacta el tipo de revisión que te gustaría recibir si tú fueras la o el autor… bajo la premisa, claro, de aceptar la crítica para aprender y mejorar el manuscrito, no solo de querer recibir una aceptación”
>
> Regla de oro de la revisión por pares.

Referencias

Committee on Publication Ethics. (2017). *COPE Discussion document: Who "owns" peer reviews?* Committee on Publication Ethics. https://doi.org/10.24318/roup8ld4

Consejo COPE. (2017). *Guías éticas para revisores pares*. Committee on Publication Ethics. https://doi.org/10.24318/cope.2019.1.10

Crespo, S. (2016). Is It Educative? The Importance of Reviewers' Feedback. *Mathematics Teacher Educator,* 4(2), 122-125. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.4.2.0122

Crespo, S. y Cai, J. (2019). Writing as Communicating with Reviewers: Strategies for Anticipating and Addressing Insightful and Skeptical Reviews. En K. R. Leatham (Ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education*, *Research in Mathematics Education* (pp. 183-198). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5_13

Darling, E. S. (2014). *Use of double-blind peer review to increase author diversity.* Wiley. https://doi.org/10.1111/cobi.12333

DiDomenico, R. J., Baker, W. L. y Haines, S. T. (2017). Improving peer review: What reviewers can do. *American Journal of Health-System Pharmacy,* 74(24), 2080-2084. https://doi.org/10.2146/ajhp170190

Hames, I. (2013). *COPE Ethical guidelines for peer reviewers*. Committee on Publication Ethics. https://publicationethics.org/files/Peer%20review%20guidelines.pdf

International Congress on Peer Review and Scientific Publication (2023). https://peerreview congress.org/

LILACS, Informação Científica e Técnica em Saúde da América Latina e Caribe (2023) https://lilacs.bvsalud.org/

Nobarany, S. y Booth, K. S. (2016). *Understanding and supporting anonymity policies in peer review.* Wiley. https://doi.org/10.1002/asi.23711

Peer Review Week (2023). https://peerreviewweek.wordpress.com/

Public Library of Science (2023). PLOS Peer Review Center. https://plos.org/resources/for-reviewers/

Red BVS [@RedBVS] (15 de julio de 2020). ¿Cómo mejorar el proceso de peer review? [Video]. YouTube. https://youtu.be/O3p8ZE7vnec?si=K-bJ97CBq9ciPXPL

Red BVS [@RedBVS] (15 de septiembre de 2021). Directrices para la revisión por pares. [Video]. YouTube. https://youtu.be/JmfEDXZ3uBk?si=e9BNt-7aiHf2Wrix

Red BVS [@RedBVS] (21 de agosto de 2019). Peer Review. [Video]. YouTube. https://youtu.be/2ZlC76FmCZw?si=XN0J8P6EISkwINrq

Red BVS [@RedBVS] (28 de junio de 2023). Desafíos de la transición del acceso abierto hacia la ciencia abierta en AL&C. [Video]. YouTube. https://youtu.be/1X-orHl_mSg?si=zZiPV8H3HJJ9b8Dk

Rennie, D. (2016). Let's make peer review scientific. *Nature*, 535, 31–33. https://doi.org/10.1038/535031a

Research Integrity and Peer Review (2023). https://researchintegrityjournal.biomedcentral.com/

Seminario Permanente de Editores (2014) https://www.youtube.com/@SeminarioPermanente deEditores

Sense about Science. (2021). *Peer Review. The nuts and bolts.* https://senseaboutscience.org/activities/peer-review-the-nuts-and-bolts-2/

Tennant, J. P., Dugan, J. M., Graziotin, D., Jacques, D. C., Waldner, F., Mietchen, D., … Colomb, J. (2017). A multi-disciplinary perspective on emergent and future innovations in peer review. *F1000 Research, 6*, 1151. https://doi.org/10.12688/f1000research.12037.1

Wager, E. y Kleinert, S. (2011a). Responsible research publication: international standards for editors. A position statement developed at the 2nd World Conference on Research Integrity. En T. Mayer y N. Steneck (Eds.), *Promoting Research Integrity in a Global Environment* (pp. 317-28). Imperial College Press y World Scientific Publishing.

Wager, E. y Kleinert, S. (2011b). Responsible research publication: international standards for authors. A position statement developed at the 2nd World Conference on Research Integrity. En T. Mayer y N. Steneck (Eds.), *Promoting Research Integrity in a Global Environment* (pp. 309-16). Imperial College Press y World Scientific Publishing.

Autora

Gisela Montiel-Espinosa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. gmontiele@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

Lianggi Espinoza Ramírez, Andrea Vergara Gómez

ENSEÑANZA INTERDISCIPLINARIA MÚSICA-MATEMÁTICA: LA GUITARRA Y SU ROL PROTAGÓNICO EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA MÚSICA OCCIDENTAL

Interdisciplinary Music-Mathematics teaching: the guitar and its leading role in the historical development of western music

RESUMEN

El temperamento igual es la afinación estándar de instrumentos en Occidente y ha delineado nuestra actual manera de concebir la música. El propósito de esta investigación es explorar cómo los conocimientos puestos en uso y significados asociados al surgimiento histórico del temperamento igual en instrumentos antecesores a la guitarra pueden contribuir a un enfoque interdisciplinario para el aprendizaje de la matemática y la música. Para esto se realizó un análisis interpretativo del contenido del libro *Armonía universal* de Mersenne de 1637, y se estudió el proceso de génesis y desarrollo en el siglo XVI de los saberes presentes en este libro. Los resultados revelan que es posible repensar la enseñanza de algunos contenidos geométricos a nivel escolar, como el teorema de Euclides y la progresión geométrica, a partir del problema de la división proporcional del mástil de la guitarra. Se revela, además, que la noción de autosimilitud permitiría generar propuestas didácticas interdisciplinarias, que propicien una vinculación transversal entre la Matemática y la Música.

PALABRAS CLAVE:

- *Temperamento igual*
- *Relación Música-Matemática*
- *Guitarra*
- *Autosimilitud*

ABSTRACT

Equal temperament is the standard tuning for instruments in the West and has shaped our current way of thinking about music. The purpose of this research is to explore how the knowledge put to use and the meanings associated with the historical emergence of equal temperament, in instruments that preceded the guitar, can contribute to an interdisciplinary approach to learning mathematics and music. For this, an interpretative analysis of the content of the book Mersenne's Universal Harmony of 1637 was carried out, and the process of genesis and development in the 16th century of the knowledge present in this book was studied. The results reveal that it is possible to rethink the teaching of some geometric contents at school level, such as Euclid's theorem and geometric progression,

KEY WORDS:

- *Equal temperament*
- *Music-Math relationship*
- *Guitar*
- *Self-similarity*

Espinoza Ramírez L. y Vergara Gómez A. (2023). Enseñanza interdisciplinaria Música-Matemática: la guitarra y su rol protagónico en el desarrollo histórico de la música occidental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(1), 13 - 46. https://doi.org/10.12802/relime.23.2611. Recepción: Enero 29, 2021 / Aceptación: Agosto 12, 2023

based on the problem of the proportional division of the guitar neck. We also conclude that the notion of self-similarity would allow the generation of interdisciplinary didactic proposals that foster a transversal link between Mathematics and Music.

RESUMO

O temperamento igual é a afinação padrão para instrumentos no Ocidente e moldou nossa maneira atual de pensar sobre música. O objetivo desta pesquisa é explorar como o conhecimento posto em prática e os significados associados ao surgimento histórico do temperamento igualitário, em instrumentos que antecederam o violão, podem contribuir para uma abordagem interdisciplinar da aprendizagem da matemática e da música. Para isso, realizou-se uma análise interpretativa do conteúdo do livro A Harmonia Universal de Mersenne de 1637, e estudou-se o processo de gênese e desenvolvimento no século XVI do conhecimento presente neste livro. Os resultados revelam que é possível repensar o ensino de alguns conteúdos geométricos no nível escolar, como o teorema de Euclides e a progressão geométrica, a partir do problema da divisão proporcional do braço do violão. Concluímos também que a noção de auto-semelhança permitiria a geração de propostas didáticas interdisciplinares que fomentassem um vínculo transversal entre a Matemática e a Música.

PALAVRAS CHAVE:
- *Temperamento igual*
- *Relação Música-Matemática*
- *Violão*
- *Autossimilaridade*

RÉSUMÉ

Le tempérament égal est l'accordage standard des instruments en Occident et a façonné notre façon actuelle de penser la musique. Le but de cette recherche est d'explorer comment les connaissances mises en œuvre et les significations associées à l'émergence historique du tempérament égal, dans les instruments qui ont précédé la guitare, peuvent contribuer à une approche interdisciplinaire de l'apprentissage des mathématiques et de la musique. Pour cela, une analyse interprétative du contenu du livre L'Harmonie universelle de Mersenne de 1637 a été réalisée, et le processus de genèse et de développement au XVIe siècle des connaissances présentes dans ce livre a été étudié. Les résultats révèlent qu'il est possible de repenser l'enseignement de certains contenus géométriques au niveau scolaire, comme le théorème d'Euclide et la progression géométrique, à partir du problème de la division proportionnelle du manche de la guitare. Nous concluons également que la notion d'auto-similarité permettrait de générer des propositions didactiques interdisciplinaires favorisant un lien transversal entre les mathématiques et la musique.

MOTS CLÉS:
- *Tempérament égal*
- *Relation Musique-Mathématiques*
- *Guitare*
- *Autosimilitude*

1. Introducción

La educación integrada o interdisciplinar es un enfoque que responde a las demandas del siglo XXI. Si bien existen distintas perspectivas, es posible identificar propósitos comunes: conectar conocimientos y habilidades de distintos dominios, promover el aprendizaje auténtico, fomentar métodos centrados en el estudiante para la resolución de problemas, y considerar las motivaciones y contextos de la comunidad educativa (Chi, 2021). Un enfoque interdisciplinario implica un intercambio y confrontación entre dos o más disciplinas, es decir, busca la interacción y el enriquecimiento mutuo (Ander-Egg, 1999). De ahí la dificultad que involucra generar situaciones de aprendizaje que realmente fomenten relaciones interdisciplinarias. La Educación Matemática aún presenta varios desafíos en este sentido, y uno de ellos está asociado a la incorporación de encuadres históricos-culturales que permitan rastrear las particularidades de la Matemática en su vinculación con otras disciplinas (Doig y William, 2019). Esta investigación se propone precisamente indagar en las bases históricas y epistemológicas de los vínculos entre la Matemática y la Música, considerando un problema que involucró construcción de conocimiento para ambas disciplinas.

En la actualidad se busca que los aprendices vinculen la Matemática que aprenden en la escuela con la experiencia social que tienen como individuos Así, las iniciativas de educación interdisciplinaria e integrada deberían propiciar la resolución de problemas reales que aborden los intereses y el disfrute del estudiantado (Homes *et al.*, 2013). Las vivencias y experiencias de los estudiantes se hacen palpables a través de los objetos culturales con los cuales interactúan, entre los que destacan los instrumentos musicales. Y la guitarra, acústica o eléctrica, no solo ha sido uno de los instrumentos más populares del último siglo, sino también ha jugado un rol histórico protagónico en la constitución de lo que, en el actual occidente, entendemos por música. En efecto, la afinación usada en la música actual —el temperamento igual— surgió gracias a la invención y popularización de instrumentos de cuerdas con trastes, predecesores a la guitarra.

El estudio de la relación Música-Matemática es basto. Existen investigaciones que ahondan el estudio musical desde su relación con las frecuencias mediante el uso de series y el análisis físico-matemático de la vibración de la cuerda mediante funciones trigonométricas (Benson, 2006; Wright, 2009). También, existen estudios que indagan en el uso de la Matemática para la realización de composiciones musicales (Pareyon, 2011; Xenakis, 1992). En esta misma línea, en Latinoamérica se han logrado grandes avances de investigación sobre las conexiones entre Matemática y producción musical, considerando especialmente propuestas y métodos científicos (Pareyon *et al.*, 2022). Respecto al uso de la relación Música-Matemática en la Educación Matemática, se ha estudiado, por ejemplo, cómo la relación Música-Matemática puede potenciar la memorización de información, de patrones numéricos o de figuras geométricas (Trinick *et al.*, 2016), cómo el uso de aspectos rítmicos o de intervalos musicales puede contribuir en la enseñanza de las fracciones o de los números irracionales (Nisbet, 1991; Walsh, 2010; Conde *et al.*, 2011) y también la integración entre discursos matemáticos y musicales en procesos de creación musical (Venegas-Thayer, 2019). A pesar de la diversidad, la mayoría de las investigaciones se centran en contenidos matemáticos como operaciones numéricas y fracciones, sin enfatizar en estrategias didácticas que promuevan el aprendizaje integrado de la Música y la Matemáticas (Oliveira, 2023). Además, de acuerdo con la indagación realizada, son escasas las investigaciones ligadas al uso del temperamento igual que busquen integrar Música y Matemática con fines educativos (e.g. Chao-Fernández *et al.*, 2019).

El temperamento igual se creó y formuló teóricamente durante el siglo XVI en y para instrumentos de cuerdas con trastes. La teorización geométrica de este temperamento fue realizada por el español Francisco de Salinas (1513-1590) y el italiano Josefo Zarlino (1517-1590). Esta teorización ha sido estudiada en el ámbito de la musicología por García-Pérez (2003), García-Pérez (2014) y Barbour (2004/1951). A su vez, Floris Cohen (1987) y Rasch (2008) analizaron la formulación aritmética del temperamento igual del matemático y científico húngaro Simón Stevin (1548-1620). Además, Espinoza *et al.* (2020) analizaron el proceso de génesis del temperamento igual, describiendo tanto su uso germinal en los instrumentos de cuerdas con trastes como su formulación teórica en el siglo XVI. Medio siglo después de esta teorización, el clérigo y científico francés Marín Mersenne (1588-1648) publica un libro de teoría musical en 1637, llamado *Armonía universal*, en la que sintetiza, entre otros sistemas de afinación usados en la época, la construcción del temperamento igual.

Este temperamento, que divide una octava en 12 partes iguales (12 notas), ha delineado nuestra manera de concebir la música en Occidente. En términos prácticos, define cómo se afinan las cuerdas de un piano y la cantidad de teclas del mismo, los lugares donde se hacen orificios a los instrumentos de viento o las ubicaciones de los trastes sobre los mástiles de las guitarras y bajos. Dada la importancia que tiene en la actualidad este sistema de afinación, nos preguntamos ¿cómo fue su proceso de génesis y desarrollo histórico?, ¿qué conocimientos matemáticos y significados asociados fueron usados en medio de este proceso? y ¿cómo esta información puede ser útil para promover enfoques interdisciplinarios entre Música y Matemática en el aula de secundaria? Para responder estas preguntas se plantea como objetivo explorar cómo los conocimientos puestos en uso y significados asociados al surgimiento histórico del temperamento igual en instrumentos de cuerda con trastes pueden contribuir a un enfoque interdisciplinario para el aprendizaje de la Matemática y la Música. Para ello se asume una perspectiva histórica sociocultural, a través del estudio de los procesos de constitución de los saberes que dieron origen al temperamento igual, presentes en el libro de Mersenne (1637). A continuación, presentamos el marco teórico de nuestra investigación.

2. Marco teórico

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se considera al saber social, cultural e históricamente situado (Cantoral, 2013). En esta línea, se postula que "para atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento […] se deberá *problematizar al saber* en el más amplio sentido del término, situándole en el entorno de la vida del aprendiz" (Cantoral, 2013, p. 51). Siguiendo esta idea, la presente investigación problematiza el mástil de la guitarra, un instrumento tocado particularmente por muchos adolescentes y jóvenes en edad escolar. Nos preguntamos ¿por qué los trastes del mástil se ubican de esa manera? Esto nos llevó a considerar todo un proceso histórico y cultural de construcción de conocimientos, donde la Matemática juega un rol protagónico.

Para estudiar este proceso de construcción de conocimientos, usamos el modelo teórico para el estudio de la constitución del saber propuesto por Espinoza *et al.* (2018), que permite desarrollar comprensiones amplias acerca de los procesos de construcción del saber matemático y su devenir histórico, social y cultural. A su vez, en esta investigación concebimos al saber como conocimiento puesto en uso. En este sentido, "el conocimiento es la información sin uso, mientras el saber es la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática" (Cantoral, 2013, p.52). Se asume que lo que hoy existe deviene de un proceso que puede ser caracterizado mediante su *génesis*, *desarrollo* y *transversalidad* (Figura 1). La *génesis* hace alusión a los momentos en los que el saber surge en el contexto del ser humano resolviendo problemas. Estos momentos germinales son de gran importancia para la epistemología, pues determinan significativamente la forma, cualidades intrínsecas y significados del saber en cuestión. El análisis de estos momentos permite "explorar tanto la producción y naturaleza del saber, como aspectos relativos a su devenir en el tiempo" (Espinoza *et al.*, 2018, p. 253).

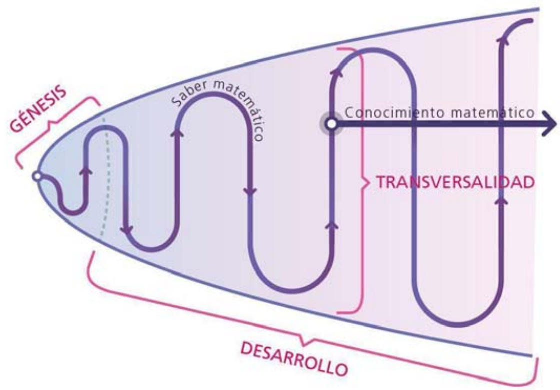


Figura 1. Esquema del modelo teórico para el estudio de la constitución del saber (Espinoza *et al.*, 2018, p. 252)

A su vez, el *desarrollo* da cuenta de cómo, en su devenir histórico, el saber transita hacia discursos científicos y escolares. Los saberes pasan por un proceso de desarrollo y toman paulatinamente su forma en el seno de disciplinas científicas, técnicas y/o prácticas, mediante procesos de disciplinarización, escolarización y/o circulación de saberes. En este desarrollo, el saber "tiende a la especialización y su consecutiva fragmentación" (p. 253). Por último, la *transversalidad* expresa el cómo el saber se constituye en el uso del mismo en diversos ámbitos de acción en prácticas humanas, principalmente, mediante prácticas que son ancestrales, permanecen en el tiempo y se desarrollan en distintos ámbitos culturales, como es el caso de la música. En definitiva, siguiendo a Espinoza *et al.* (2018, p. 253), se tiene lo siguiente:

- La *Génesis:* Explora la pregunta ¿cómo el saber llega a ser? Aborda aspectos relativos a su producción y naturaleza, situándose en contextos, intencionalidades y prácticas específicas.
- El *Desarrollo:* Explora la pregunta ¿cómo el saber es difundido? Aborda aspectos sobre su devenir histórico y sus tránsitos hacia y entre discursos disciplinares y escolares.
- La *Transversalidad:* Explora la pregunta ¿cómo este saber vive en diversas prácticas? Aborda el uso y desarrollo en prácticas científicas, técnicas, artísticas y cotidianas.

Al respecto, al explorar al saber nos interesa, en parte, analizar tanto los conocimientos puestos en uso como los procedimientos utilizados, con miras a develar significaciones del conocimiento matemático que devienen del uso en contextos específicos. En efecto, se concibe que "el significado deviene de este modo del uso situado que se dé al objeto y a sus procesos asociados a través de la actividad práctica donde el niño, el joven o el adulto dotan de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales" (Cantoral *et al,* 2015, p. 16).

3. Consideraciones metodológicas

Asumiendo un enfoque cualitativo, se analizan documentos históricos. La selección e interpretación de las obras se realizó siguiendo las recomendaciones para el análisis documental de Bowen (2009). Primero se analizó la obra *Harmonie Universelle* de Mersenne (1637). Se escogió este libro dado que es una de las descripciones más completa de la teoría musical de mediados del siglo XVII en Europa y sintetiza el desarrollo de la teoría musical de su época, incluyendo elementos de música práctica y la formulación teórica del temperamento igual del siglo XVI. Su selección también se debió a las características del autor. En efecto, a diferencia de otros autores de tratados musicales de la época, los cuales eran teóricos musicales, Mersenne fue principalmente un matemático y un científico. Esto resulta de interés dado el propósito de estudiar la relación entre Música y Matemáticas. Realizamos un *análisis interpretativo* de contenido, el cual tiene como propósito identificar e inferir los significados denotativos —que se manifiestan de forma directa y literal— y los significados connotativos —que se infieren, considerando de manera conjunta elementos textuales y contextuales del corpus— (Drisko y Maschi, 2016) de la obra de Mersenne (1637). Para identificar los significados denotativos, se consideraron tres momentos, a saber: inmersión, focalización y profundización.

En el primer momento, realizamos una inmersión al contenido del libro, con miras a entender el contenido de la obra y seleccionar los capítulos a analizar, los cuales fueron los siete libros de los instrumentos. En el segundo momento, de focalización, identificamos en estos capítulos todas las proposiciones que hacen alusión al temperamento igual, y se seleccionaron aquellas que explicaban métodos de construcción. Por último, en el momento de profundización, se analizaron las proposiciones seleccionadas, identificando los métodos presentes en Mersenne (1637) para la construcción del temperamento igual. Tales proposiciones (que abreviaremos prop.) fueron las siguientes: prop. XIV y XV del libro I, prop. VII del libro II, prop. XVIII y XIX del libro IV, prop. XV, XXXVIII y XLV del libro VI.

Posteriormente, se analizó el proceso de constitución del saber matemático presente en dichas proposiciones. Para esto, primero indagamos la existencia de los tres métodos en obras del siglo XVI mediante el estudio de fuentes secundarias de musicología que han estudiado el proceso de formulación teórica germinal del temperamento igual (Floris Cohen, 1987; García-Pérez, 2003, 2014; Barbour, 2004/1951; Rasch, 2008; Van Wymeersch, 2008). Después, realizamos una revisión en las proposiciones de las fuentes originales en las que se formula teóricamente el temperamento igual (Salinas, 1577; Zarlino 1558, 1571, 1588; Stevin, 1585). Además, revisamos las obras de los teóricos de la música Faber Stapulensis (1496), Fogliani (1529), Bermudo (1555) y de los matemáticos Frisius (1585) y Bobillier (1827). En esta investigación presentamos de manera sintética el análisis de esta génesis, profundizando en elementos que aportan a nuestro objetivo de investigación. Un análisis filosófico más detallado de este análisis puede consultarse en Espinoza *et al.* (2020).

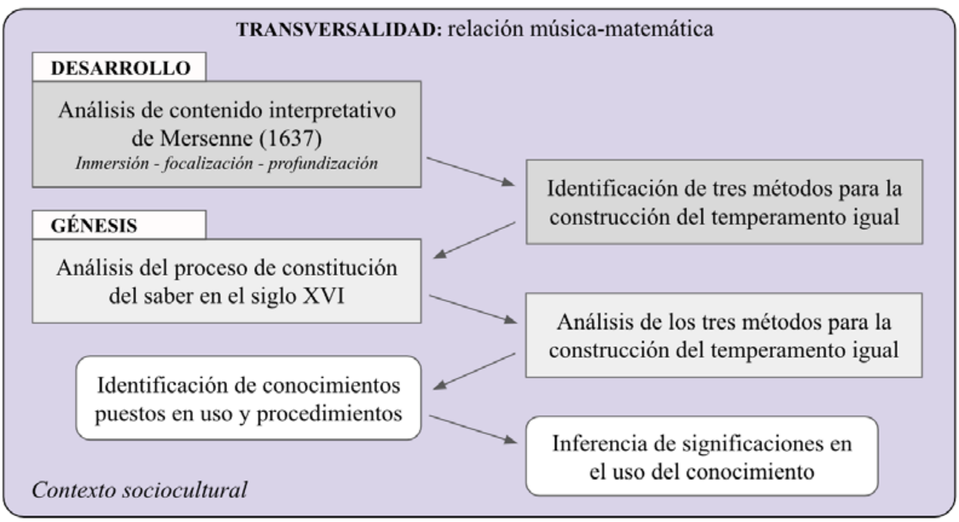


Figura 2. Esquema del proceso metodológico seguido en esta investigación

La revisión señalada en el párrafo anterior permitió además situar y contextualizar el trabajo desarrollado por Mersenne (1637). Considerando esta base contextual, como evidencia del proceso de constitución del saber del siglo XVI, se analizaron los tres métodos para la construcción del temperamento igual en las proposiciones seleccionadas en Mersenne (1637). Finalmente, en esta etapa del análisis de contenido, se identifican los procedimientos y conocimientos puestos en uso en cada uno de los métodos, con el propósito de inferir los significados connotativos propios del uso del conocimiento matemático en la formulación del temperamento igual (Figura 2).

4. Resultados

4.1. *Génesis: Surgimiento y formulación matemática del temperamento igual en el siglo XVI*

El sistema de afinación usado actualmente en Occidente es el temperamento igual. Para entender este temperamento y explorar sus procesos de génesis y desarrollo, hay que partir considerando el sistema de afinación usado en la Edad Media: el sistema pitagórico. Este sistema, ya en desuso en los instrumentos actuales, divide la cuerda mediante razones. Estas razones, a su vez, definían los intervalos musicales (½ definía la octava, ⅔ la quinta, ¾ la cuarta, etc.). Esto se explica visualmente en la figura 3, considerando la posición actual de los trastes de la guitarra, para una mejor comparación. Para el siglo XVI este sistema de afinación ya cumplía dos mil años de uso y desarrollo en Occidente.

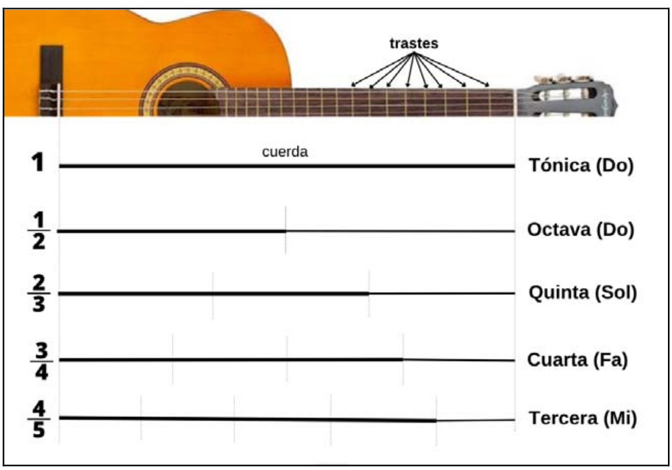


Figura 3. División pitagórica de la cuerda y su ejemplo para la tonalidad de Do

Ahora bien, durante el siglo XVI ocurre un hecho que revolucionó por completo la teoría y práctica musical de la Edad Media: la introducción de trastes a los instrumentos de cuerda con mástil. Estos instrumentos fueron el laúd, la viola y la vihuela, instrumentos predecesores de la guitarra, el bajo y el ukelele, entre otros (Figura 3). Al introducir los trastes sobre los mástiles, se creó una manera de dividir el traste que en términos geométricos es continuamente proporcional (Figura 4). Es así como nace el temperamento igual, el cual es el sistema musical que usamos en la actualidad.

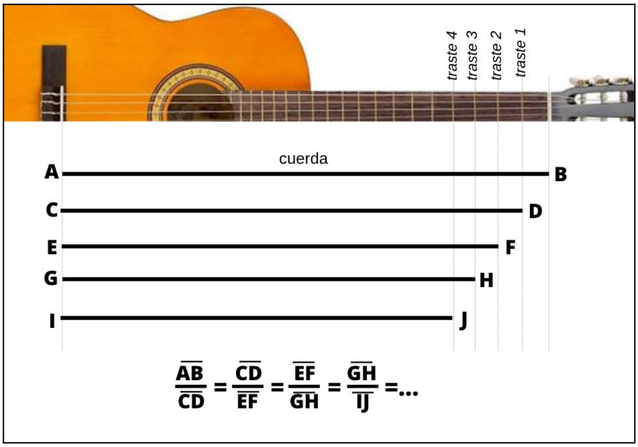


Figura 4. División proporcional del mástil (temperamento igual)

Espinoza *et al.* (2020) sostienen que existe evidencia del uso de instrumentos de cuerda con mástil en el mundo árabe desde el siglo VII. Sin embargo, fue en el siglo XVI que se le incluyeron trastes. Y esto ocurrió, dado que, en este siglo y en el contexto del renacimiento europeo, hubo cambios en la estética y el gusto musical en relación a los siglos anteriores. En efecto, en la Edad Media se valoró y desarrolló la música coral. Sin embargo, en el siglo XVI se dio una mayor preponderancia al uso de instrumentos musicales. La existencia de los trastes permite que personas con poco conocimiento musical puedan tocar estos instrumentos. Sin embargo, bajo el sistema de afinación pitagórico los trastes no quedan rectos (como se puede apreciar en la figura 5). En efecto, y a diferencia de otros instrumentos en los que cada cuerda se afina por separado, en los instrumentos de cuerdas con mástil los trastes rectos afectan simultáneamente a todas las cuerdas.

Figura 5. Muestra de división del mástil para tocar afinaciones pitagóricas del siglo XVI

En definitiva, las dificultades técnicas de la fabricación de instrumentos y el carácter más simple de su uso práctico, justificó que proliferaran los trastes rectos en la época (Figura 6). Con tales trastes no se siguió el sistema de afinación pitagórico (½, ⅔, ¾, etc.), más bien, era una división continuamente proporcional del mástil. Tal división de afinación alcanzó gran popularidad, al punto que su uso en instrumentos de cuerda con trastes se masificó durante el siglo XVI (Espinoza *et al.*, 2020). Dado el uso masivo de los instrumentos de cuerda con trastes, teóricos musicales de la segunda parte del siglo XVI se interesaron en el temperamento igual como objeto de conocimiento. Fue así como surgió la formulación teórica del temperamento igual.

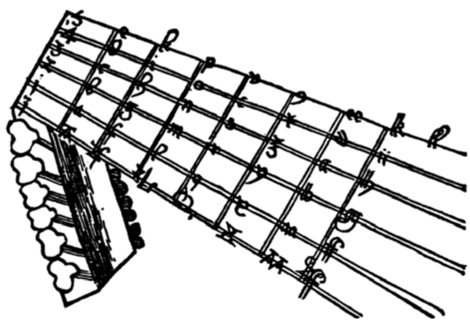


Figura 6. Ilustración de la ubicación de los trastes en instrumentos de cuerda con mástil publicada en 1511 (Virdung, 1993, p. 157)

El temperamento igual consiste en la división de la octava en doce partes iguales. Esta igualdad no se refiere a una longitud, sino hace referencia al sonido. Es decir, se refiere a intervalos de sonido que ascienden o descienden con base en una misma razón. De esta manera, en términos geométricos la división en *partes iguales* debe entenderse como división proporcional de longitudes. Cabe señalar que esta división de intervalos de sonido en partes iguales se puede realizar, de forma geométrica, mediante el uso del teorema de Euclides. Nos referimos a la proposición 13 del libro VI de los *Elementos* de Euclides, en la que se tiene, siguiendo la figura 7, que AB/BD = BD/BC.

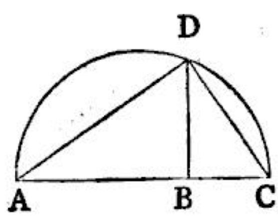


Figura 7. Teorema de Euclides en Simson (1774, p. 163)

Espinoza *et al.* (2020) señalan que la formulación teórica del temperamento igual puede ser analizada en tres momentos. En un primer momento, esta formulación teórica hizo alusión a la división de intervalos musicales en partes iguales. Teóricos musicales griegos de la antigüedad plantearon la imposibilidad de dividir un tono en *partes iguales* (Espinoza *et al.*, 2020). También Erasmo Heretius, un reconocido teórico de la música de su época, sostuvo en 1498 la imposibilidad de dividir ciertos intervalos musicales en *partes iguales*. Sin embargo, en 1504 se retracta y señala que esto sí es posible (Van Wymeersch, 2008). En nuestra indagación encontramos como referencia más antigua, de un uso explícito del teorema de Euclides para la división de intervalos musicales en *partes iguales,* a Faber Stapulensis (1496). Este autor usó el teorema de Euclides para dividir en *partes iguales* cuatro intervalos musicales (Figura 8). Con base en esta evidencia, ubicamos la génesis de la división de intervalos musicales en *partes iguales* entre la última década del siglo XV y la primera década del siglo XVI.

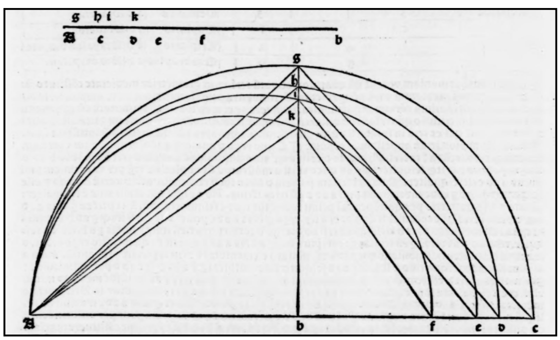


Figura 8. Uso del teorema de Euclides para dividir consonancias (Faber Stapulensis, 1496, p. 111)

Espinoza *et al.* (2020) también señalan que, a lo largo del siglo XVI diversos teóricos musicales usaron el teorema de Euclides para dividir intervalos musicales en *partes iguales* (Figura 9). Por ejemplo, está el caso de Fogliani (1529), Bermudo (1555), Zarlino (1571) y Salinas (1577). Tales teóricos musicales utilizaron estas divisiones en la fabricación de diversos temperamentos o afinaciones musicales (García-Pérez, 2003; Espinoza *et al.*, 2020).

En un segundo momento de la formulación del temperamento igual, encontramos su planteamiento teórico (Espinoza *et al.*, 2020). Esta teorización fue primero planteada por Salinas (1577) y posteriormente desarrollada con exhaustividad por Zarlino (1588). Para dividir el mástil en doce *partes iguales*, estos teóricos usaron tanto el teorema de Euclides como otros métodos geométricos-mecánicos que permitían encontrar dos o más medias proporcionales entre una magnitud y su mitad. Tales construcciones geométricas (Figura 10) pueden ser consultadas en detalle en García-Pérez (2003) y en Espinoza *et al.* (2020).

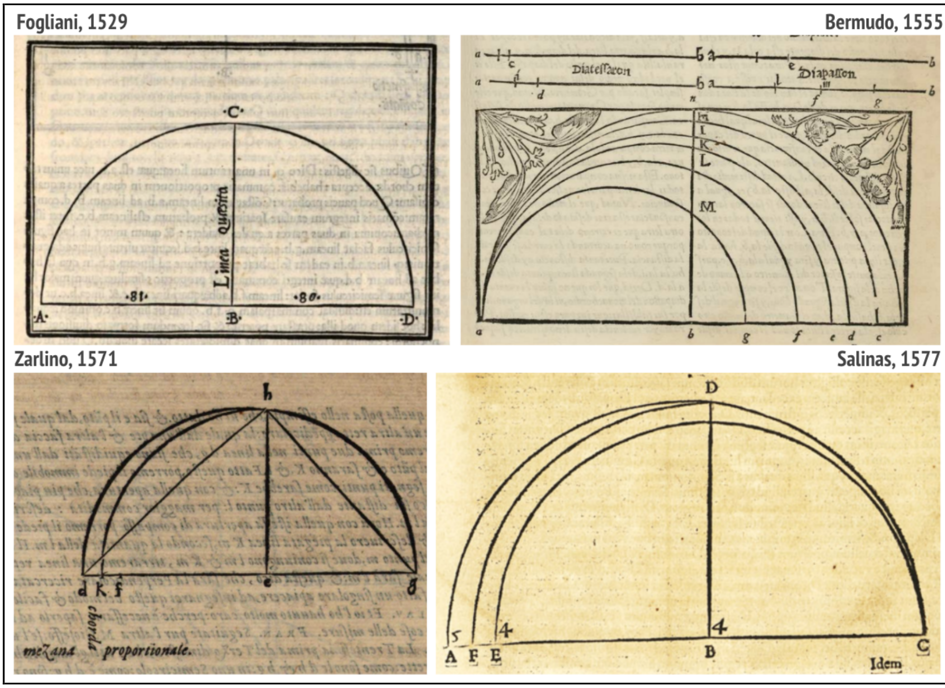


Figura 9. Uso del teorema de Euclides para la división de intervalos musicales en *partes iguales* (Fogliani, 1529, p. XXXVI; Bermudo, 1555, p. LXviii; Zarlino, 1571, p. 161; Salinas, 1577, p. 158)

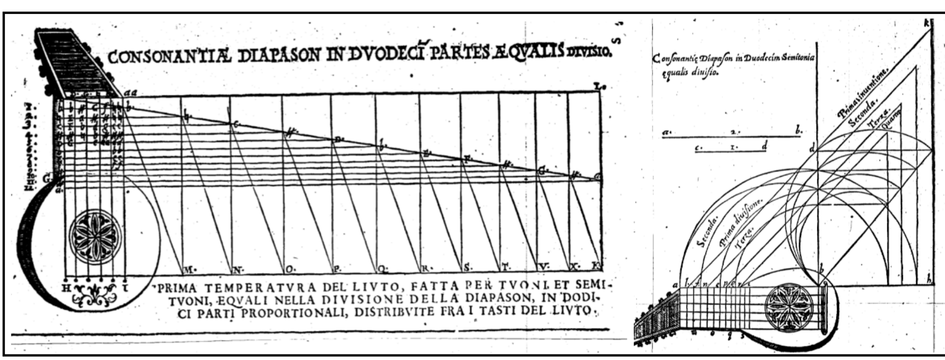


Figura 10. Construcciones geométricas del temperamento igual mediante medias proporcionales (Zarlino, 1588, p. 209 y 211)

Un tercer momento de la formulación teórica del temperamento igual lo encontramos en los desarrollos numéricos realizados por Simón Stevin (Espinoza *et al.*, 2020). Rasch (2008) plantea que, en la década de 1580, Stevin desarrolla una resolución aritmética al problema del temperamento igual y calcula aproximaciones numéricas para la división de la octava en doce *partes iguales* (Figura 11). En paralelo, Stevin publicó su *L'Arithmetique* en 1585, una obra en la que cuestiona la consideración de las magnitudes inconmensurables como irracionales o inexplicables. Stevin postula que, en aritmética, inconmensurabilidad no implica algo que sea inaccesible a la exploración racional. Así, en el contexto de la teorización del temperamento igual, los irracionales son por primera vez considerados como números pertenecientes a la aritmética (Van Wymeersch, 2008).

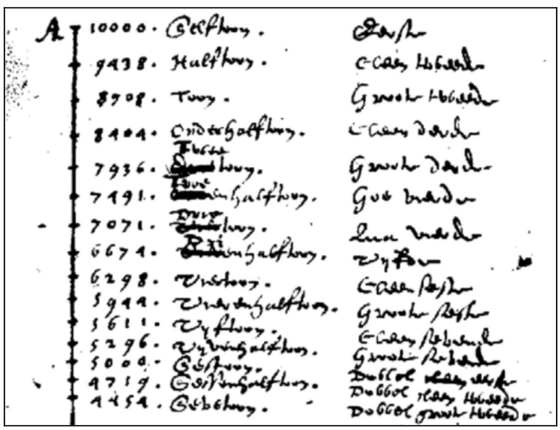


Figura 11. Registro de la formulación aritmética del temperamento igual de la década de 1580 en el tratado de música de Simón Stevin (Rasch, 2008, p. 273)

En síntesis, en lo referente a la *génesis* del temperamento igual, sostenemos que este surge tanto en la práctica de construcción y uso de instrumentos de cuerda con trastes como en su posterior formulación teórica. En tal formulación, los teóricos musicales no sólo procuraron posicionar a este temperamento en el ámbito disciplinar de la teoría musical, sino también buscaron brindar elementos prácticos para la construcción del temperamento igual en instrumentos de cuerda con trastes.

4.2. *Desarrollo: el temperamento igual en la Armonía universal de Mersenne (1637)*

Décadas después de la formulación teórica del temperamento igual, el clérigo y científico Mersenne sistematiza estos conocimientos en su *Armonía Universal*, la obra de teoría musical escrita en francés más completa de su época. Situamos a este libro en el momento de *desarrollo* del saber, dado que los conocimientos que desarrolla surgieron y fueron usados en el momento de *génesis* descrito en la sección anterior. Al ser un científico, Mersenne hace transitar estos saberes al ámbito de la ciencia, contribuyendo a la disciplinarización de los mismos. Por esto, Mersenne nos permite mirar, desde los ojos de un científico, la relación Música-Matemática en la formulación teórica del temperamento igual. Habiendo señalado esto, a continuación, presentamos los tres métodos para la construcción del temperamento igual identificados en nuestro análisis de Mersenne (1637).

4.2.1. *El método de los fabricantes de instrumentos*

Un primer método que encontramos en Mersenne (1637) es el que usaron los fabricantes de instrumentos durante el siglo XVI. En la primera proposición del libro segundo de los instrumentos, Mersenne señala lo siguiente (Figura 12):

> **Pluſieurs Facteurs d'inſtruments diuiſent la longueur du Luth, ou de la chorde à vuide en 18 parties, dont la 17 fait la premiere touche; & puis ils diuiſent le reſte de la chorde en 18 parties, dont ils en prennent encor 17 pour faire le ſecond demiton, & ainſi conſequemment iuſques à ce qu'ils ayent 8. ou 9. demi-tons.**

Figura 12. Método de los fabricantes de instrumentos para la fabricación del temperamento igual[1] (Mersenne, 1637, p. 48)

Mersenne (1637) menciona que esta manera de dividir la octava es atribuida a Vicent Galilei, padre de Galileo Galilei. El método consiste en considerar la longitud de la cuerda y tomar 17/18 partes. Posteriormente, de las 17 partes resultantes volver a tomar 17/18 partes y así sucesivamente. Es decir, este método de los fabricantes de instrumentos consiste en dividir repetidamente siguiendo una misma razón. Mersenne (1637) señala que Vicent Galileo se esforzó en probar que esta división en términos prácticos era el mejor sistema existente. Sin embargo, también cita la explicación de Zarlino (1588) para sostener que, dividiendo iteradamente con la razón 17/18 no se divide exactamente la octava (la ubicación de este esquema en un mástil será explicada más adelante, en la sección 5).

Zarlino desarrolló esta idea en su *Sopplimenti musicali* (1588). En la proposición XXVIX presenta un exhaustivo análisis de este método de los fabricantes de instrumentos, presentando la división de la cuerda AB de manera iterada usando la razón 17/18. En la figura 13, los números de la parte izquierda son potencias sucesivas de 18 y los de la parte derecha son potencias sucesivas de 17. De esta manera Zarlino (1588), usando la aritmética de números enteros de la época, muestra que al iterar doce veces siguiendo la razón 17/18 no se divide exactamente la cuerda por la mitad (su octava en términos musicales). En efecto, el número 582622237229761 no llega a ser la mitad del número 1156831381425976 (la división es aproximadamente 0.50363626591)[1].

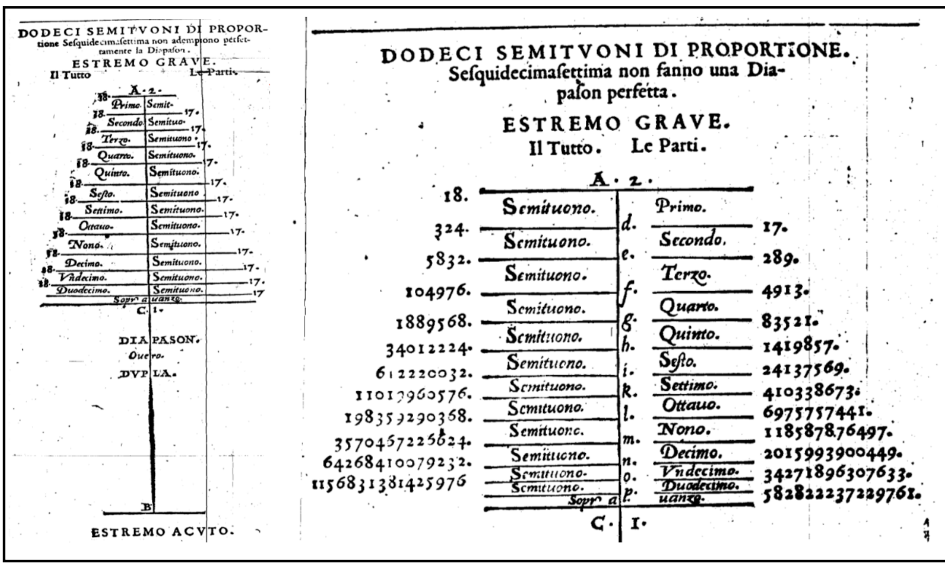


Figura 13. Método de los fabricantes de instrumentos (Zarlino, 1588, p. 202 y p. 205, respectivamente)

Zarlino (1588) concluye que con este método no se logra dividir exactamente la octava en doce *partes iguales*. Sin embargo, Mersenne (1637) señala que este método proporcionó una aproximación aceptable para los fabricantes de instrumentos. En efecto, García-Pérez (2014) plantea que en los instrumentos de cuerda con trastes "la tensión a la que es sometida la cuerda va aumentando ligeramente al irla presionando cada vez más lejos del clavijero" (p. 71). De esta manera, señala que el sonido sube un poco más de lo que debería, y esto compensa el error que produce la división de la cuerda siguiendo la razón 17/18. Al respecto, Mersenne (1637) señala que, a diferencia de los teóricos musicales que seguirán

1 El último número de la columna derecha de la figura 13 es 582822237229761 y su cuarta cifra es 8. Sin embargo, el valor real de 17^{12} es 582622237229761, donde la cuarta cifra corresponde a un 6. Dado que todos los otros valores están exactos, atribuimos el error a un problema de la edición del texto.

las divisiones armónicas mediante razones, los fabricantes de instrumentos se guiaban más por el oído.

Además, la simplicidad de llevarlo a la práctica hizo que este método (división iterada siguiendo la razón 17/18) se hiciera popular al punto de convertirse en el método de fabricación de instrumentos más usado durante el renacimiento (García-Pérez, 2014). Ciertamente, como toda labor técnica, la práctica de los constructores de instrumentos estaba influenciada por la búsqueda de economía y simplicidad de la técnica (Espinoza *et al.*, 2018). Y este método práctico, a pesar de no dar una división exacta, fue objeto de estudio de los teóricos musicales y referenciado por Mersenne (1637) en su magna obra de teoría musical.

4.2.2. *El método geométrico*

Un segundo método para la construcción del temperamento igual en la obra de Mersenne (1637) lo encontramos en la proposición VII del libro segundo de los instrumentos, y hace alusión a una demostración geométrica de la posibilidad de dividir el tono en doce *partes iguales* (Figura 14).

PROPOSITION VII.

Demonstrer que le ton maieur, & mineur, l'Octaue, & tous les autres interualles peuuent estre diuisez en deux, ou plusieurs parties esgales; d'où il s'ensuit que l'on peut diuiser l'Octaue en 12. demy-tons esgaux: où l'on verra la maniere de trouuer vne, & deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, de doubler le cube, & de mettre les touches sur le manche du Luth, & des autres instrumens.

Figura 14. Método geométrico para la formulación teórica del temperamento igual[2] (Mersenne, 1637, p. 249)

Mersenne (1637) señala que, para dividir la cuerda en dos *partes iguales*, solo hay que construir una cuerda que sea media proporcional entre las dos cuerdas que conforman el tono, la octava, o cualquier otro intervalo que se desee dividir.

2 "Laquelle divise la raison double d´AB à EF en deux raisons egales, & consequemment l'Octave en deux intervalles esgaux, car il y a mesme raison de CE, à EF, que d`AB à CD".

Agrega que esto se puede hacer mediante el teorema de Euclides (Figura 15). Considerando las cuerdas AB y EF que producen un intervalo de octava, donde EF es la mitad de AB, el autor señala que para encontrar la media proporcional CD es necesario ubicar las dos líneas dadas de manera contigua. Así, GH=AB y HI=EF. Luego, desde *l,* punto medio de GI se construye un semicírculo. Se traza la línea perpendicular a GI desde el punto H, obteniendo el punto K. Por último, se construye CD=HK.

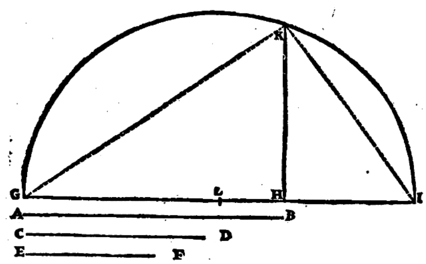


Figura 15. Uso del teorema de Euclides para la formulación teórica del temperamento igual (Mersenne, 1637, p. 249)

Mersenne (1637) señala que la recta HK será la media proporcional buscada, pues esta "divide la razón doble de AB y EF en dos razones iguales, y consecuentemente la octava en dos intervalos iguales, ya que hay la misma razón de CD, a EF, que de AB a CD"[2] (Mersenne, 1637, p. 66). A su vez, justifica este hecho señalando que los triángulos GHK, y KHI son semejantes, de lo que se infiere que la razón entre GH a HK es la misma que entre KH a HI. Aquí, al aludir a la semejanza de triángulos, la argumentación de Mersenne hace referencia a la proposición 8 del libro VI de los *Elementos* de Euclides y sus significados. Estos significados aluden a que CD está en la misma razón a AB que EF a CD $\left(\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF}\right)$. Además, el método de construcción de la media proporcional geométrica está descrito en la proposición 13 del libro VI de los *Elementos* de Euclides.

Posteriormente, Mersenne (1637) plantea que, al usar iteradamente el método, se podrán encontrar una infinidad de otras medias proporcionales. Así, usando el teorema de Euclides se pueden dividir los intervalos AB y CD, y CD y EF en partes proporcionales, con lo que se dividirá la octava en cuatro *partes iguales*. Continuando con la iteración, el autor señala que se pueden encontrar 1, 3, 7, 15, 31, 63, etc., medias proporcionales, lo cual permite dividir la octava en 2, 4, 8, 16, 32, etc., *partes iguales*. Es decir, no se logra dividir la octava en 12 *partes iguales*. Por este motivo, Mersenne plantea que se requiere incluir otro método complementario para dividir un intervalo musical en tres o más *partes iguales*. Del mismo modo, el autor afirma que, si bien no se pueden construir dos medias proporcionales de manera geométrica, existen múltiples formas de hacerlo mediante técnicas geométricas-mecánicas, de las cuales presenta una.

Dadas las rectas BH y GA, donde GA es la mitad de BH, considera la recta GE, sobre la cual copia la magnitud GA tres veces, obteniendo los segmentos GA, AH y HO (Figura 16). Luego, sobre el segmento GA y HO, construye los triángulos equiláteros GAD y HOF, y traza la recta AF. Finalmente, incluye un procedimiento mecánico al trazar una recta que pasa por D y cruza los segmentos AF y HO, obteniendo los respectivos puntos de intersección B y C. Mersenne plantea que hay que mover esta recta DC de modo que BC sea igual a la mitad de BH, es decir, a GA. Con esto, el autor sostiene que se encuentran las dos medias proporcionales buscadas, esto es, DB y AC. Cabe señalar que Mersenne atribuye este método a un tal Molthée y no brinda una justificación o demostración matemática.

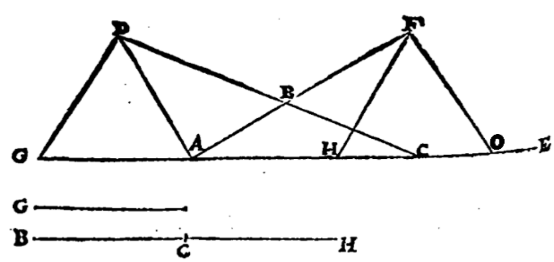


Figura 16. Construcción geométrica de dos medias proporcionales para la formulación teórica del temperamento igual (Mersenne, 1637, p. 249)

Mersenne (1637) plantea que, usando los métodos descritos de manera conjunta, se puede dividir la octava en doce *partes iguales*. En efecto, si la octava se divide primero en dos *partes iguales* (encontrando dos medias proporcionales), y después se encuentran medias proporcionales sobre estas divisiones mediante el teorema de Euclides, se dividirá la octava en seis *partes iguales*. Finalmente, si se usa el teorema de Euclides nuevamente sobre las divisiones resultantes, se logrará dividir la octava en doce *partes iguales*. Cabe señalar que el orden de iteración puede permutar. Es decir, también se puede dividir la octava primero en dos *partes iguales*, después en cuatro *partes iguales*, y después en doce *partes iguales*. O bien, primero dividir la octava en dos *partes iguales*, después en seis *partes iguales*, y después en doce *partes iguales*.

Este método geométrico explicado por Mersenne (1637) sigue la misma línea argumentativa presente en los métodos de teóricos musicales del siglo XVI, las cuales se sustentan en significaciones geométricas proporcionales. Para la división de intervalos musicales en *partes iguales*, los teóricos musicales usan el teorema de

Euclides (Faber Stapulensis, 1496; Fogliani, 1529; Bermudo, 1555; Zarlino, 1558; Salinas, 1577). Sin embargo, para la construcción de dos medias proporcionales estos usaron otros métodos. Stevin (1585) plantea la existencia de diversos métodos geométricos-mecánicos para realizar esta construcción, atribuídos a Platón, Herón, Apolonio, Diocles, Pappus, Spore, Menecmo, Arquitas, Eratóstenes y Nicomedes. Ejemplos de estos métodos son el uso del Mesolabio de Eratóstenes, el uso del método de Filón de Bizancio y otro método presentado también por Mersenne para la construcción de dos medias proporcionales (Figura 17).

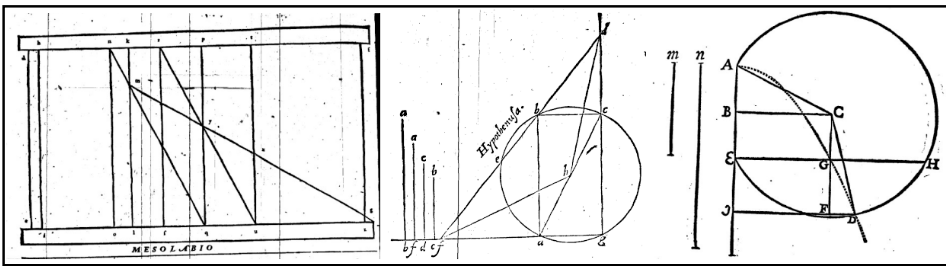


Figura 17. Métodos para la construcción de dos medias proporcionales (Zarlino, 1558, p. 96; Zarlino, 1588, p. 182; Mersenne, 1637, p. 410)

En definitiva, la idea de usar iteradamente los métodos de construcción de una y dos medias proporcionales para dividir la octava en 12 partes está presente, al menos, en Zarlino (1588) y Stevin (1585). Mersenne explora este mismo procedimiento y lo presenta con una generalidad que incluso supera las necesidades prácticas de la música. Es el caso de la mención que hace de iterar la división para dividir la octava, inclusive, en 48 y 96 *partes iguales*. En esto vemos el cómo estas ideas matemáticas surgen de la teoría musical y transitan hacia la generalización propia de la Matemática como quehacer científico. Además, Mersenne también generaliza el uso del temperamento para otros instrumentos. En efecto, los teóricos musicales del siglo XVI postularon el temperamento igual para instrumentos de cuerdas con trastes, mas Mersenne generaliza su uso, por ejemplo, para la afinación de los órganos.

4.2.3. *El método aritmético*

Un tercer método para dividir la octava en doce *partes iguales* que encontramos en Mersenne (1637) es un método aritmético. En la proposición XVI del primer libro de los instrumentos, Mersenne plantea una técnica aritmética para construir el temperamento igual (Figura 18).

PROPOSITION XIV.

Expliquer vn autre Monochorde qui sert pour diuiser le manche du Luth, de la Viole, du Cistre & de tous les autres instrumens à manches touchez en 9, 10, ou 12. demy-tons esgaux, & pour faire le Diapason des Orgues.

Figura 18. Método aritmético para construir el temperamento igual[3] (Mersenne, 1637, p. 37)

Mersenne (1637) comienza esta proposición afirmando que la división en *partes iguales* es la más útil y cómoda de las divisiones musicales del mástil. Acto seguido, presenta una tabla que atribuye a Jean Beaugrand y que plasma una técnica aritmética para encontrar once medias proporcionales comprendidas entre un intervalo y su mitad, logrando una división de la octava en doce *partes iguales* (Figura 19). Mersenne (1637) señala que, buscando la mayor exactitud que se pueda imaginar, esta técnica aritmética calcula las 11 medias proporcionales comprendidas entre 200000 y 100000. Con esto, obtendrá resultados aproximados de tales divisiones de manera exacta hasta la cienmilésima parte. La tabla que presenta es la siguiente:

Monochorde Harmonique d'egalité composé d'onze nombres moyens proportionnels irrationels.

13	g	100,000.
12	×f	√cccc. 2,000000000000,000000000000,000000000000,00000 0000000,000000000000.
11	F	√cc. 2,000000,000000,000000,000000,000000.
10	E	√qq. 2, 0000,0000,0000,0000,0000.
9	×d	√c. 2,000,000,000,000,000.
8	D	√cccc. 32,000000000000, 000000000000,000000000000, 0000 00000000,000000000000.
7	×c	√q. 2, 00,00,00,00,00.
6	C	√cccc. 128, 000000000000,000000000000, 000000000000,000 000000000,000000000000.
5	♮	√c. 4,000,000,000,000,000.
4	B	√qq. 8,0000,0000,0000,0000,0000.
3	A	√cc. 32, 000000,000000,000000,000000,000000.
2	×g	√cccc. 2048, 000000000000,000000000000, 000000000000,00 0000000000,000000000000.
1	G	200,000.

Figura 19. Cálculo aritmético del temperamento igual (Mersenne, 1637, p. 37)

En la notación de la época, el símbolo √ (o ν) representa a la raíz y las letras q y c que acompañan al símbolo √ hacen referencia, respectivamente, al grado cuadrático y cúbico de la raíz (García-Pérez, 2014). De esta manera, √q representa a una raíz cuadrada, $\sqrt{c}$ a una raíz cúbica, $\sqrt{qq}$ a una raíz cuarta, $\sqrt{cc}$ a una raíz sexta y $\sqrt{cccc}$ a una raíz doceava. A su vez, los números de la tabla son enteros y la cantidad de ceros que están agrupados entre las comas equivalen al número del índice o exponente de la raíz. Nótese que todos los números tienen cinco agrupaciones de ceros (5 comas). Estas cinco agrupaciones corresponden a las cinco cifras cero (o cantidad de ceros) que tienen los valores de referencia 100.000 y 200.000. A su vez, el número de ceros entre las comas se refieren al grado al que tal número está elevado a la potencia (por ejemplo, 1,00,00,00,00,00 equivale a $100{,}000^2$ o 1,000,000,000,000,000 equivale a $100{,}000^3$). Considerando esto, los valores de Mersenne (1637) se expresan en potencia como se muestran en la columna A y F de la tabla I.

Respecto a los valores de las otras columnas de la tabla I, estos explican una reconstrucción de un procedimiento para llegar a los resultados de Mersenne (1637). En efecto, el autor presenta la tabla (Figura 19) pero no da detalles de su elaboración. Para indagar algunos significados de estos cálculos, realizamos una reconstrucción con métodos aritméticos de la época, usados para la resolución del problema del temperamento igual en el siglo XVI. En la proposición 45 de su *L'Arithmetique*, Stevin (1585) propone un método para encontrar las medias proporcionales que se deseen entre dos números cualesquiera. Plantea que, dada dos cantidades, la media proporcional se encuentra mediante el cálculo de la raíz del producto de ambos valores. Así, teniendo los números a y b, la media proporcional será $\sqrt{a*b}$. A la vez, plantea que también se pueden encontrar dos medias proporcionales mediante los cálculos de $\sqrt[3]{a^2*b}$ y de $\sqrt[3]{a*b^2}$. Posteriormente, Stevin (1585) plantea que se pueden encontrar más medias proporcionales mediante la iteración de las técnicas descritas. Siguiendo este método, realizamos una reconstrucción de los cálculos presentados en Mersenne (1637), primero calculando una media proporcional entre 100.000 y 200.000 (Columna B), después calculando una media proporcional en los dos intervalos resultantes (Columna C), y finalmente calculando dos medias proporcionales en los cuatro intervalos subsecuentes (Columna D).

Esta reconstrucción muestra que los datos de la tabla de Mersenne, teniendo en cuenta los valores numéricos y los grados de las raíces y exponentes, también se pueden explicar mediante la iteración de una y dos medias proporcionales. Considerando además que en la aritmetización del problema en Stevin (1585) se lleva el mismo procedimiento geométrico al ámbito aritmético (Espinoza *et al.*, 2020), concluimos que los significados germinales evocados en el método aritmético de Mersenne (1637) devienen de lo geométrico. En definitiva, y si bien las medidas para la construcción de los mástiles se brindan mediante cálculos aritméticos, los significados geométricos proporcionales se mantienen en la esencia de la resolución del problema.

TABLA I

Reconstrucción de los cálculos aritméticos de Mersenne (1637) para el temperamento igual

Columna A Datos de Mersenne		*Columna B* Primera media proporcional $\sqrt{a * b}$	*Columna C* Media proporcional en los intervalos resultantes $\sqrt{a * b}$	*Columna D* Dos medias proporcionales en los cuatro intervalos resultantes $\sqrt[3]{a^2 * b}$; $\sqrt[3]{a * b^2}$	*Columna E* Resultado del cálculo.	*Columna F* Valores de Mersenne en notación actual.	*Columna G* Valores en formulación matemática actual.
13	Sol	100.000	100.000	100.000	100000	100000	$\sqrt[12]{2^0} * 100.000$
12	Fa#			$\sqrt[3]{100.000^2 * \sqrt[4]{200000000000000000000}}$	$\sqrt[12]{2 * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2 * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^1} * 100.000$
11	Fa			$\sqrt[3]{100.000 * \sqrt[4]{200000000000000000000}^{2}}$	$\sqrt[12]{2^2 * 100000^{12}}$	$\sqrt[6]{2 * 100000^6}$	$\sqrt[12]{2^2} * 100.000$
10	Mi		$\sqrt[2]{100.000 * \sqrt[2]{20000000000}}$	$\sqrt[4]{200000000000000000000}$	$\sqrt[4]{2 * 100000^4}$	$\sqrt[4]{2 * 10000^4}$	$\sqrt[12]{2^3} * 100.000$
9	Re#			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{200000000000000000000}^2 * \sqrt[2]{20000000000}}$	$\sqrt[6]{2^2 * 100000^6}$	$\sqrt[3]{2 * 100000^3}$	$\sqrt[12]{2^4} * 100.000$
8	Re			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{200000000000000000000} * \sqrt[2]{20000000000}^{2}}$	$\sqrt[12]{2^5 * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^5 * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^5} * 100.000$
7	Do#	$\sqrt[2]{100.000 * 200.000}$	$\sqrt[2]{20000000000}$	$\sqrt[2]{20000000000}$	$\sqrt[2]{2 * 100000^2}$	$\sqrt[2]{2 * 10000^{2}}$	$\sqrt[12]{2^6} * 100.000$
6	Do			$\sqrt[3]{\sqrt[2]{20000000000}^{2} * \sqrt[4]{800000000000000000000}}$	$\sqrt[12]{2^7 * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^7 * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^7} * 100.000$
5	Si			$\sqrt[3]{\sqrt[2]{20000000000} * \sqrt[4]{800000000000000000000}^{2}}$	$\sqrt[6]{2^4 * 100000^6}$	$\sqrt[3]{2^2 * 100000^3}$	$\sqrt[12]{2^8} * 100.000$
4	La#		$\sqrt[2]{\sqrt[2]{20000000000} * 200000}$	$\sqrt[4]{800000000000000000000}$	$\sqrt[4]{2^3 * 100000^4}$	$\sqrt[4]{2^3 * 100000^4}$	$\sqrt[12]{2^9} * 100.000$
3	La			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{800000000000000000000}^{2} * 200.000}$	$\sqrt[6]{2^5 * 100000^6}$	$\sqrt[6]{2^5 * 100000^6}$	$\sqrt[12]{2^{10}} * 100.000$
2	Sol#			$\sqrt[3]{\sqrt[4]{800000000000000000000} * 200.000^2}$	$\sqrt[12]{2^{11} * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^{11} * 100000^{12}}$	$\sqrt[12]{2^{11}} * 100.000$
1	Sol	200.000	200.000	200.000	200000	200000	$\sqrt[12]{2^{12}} * 100.000$

Mersenne (1637) concluye la proposición presentando aproximaciones por defecto y por exceso al cálculo exacto de cada valor de la tabla (Figura 20). Si bien, Mersenne (1637) señala que los datos no son exactos, por estar aproximados hasta la cienmilésima parte, sostiene que el error será imperceptible al oído humano. Por esta razón, establece que estos números se pueden considerar como la verdadera división de promedios proporcionales. En definitiva, plantea que estos valores pueden usarse para construir la división en el mástil del Laúd o en el de otros instrumentos. Al respecto, señala que, si se quisiera adicionar una treceava, catorceava o quinceava división en el mástil, solo hay que tomar el valor correspondiente de la división y dividirlo por dos. En esto se hace nuevamente palpable la racionalidad proporcional desde la cual se entienden estos cálculos.

Monochorde ou Diapason des touches.

I	II	III	IV	V
a	100,000.	c.	100,000.	n
xg	105946	♯	105945	m
G	112246	b	112245	l
xf	118921	A	118920	k
F	125993	xg	125992	i
E	133481	G	133480	h
xd	141422	xf	141421	g
D	149830	F	149829	f
xc	158741	E	158740	e
C	168179	xd	168178	d
♯	178172	D	178171	c
b	188771	xc	188770	b
A	200,000.	C	200,000.	

NOMBRES DE L'ACCORD EGAL.

	I	II	
I	1000000000000	144000	000
II	943874311198	135919	009
III	890904183 65	128290	202
IV	840896414 54	121089	089
V	793700526 22	114292	876
VI	749153538 18	107878	109
VII	707106781 09	101823	376
VIII	667419927 15	96108	470
IX	629960524 57	90714	317
X	594603556 90	85622	912
XI	561231023 70	80817	267
XII	529731545 75	76281	243
XIII	500000000000	72000	000

Figura 20. Aproximaciones por defecto y exceso al temperamento igual y cálculos del temperamento igual, respectivamente (Mersenne, 1637, p. 38 y p. 786)

Cabe señalar que Stevin también presenta otras tablas en las que muestra los cálculos del temperamento igual entre 72000000 y 144000000 así como entre 50000000000 y 10000000000 (Figura 20). Estos valores, que superan el interés práctico de la teoría musical, surgen del tránsito del problema desde la teoría musical hacia el ámbito de la Matemática como disciplina científica. Destaca además que, en la aritmética, fueron matemáticos como Stevin y Mersenne los que concibieron al temperamento igual fuera de los cánones pitagóricos que predominaban en aquella época, aceptando a los irracionales como intervalos plausibles para la teoría musical (Espinoza *et al.*, 2020).

Estos tres métodos para la construcción del temperamento igual brindan contexto y significado a nociones matemáticas escolares que suelen enseñarse como procedimientos rutinarios. Un adecuado estudio didáctico permitiría implementar diseños para la resignificación, desde el contexto de la música, de la división sucesiva de longitudes a partir de una razón dada, del teorema de Euclides, de la media proporcional geométrica y de la operatoria de raíces enésimas.

4.3. *Significaciones matemático-musicales en el surgimiento del temperamento igual*

Hasta aquí, hemos analizado los tres métodos para la construcción del temperamento igual identificados en Mersenne (1637). A continuación, describimos los conocimientos puestos en uso, los procedimientos utilizados y los significados asociados identificados en esta investigación.

4.3.1. *Progresión geométrica y división proporcional*

Uno de los usos del conocimiento matemático identificados en esta investigación, en el método de los fabricantes de instrumentos, es la división iterada de una magnitud usando una misma razón. En la técnica descrita por Vincenzo Galilei, el procedimiento utilizado fue la división geométrica sucesiva del mástil en partes aritméticas iguales, en la que se consideran 17/18 parte en cada iteración. En la explicación de Zarlino, el procedimiento es la multiplicación iterada a la cuerda por los factores 17/18, $17^2/18^2$, $17^3/18^3$, En términos actuales, este conocimiento corresponde a una progresión geométrica, es decir, a una sucesión de la forma a, ak, akk, akkk, etc. o a, ak, ak^2, ak^3, etc., donde a es la medida de la longitud a dividir. En esta línea, y considerando que la fracción 17/18 no permite una división exacta de la octava en doce *partes iguales*, resolver el problema del temperamento igual implica encontrar un factor k de modo que $ak^{12}=\frac{a}{2}$, donde $k=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ es irracional. El uso de este conocimiento en la ubicación de los trastes de la guitarra se ilustra en la figura 21.

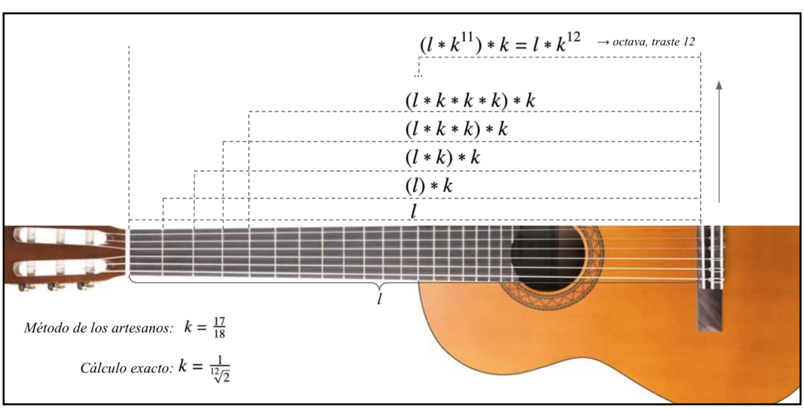


Figura 21. Ilustración del método de los fabricantes de instrumentos en una guitarra

Respecto a los *significados* asociados al uso de este conocimiento en el siglo XVI, la noción de progresión geométrica estaba en pleno desarrollo y se definía en el ámbito de lo proporcional. Evidencia de esto es Frisius, quien, en su *Arithmeticae practicae methodus facilis* publicada originalmente en latín, plantea que la progresión geométrica contiene “varios números precedentes con alguna proporción, es decir, que son producidos por una multiplicación continua de un número” (Frisius, 1585/1556, p. 27-28, trad. francesa)[3]. En esta línea, un significado identificado de este conocimiento puesto en uso en el problema de la ubicación de los trastes sobre el mástil de instrumentos de cuerda es el siguiente: la aplicación continua de un número o razón sobre la cuerda genera sucesiones de magnitudes proporcionales entre sí. Es decir, dividiendo con la misma razón se conserva la proporción.

4.3.2. *Medias proporcionales y magnitudes continuamente proporcionales*

Otro de los usos del conocimiento matemático, tanto en los métodos geométrico y aritmético, es la construcción de 11 medias proporcionales entre una magnitud y su mitad. Los conocimientos utilizados son el teorema de Euclides como otras construcciones geométrico-mecánicas para encontrar dos o más medias proporcionales entre una magnitud y su mitad. El procedimiento utilizado es la iteración de los métodos para encontrar una o dos medias proporcionales. De aquí que los significados asociados son geométricos y relativos a la construcción de “magnitudes continuamente proporcionales” (Mersenne, 1637, p. 224). Así como una media proporcional establece la relación proporcional a:b = b:c y dos medias proporcionales la relación proporcional a:b = b:c = c:d, la división del mástil evoca el siguiente significado proporcional a:b = b:c = c:d = d:e = e:f = f:g = etc. (Figura 22). Es decir, es una división de magnitudes continuamente proporcionales, o una división que conserva la proporción. Tal división divide la octava en 12 *partes iguales*.

Respecto al método aritmético, las técnicas para el cálculo de medias proporcionales se desprenden de los métodos geométricos. En este sentido, el cálculo de potencias y raíces está inmerso en un contexto de significados proporcionales. Tal significado aritmético también se encuentra en el proceso de desarrollo del saber. Es el caso de Bobillier (1827) quien, en sus *Principes d’algèbre*, plantea que “un término cualquiera de una progresión geométrica es igual a la media proporcional entre el término que le precede y el que le sigue” (p. 32)[4]. En definitiva, identificamos en el método aritmético los significados subyacentes al método geométrico. Y el hecho de que Stevin haya planteado

[3] “Plusieurs nombres precedens avec quelque proportion, c´este à dire, quei sont products par una multiplicatió continue d´un nombre”.

[4] “Un terme quelconque d´une progression par quotient est égal a la moyenne proportionnelle entre celui qui le précède et celui qui le suit”.

simultáneamente su método aritmético para medias proporcionales y la resolución aritmética del temperamento igual, devela la significación proporcional tras sus métodos de cálculo de potencias y raíces, y ubica a la música como un contexto de significación de tales conocimientos matemáticos.

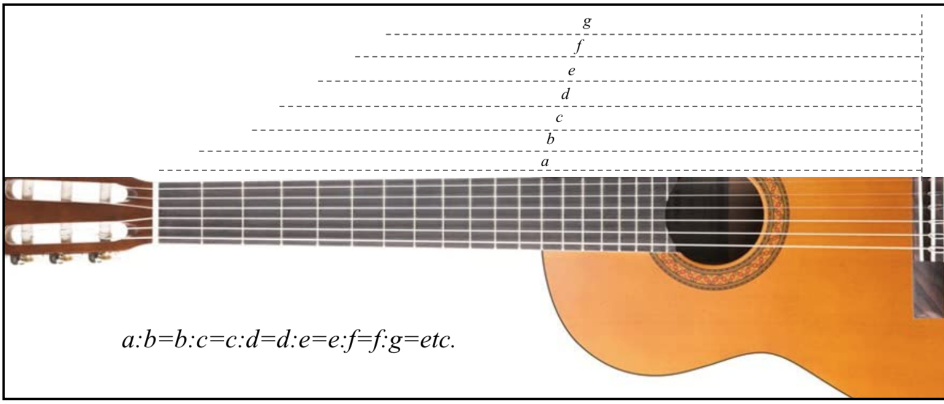


Figura 22. Ilustración de las magnitudes continuamente proporcionales en la guitarra

4.3.3. *Temperamento igual y la autosimilitud de la sucesión*

Una característica particular del temperamento igual, y que lo distingue de todos los otros sistemas de afinación existentes en los siglos XVI y XVII, es que iguala todos los semitonos en términos de sonido. Este hecho tiene significativas implicaciones tanto en la teoría musical como en las prácticas de fabricación e interpretación de instrumentos musicales. Al respecto, Mersenne (1637) señala que, en los otros temperamentos, dado que las divisiones entre los semitonos no se realizaban siguiendo una misma razón, las tonalidades no sonarán iguales. Sin embargo, con el temperamento igual todas las escalas tienen la misma sonoridad, de modo que con esta división se pueden construir todas las armonías. En efecto, para construir una armonía "no importa por donde uno comience, pues todos los tonos y medios tonos son iguales" (Mersenne, 1637, p. 38)[5]. El autor señala esto haciendo referencia a que en las tablas que presenta el temperamento igual se puede comenzar la división desde cualquier nota, como por ejemplo por las notas La, Do (Figura 20) o Sol (Figura 19).

De lo anterior se concluye que en el temperamento igual todas las armonías están autocontenidas en la misma división de la cuerda. Por ejemplo, en la figura 23, se tiene la división de la cuerda siguiendo el temperamento igual de la primera cuerda Mi, construida ya sea a través de la multiplicación iterada de un mismo factor

[5] "Il n´importe par où l´on commence, puis que tous les tons & les demy-tons sont esgaux".

o mediante medias proporcionales. Si desde Fa comenzamos a hacer la división usando el mismo factor o mediante medias proporcionales, las divisiones de la cuerda calzan exactamente, o bien, están autocontenidas, en la división de la guitarra realizada desde Mi. Y esto se cumple si iniciamos la división de la cuerda desde Sol, La, Si, Mi (una octava más arriba), Sol, etc. Es decir, la división contiene todas las posibles divisiones de todas las armonías.

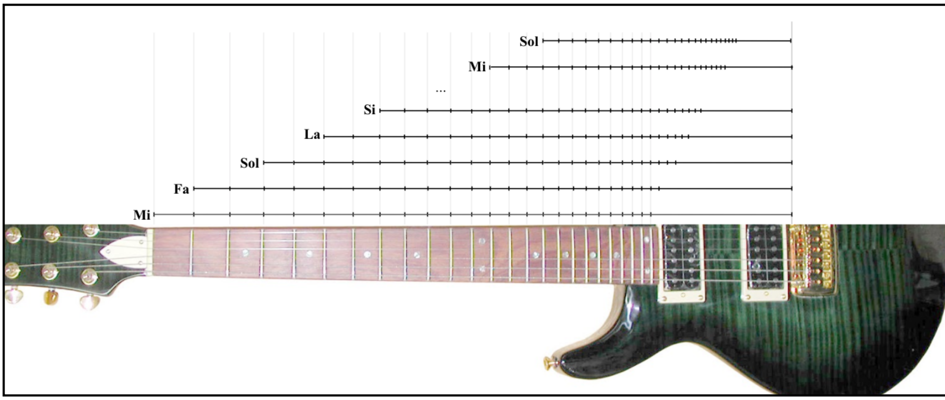


Figura 23. Ilustración de la autosimilitud de las armonías en la guitarra

Esta autocontención se puede explicar de la siguiente manera: cuando una magnitud se divide multiplicando iteradamente por una misma razón o mediante medias proporcionales, la sucesión resultante a_n será, en términos proporcionales, semejante a cualquiera de sus subsucesiones de la forma a_{n+m}, con n y m números naturales. En términos geométricos, el hecho de que en una progresión geométrica toda subsucesión sea semejante, proporcional u homotética a la sucesión dada, implica que cualquier parte de la sucesión tiene, por así decirlo, la "misma forma" que el todo. Es más, toda subsucesión de la sucesión será semejante, proporcional u homotética a cualquier otra subsucesión de la sucesión. Esta propiedad puede ser explicada mediante la noción de autosimilitud o autosemejanza. Pareyon (2011) caracteriza la autosimilitud como aquella propiedad en la que el todo es exacto, similar, o tiene la misma forma que una y cada una de sus partes. En el temperamento igual, esta autosimilitud se expresa en que el todo está autocontenido en sus partes y sus partes están autocontenidas en sus subpartes.

La construcción del temperamento igual hace emerger nociones que no pueden encerrarse en la Matemática o la Música como asignaturas escolares. En particular la autosimilitud moviliza significados que sólo pueden comprenderse desde la reciprocidad disciplinar. Esta es una característica de los problemas interdisciplinarios, que necesita seguir siendo discutida y profundizada desde la Educación Matemática. Habiendo señalado esto, a continuación, presentamos las conclusiones de esta investigación.

5. Conclusiones

En esta investigación, nos propusimos estudiar cómo los conocimientos puestos en uso y significados asociados al surgimiento histórico del temperamento igual en instrumentos de cuerda con trastes pueden contribuir a un enfoque interdisciplinario para el aprendizaje de la Matemática y la Música. Esto lo hicimos explorando tanto el uso del conocimiento en Mersenne (1637) como el proceso de constitución de estos saberes en el siglo XVI, identificando así aspectos epistemológicos de interés para la articulación didáctica entre Música y Matemática. A modo de conclusión, ubicamos a Mersenne (1637) en la etapa de *desarrollo* del saber e identificamos tres métodos para construir el temperamento igual, a saber: el método de los fabricantes de instrumentos, el método geométrico y el método aritmético. Respecto al proceso de *génesis* de estos saberes, sostenemos que el temperamento igual surge en el siglo XVI, primero en la práctica de la construcción y ejecución de instrumentos de cuerdas con trastes, y segundo en el proceso de su formulación teórica realizado por Salinas (1577), Zarlino (1588) y Stevin (1585). Tanto en la *génesis* como en el *desarrollo* identificamos el uso de conocimientos matemáticos y significados asociados. En la figura 24 presentamos una síntesis de estos resultados.

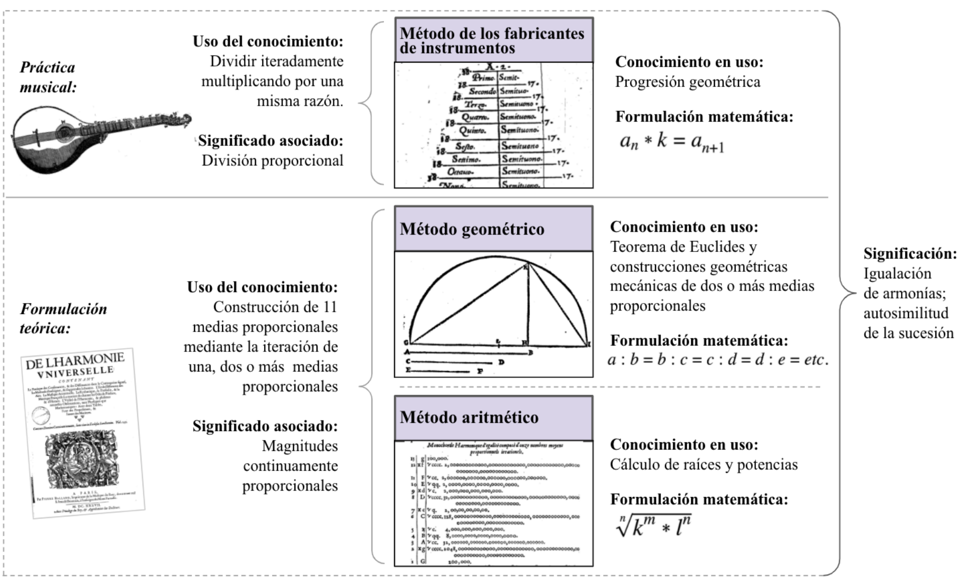


Figura 24. Síntesis de los resultados de la investigación

Hemos dado cuenta como tras el mástil de instrumentos de cuerda con trastes hay toda una historia de uso de conocimiento matemático que puede ser recuperada para delinear propuestas didácticas innovadoras que propicien una enseñanza en la que se vinculen transversalmente la Matemática y la Música. En efecto, a la ubicación de los trastes de la guitarra, el bajo, el ukelele y otros instrumentos de cuerda con trastes, subyace todo un proceso de génesis y desarrollo histórico que ha definido la manera actual de concebir la música en Occidente. En este proceso se usan y desarrollan diversos conocimientos matemáticos. Un ejemplo de propuesta didáctica es la siguiente actividad (Figura 25), en la cual se comienza dando una breve explicación del contexto histórico de Galileo Vincenzo y su método para construir los trastes usando la razón 17/18. Como recursos, se les brinda una guitarra, otra guitarra impresa a escala y sin trastes, un elástico marcado con la razón 17/18 y una cinta métrica.

1. Mide el elástico y comprueba si está dividido en razón 17/18. Después estira el elástico y responde **¿la relación 17/18 cambia o se mantiene?**
2. Usa el elástico para construir 12 trastes en la guitarra usando el método de Galileo Vincenzo. **¿Qué relación puedes identificar entre los trastes construídos?**
3. ¿Qué crees que ocurrirá si usamos el método de Galileo Vincenzo en la guitarra **comenzando desde el traste 3, el traste 5, el traste 7** o en general desde cualquier traste? Después comprueba tus ideas.

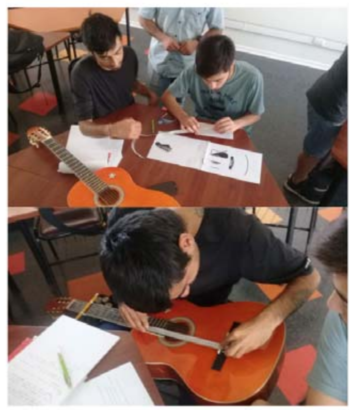


Figura 25. Ejemplo de propuesta didáctica sustentada en los resultados de la investigación

A su vez, se pueden usar las características de la práctica de tocar guitarra para hacer emerger, en el aula de Matemática, los conocimientos matemáticos y significados asociados descritos en esta investigación. De hecho, al igualar los semitonos y las armonías, el temperamento igual tiene implicancias significativas en la práctica guitarrística relativa a la forma de la mano para tocar acordes con cejilla, escalas o al usar el cejillo: 1) una misma posición de acorde con cejilla, al ser desplazada (o trasladada en el sentido de la Geometría Afín) a lo largo del mástil, produce diferentes acordes; y 2) una misma digitación de una escala, al ser desplazada a lo largo del mástil, genera distintas escalas (Figura 26).

Estas dos técnicas, que son fundamentales en la ejecución práctica de la guitarra acústica y eléctrica, existen gracias a la propiedad de la autosimilitud presente en la ubicación de los trastes de la guitarra. Al respecto, se pueden realizar dos importantes observaciones:

1. En términos matemáticos, esta autosimilitud existe dada la naturaleza proporcional de la división del mástil, la cual se puede construir dividiendo iteradamente por una misma razón.
2. En términos musicales, estas técnicas son posibles dado que el temperamento igual iguala todos los semitonos y, por ende, también iguala las armonías.

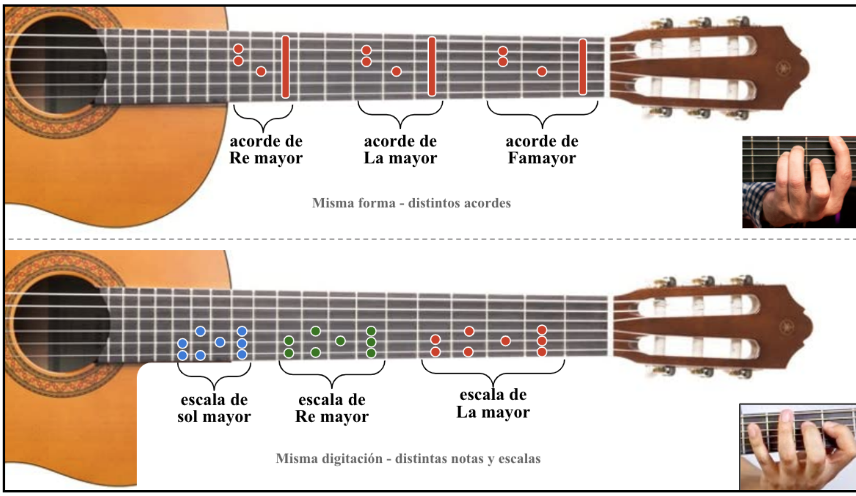


Figura 26. Implicancias del temperamento igual en la práctica de tocar guitarra

Subrayamos la importancia que puede tener la autosimilitud presente en el mástil de la guitarra para la creación de propuestas didácticas innovadoras. Particularmente, esto puede contribuir a la profundización en la comprensión en los estudiantes respecto al teorema de Euclides, la progresión geométrica y la función exponencial, entre otros conocimientos matemáticos de educación secundaria. Para esto, se podría pedir a estudiantes que expliquen la práctica de mover la forma de acordes y escalas en el mástil de la guitarra desde el método de Galileo Vincenzo (división iterada por la razón 17/18). Esto, consideramos, permitiría ir en la dirección de lo planteado por Tytler *et al.* (2019), respecto a que la enseñanza de la Matemática desde un enfoque interdisciplinar debería contribuir al desarrollo y uso del conocimiento en contextos propios de la realidad del estudiante.

De esta manera, el análisis histórico-epistemológico realizado en esta investigación provee interesantes insumos para futuras investigaciones que aborden la elaboración e implementación de diseños didácticos que vinculen la Matemática y la Música en el aula. Desde un enfoque interdisciplinar y atendiendo lo señalado por Hartzler (2000), concordamos en la importancia de incorporar prácticas de instrucción que hagan explícitas las conexiones entre los saberes en juego. En suma, más allá de ser dos disciplinas independientes con elementos en común, la Música y la Matemática forman parte de un saber que tiene sustento histórico y cultural, y que han sido fundamentales en la historia humana, no sólo como expresión artística sino también como productoras de conocimiento científico.

Referencias

Ander-Egg E. (1999). *Interdisciplinariedad en Educación. Colección respuestas educativas.* Editorial Magisterio del Río de la Plata.

Barbour, J. M. (2004). *Tuning and temperament: a historical survey.* Michigan State College Press (año de publicación del libro original; 1951). https://archive.org/details/tuningtemperamen00barb/page/n13/mode/2up

Benson, D. (2006). *Music: a mathematical offering.* Cambridge University Press. https://ds.amu.edu.et/xmlui/bitstream/handle/123456789/14630/Music-%20mathematics%20-%20531%20pages.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bermudo, J. (1555). *Declaración de instrumentos musicales.* Taller de Juan de León.

Bobillier, E. (1827). *Principes d'algèbre.* Impr. de F. Gauthier (Lons-le-Saunier).

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40. https://doi.org/10.3316/qrj0902027

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Chao-Fernández, R., Mato-Vázquez, D., y Chao-Fernández, A. (2019). Fractions and pythagorean tuning. An interdisciplinary study in secondary education. *Mathematics, 7*(12), 1227, 1-13. https://doi.org/10.3390/math7121227

Chi, N. P. (2021). Teaching Mathematics through interdisciplinary projects: A case study of Vietnam. *International Journal of Education and Practice, 9*(4), 656-669. https://doi.org/10.18488/journal.61.2021.94.656.669

Conde Solano, L. A., Figueras Morut de Montpellier, O., Pluvinage, F. C. B. y Liern Carrión, V. (2011). El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza, *SUMA 68,* 109-116. https://www.researchgate.net/profile/Vicente-Liern/publication/359337787_El_sonido_de_las_fracciones_una_propuesta_interdisciplinaria_de_ensenanza/links/6235aa7d72d413197a332d0a/El-sonido-de-las-fracciones-una-propuesta-interdisciplinaria-de-ensenanza.pdf

Doig, B. y Williams, J. (2019). Conclusion to interdisciplinary Mathematics Education. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo Ferri y P. Drake (Eds*), Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 Monographs* (pp. 299-302). https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6

Drisko, J. W., y Maschi, T. (2016). *Content analysis. Pocket Guide to Social Work Research Methods. Oxford* University Press.

Espinoza, L., Redmond, J., Palacios Torres, P. C., & Cortez Aguilera, I. (2020). Numerus surdus y armonía musical. Sobre el temperamento igual y el fin del reinado pitagórico de los números. *Revista de humanidades de Valparaíso*, (16), 137-167. http://dx.doi.org/10.22370/rhv2020iss16pp137-167

Espinoza, L., Vergara, A., & Valenzuela, D. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 21*(3), 247-274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131

Faber Stapulensis, J. (1496). *Arithmetica et musica.* Joannes Higmanus et Volgangus Hopilius.

Floris Cohen, H. (1987) Simon Stevin's equal division of the octave. *Annals of Science, 44*(5), 471-488. https://doi.org/10.1080/00033798700200311

Fogliani, L. (1529). *Musica theorica Ludovici Foliani mutinensis.* Jo. Antonium et fratres de Sabio.

Frisius, G. (1585). *Arithmeticae practicae methodus facilis.* Apud Ioan Tornaesium et Gul. Gazeium. (Obra original publicada en 1556).

García-Pérez, A. S. (2014). El temperamento igual en los instrumentos de cuerda con trastes. En A. García-Pérez y P. Otaola González (coords.), *Francisco de Salinas. Música, teoría y matemática en el Renacimiento* (pp. 61-89). Ediciones Universidad de Salamanca.

García-Pérez, A. S. (2003). *El número sonoro: la matemática en las teorías armónica de Salinas y Zarlino*. Caja Duero.

Hartzler, D. S. (2000). *A meta-analysis of studies conducted on integrated curriculum programs and their effects on student achievement*. Doctoral dissertation. Indiana University. https://www.proquest.com/docview/304624583?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true

Homes, A., Kaneva, D., Swanson, D. y Williams, J. (2013). *Re-envisioning STEM education: curriculum, assessment and integrated, interdisciplinary studies.* The Universtity of Manchester. https://royalsociety.org/~/media/education/policy/vision/reports/ev-2-vision-research-report-20140624.pdf

Mersenne, M. (1637). Harmonie universelle, Tomo 2. Pierre Ballard.

Nisbet, S. (1991). Mathematics and Music. *The Australian Mathematics Teacher, 47*(4), 4-8. https://search.informit.org/doi/10.3316/aeipt.56500

Oliveira, M. P. de (2023). A integração entre a Música e a Matemática: uma revisão sistemática de literatura. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 14*(1), 1–25. https://doi.org/10.26843/rencima.v14n1a08

Pareyon, G. (2011). On musical self-similarity. Intersemiosis as synecdoche and analogy. En E. Tarasti (Ed.), *Acta Semiotica Fennica XXXIX: Approaches to Musical Semiotics Series 13* (pp. 205-455). The International Semiotics Institute. https://helda.helsinki.fi/server/api/core/bitstreams/334af43a-1ca2-4dd3-ac17-d3df3627b160/content

Pareyon, G., Almada, C., Mathias, C., Saraiva, C., Moreira, D., Carvalho, H., Pitombeira, L., Gentil-Nunes, P., Mesz, B., Amster, P. y Riera, P. (2022). Music and Mathematics in Latin America. Major developments in the last 25 years. *Brazilian Journal of Music and Mathematics, 6*(1), 12–47. https://doi.org/10.46926/musmat.2022v6n1.12-47

Prada Dussán, M. (2009). Crítica moral de Francis Bacon a la Filosofía. *Folios: Revista de la Facultad de Humanidades 30*, 99-114. https://doi.org/10.17227/01234870.30folios99.114

Rasch, R. (2008). Simon Stevin and the calculation of equal temperament. En P. Vendrix (Ed.), *Music and Mathematics* (pp. 253-320). Brepols Publishers. https://doi.org/10.1484/M.EM-EB.3.3286

Salinas, F. (1577). *De música libri septem.* Mathias Gastius.

Simson, R. (1774). Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los Elementos de Euclides. D. Joachin Ibarra, Impresor de Cámara de S.M.

Stevin, S. (1585). *L´Arithmétique*. A leyde: L´Imprimerie de Christophle Plantin.
Trinick, R. Ledger, G. Major. K. y Perger, P. (2016). More than counting beats: connecting Music and Mathematics in the primary classroom. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 17*(3). https://www.cimt.org.uk/ijmtl/index.php/IJMTL/article/view/32/20
Tytler, R., Williams, G., Hobbs, L. y Anderson, J. (2019). Challenges and opportunities for a STEM interdisciplinary agenda. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo-Ferri y P. Drake (eds), *Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 Monographs* (pp. 51-81). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6_5
Van Wymeersch, B. (2008). Qu'entend-on par «nombre sourd»? En P. Vendrix (Ed.), *Music and Mathematics* (pp. 97-110). Brepols Publishers. https://doi.org/10.1484/m.em-eb.3.3281
Venegas-Thayer, M. A. (2019). Integration from a commognitive perspective:an experience with Mathematics and Music students. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo-Ferri y P. Drake (Eds.), *Interdisciplinary Mathematics Education. ICME-13 Monographs*, (pp. 35–49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6_4
Virdung, S. (1993). *A treatise on musical instruments.* University of Cambridge.
Walsh, T. P. (2010). Mathematics and Music. In L. Chen-Hafteck y J. Chen (Eds.), *Educating the creative mind: developing capacities for the future. An International Conference on Arts-Based Education* (pp. 90-92). Kean University. https://www.researchgate.net/profile/Jennifer-Chen-16/publication/271206509_Conference_Proceedings_of_the_Educating_the_Creative_Mind_Conference_2010/links/5649ee0108ae127ff9865ffa/Conference-Proceedings-of-the-Educating-the-Creative-Mind-Conference-2010.pdf#page=94
Wright, D. (2009). *Mathematics and Music*. American Mathematical Society. https://www.math.wustl.edu/~wright/Math109/00Book.pdf
Xenakis, I. (1992). *Formalized Music. Thought and Mathematics in Music*. Pendragon Press.
Zarlino, G. (1558). *Istitutioni harmoniche.* Francesco dei Francheschi Senese.
Zarlino, G. (1571). *Dimonstrationi harmoniche.* Francesco dei Francheschi Senese.
Zarlino, G. (1588). *Sopplimenti musicali.* Francesco dei Francheschi Senese.

Autores

Lianggi Espinoza Ramírez. Universidad de Valparaíso, Chile. lianggi.espinoza@uv.cl
https://orcid.org/0000-0003-1526-7229

Andrea Vergara Gómez. Universidad Católica del Maule, Chile. avergarag@ucm.cl
https://orcid.org/0000-0001-6388-8412

Franciele da Silva, Vinícius Pazuch

CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS MOBILIZADOS NA PRÁTICA DO PROFESSOR: *KNOWLEDGE QUARTET* COMO FERRAMENTA DE ANÁLISE

Geometric knowledge mobilized in the teacher's practice: *Knowledge Quartet* as an analysis tool

RESUMEN

El presente artículo tiene como objetivo *identificar y comprender los conocimientos geométricos movilizados por profesoras de matemática, al abordar conceptos de geometría para estudiantes de los años finales de la Enseñanza Fundamental.* Con ese propósito, se utiliza la herramienta teórica *Knowledge Quartet* (*KQ*) para identificar y analizar las dimensiones del conocimiento que se revelan en las acciones llevadas a cabo por dos profesoras en el aula de clases. El contexto de la investigación se dio en un proceso de formación continua en geometría, en un grupo con características colaborativas. Los datos fueron producidos por medio de la transcripción de grabaciones en audio y vídeo. Se seleccionaron eventos críticos representativos del ambiente investigado. Además de ser una herramienta teórica que identifica conocimientos matemáticos y didácticos del profesor en la práctica, según los resultados el KQ contribuyó para la identificación de lagunas asociadas a las *dificultades del profesor* ante las contingencias que se presentan en el contexto de la enseñanza de la geometría.

PALABRAS CLAVE:

- *Enseñanza de la geometría*
- *Tareas*
- *Conocimiento del profesor*
- *Herramienta teórica*

ABSTRACT

This article aims to *identify and understand the mathematics teachers' geometric knowledge, when addressing geometry concepts for students at Middle School.* For this purpose, the theoretical tool *Knowledge Quartet* (KQ) is used to identify and analyze the dimensions of knowledge that are revealed in the actions triggered by two teachers in the classroom. The research context took place in a process of continuing education in geometry, in a group with collaborative characteristics. The data were produced through audio and video recording and later transcribed. Critical events were

KEY WORDS:

- *Geometry teaching*
- *Tasks*
- *Teacher knowledge*
- *Theoretical tool*

da Silva, F. y Pazuch, V. (2023). Conhecimentos geométricos mobilizados na prática do professor: knowledge quartet como ferramenta de análise. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(1), 47-80. https://doi.org/10.12802/relime.23.2612. Recepción: Octubre 5, 2020 / Aceptación: Septiembre 1, 2023

selected of the investigated environment. In addition to being a theoretical tool that identifies the teacher's mathematical and didactic knowledge in practice, according to the results, the KQ contributed to identify gaps associated with the *teacher's difficulties* in face of the contingencies that present themselves in the context of geometry teaching.

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo *identificar e compreender os conhecimentos geométricos mobilizados por professoras de matemática, ao abordarem conceitos de geometria para estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental.* Com esse propósito, utiliza-se a ferramenta teórica *Knowledge Quartet (KQ)* para identificar e analisar as dimensões de conhecimento que se revelam nas ações desencadeadas por duas professoras em sala de aula. O contexto da pesquisa se deu em um processo de formação continuada em geometria, em um grupo com características colaborativas. Os dados foram produzidos por meio de gravação em áudio e vídeo e posteriormente transcritos. Selecionaram-se eventos críticos representativos do ambiente investigado. Além de ser uma ferramenta teórica que identifica conhecimentos matemáticos e didáticos do professor na prática, o *KQ*, segundo os resultados, contribuiu para a identificação de lacunas associadas às *dificuldades do professor* diante das contingências que se apresentam no contexto de ensino de geometria.

PALAVRAS CHAVE:

- *Ensino de geometria*
- *Tarefas*
- *Conhecimento do professor*
- *Ferramenta teórica*

RÉSUMÉ

Cet article a l'objectif *d'identifier et comprendre les connaissances géométriques mobilisées par les enseignantes de mathématiques, quand elles enseignent des concepts géométriques aux élevés de la troisième année au collège.* Dans ce but, nous avons utilisé l'outil théorique *Knowledge Quartet (KQ)* pour identifier et analyser les dimensions de la connaissance qui se manifeste dans les actions déclenchées par deux enseignantes en classe. La recherche s'est déroulée dans le cadre d'une formation continue en géométrie dans un groupe ayant des caractéristiques de collaboration. Les données ont été collectées par un enregistrement audio et vidéo et ont été transcrites. Nous avons sélectionné des événements critiques représentatifs de l'environnement étudié. Par ailleurs, d'être un outil théorique qu'identifie des connaissances mathématiques et didactiques de l'enseignant dans la pratique, le KQ, selon les résultats, a contribué à identifier des lacunes associées aux *difficultés de l'enseignant* face aux contingences qui se présentent dans le cadre de l'enseignement de la géométrie.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement de géométrie*
- *Activités*
- *Connaissance de l'enseignant*
- *Outil théorique*

1. Introdução

O conhecimento profissional do professor é um dos aspectos centrais que orientam os processos de ensinar e aprender, pois interfere diretamente na promoção das aprendizagens dos estudantes (Ball et al., 2005). Nessa perspectiva, o pressuposto de que só se deve ensinar o que se sabe tem aberto caminho para várias discussões por parte de pesquisadores, advindas principalmente dos estudos de Shulman (1986, 1987), que considera a existência de um conhecimento que é particular ao ensino.

Ao categorizar os conhecimentos necessários que moldam a base da docência, Shulman (1987) propõe um conjunto de domínios desses conhecimentos, associados ao gerenciamento de sala de aula; o conhecimento dos estudantes e as suas características; o conhecimento dos contextos educativos, das suas bases filosóficas e históricas; o conhecimento do currículo, do conteúdo; e o *conhecimento pedagógico do conteúdo — Pedagogical Content Knowledge* (PCK), sendo este último, um conhecimento exclusivamente da docência, que diferencia a profissão do professor de outra. As discussões provenientes da compreensão desse domínio de conhecimento culminaram no interesse por investigações sobre o conhecimento profissional docente na pesquisa em Educação Matemática (Bairral, 2002; Pazuch & Ribeiro, 2017; Pires, 2006; Ponte, 1999).

Neste texto, assumimos que o conhecimento profissional do professor voltado para o ensino de matemática se constitui, principalmente, pelas situações de ensino coproduzidas no âmbito do planejamento, da ação em sala de aula e da reflexão sobre episódios que nela ocorrem. Estas situações podem revelar dimensões dos conhecimentos de professores mobilizados nos momentos de planejamento, do próprio ensino e da reflexão sobre conceitos geométricos, em particular. Nestes momentos, o conhecimento profissional do professor que ensina matemática se situa pelas relações com os estudantes, na conexão com os aspectos curriculares e com os conceitos a serem ensinados.

Nesse cenário, com vistas a compreender as diferentes *nuances* dos conhecimentos do professor de/que ensina matemática, pesquisadores apresentam construtos teóricos que auxiliam para tal aprofundamento. Destacamos o *Mathematical Knowledge for Teaching*[1] proposto por Ball et al. (2008) e o *Knowledge Quartet*[2] *(KQ),* inicialmente discutido em Rowland et al. (2005). Neste artigo, utilizamos a estrutura do *KQ* como uma ferramenta teórica para a análise da prática do professor que ensina matemática, em especial, quando este participa de um processo de formação continuada em geometria, inserido em um contexto de colaboração entre professores da escola básica e pesquisadores do campo da Educação Matemática.

---

1 Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT – sigla em inglês).

2 Optamos por não traduzir o termo Knowledge Quartet para evitar perda de sentido.

No que concerne ao ensino de geometria, mesmo que se reconheça a importância do envolvimento dos estudantes com os conceitos geométricos, o processo didático dessa disciplina ainda é pouco explorado em sala de aula, principalmente nas aulas de matemática da escola básica (Almouloud et al., 2004; Alves & Sampaio, 2010; Lobo & Bayer, 2004). De fato, muitos professores priorizam cálculos algébricos, o que compromete a formação de conceitos geométricos pelos estudantes (Pavanello, 2004).

Essa situação pode estar relacionada aos processos de formação de professores que favorecem os conteúdos algébricos, enquanto a geometria é estudada superficialmente, o que pode ocasionar ensino de conceitos equivocados (Maia, 2014). Pesquisas como as de Kazanowski (2011), Nacarato et al. (2009) e Manrique e André (2009) descrevem uma carência em relação aos conhecimentos geométricos dos professores, os quais se apresentam limitados ou nulos. Com o objetivo de minimizar essas dificuldades, nos seus estudos, esses pesquisadores promoveram processos de formação continuada, propondo ações e reflexões sobre a prática, de modo a incentivar o distanciamento dos professores da racionalidade técnica (Schön, 2000).

Nessa linha, Marquesin e Nacarato (2011, p. 104), por meio de uma "[…] prática contínua de estudos, reflexão, novos estudos e (re)elaboração de tarefas de geometria para a sala de aula […]", investigaram as transformações advindas do movimento entre os saberes relativos aos conceitos geométricos de professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (AIEF) – estudantes de 07 a 10 anos de idade – e os saberes da prática, em um trabalho colaborativo. Os resultados sugerem avanços significativos no conhecimento geométrico e no conhecimento pedagógico desses professores. As autoras concluem que isso se deve ao caráter colaborativo do processo formativo e é reflexo da dinâmica posta pelo grupo.

Assim, considerando as dificuldades, a insegurança e até mesmo o desinteresse por parte dos professores, ao aprofundarem os conteúdos de geometria em sala de aula, estudos têm destacado a importância da formação do professor para um bom desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de geometria nas aulas de matemática (Crescenti, 2008; Cunha, 2009; Prado & Lobo da Costa, 2012).

Na literatura, há estudos com foco de análise orientado à formação de professores e aos conhecimentos geométricos que eles possuem (Almouloud et al., 2004; Curi, 2005; Marquesin & Nacarato, 2011, Pinto et al., 2014). Entretanto, essas pesquisas estão, em sua maioria, voltadas para os AIEF. Portanto, este trabalho visa contribuir para essa temática, concentrando-se nos conhecimentos dos professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental (AFEF) – 11 a 14 anos. Nesse viés, para elucidar a investigação pautada nos conhecimentos postos em ação pelos professores, escolhemos o *KQ*, por ser uma ferramenta teórica constituída pela prática do professor em sala de aula e que possibilita a identificação dos conhecimentos mobilizados no ato de ensinar (Rowland, 2013).

Dada a problemática do estudo, neste contexto, utilizamos o *KQ* para atender ao seguinte objetivo: *identificar e compreender os conhecimentos geométricos mobilizados por professoras de matemática, ao abordarem conceitos de geometria para estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental*. Explicitamos que só conseguimos "identificar e compreender" algo, quando conhecemos. Neste sentido, com base em Rowland (2013), "[...] o KQ oferece aos professores e aos pesquisadores tal quadro conceitual, particularmente, adequado para compreender a contribuição do conhecimento do professor para o ensino de matemática[3]".

Assim, nas próximas seções, apresentaremos o que é e como se desenvolveu o *KQ*, ferramenta teórica utilizada para análise de situações de ensino, os conceitos relacionados aos conhecimentos geométricos; o contexto e o método da pesquisa; a análise dos dados; e as conclusões.

2. Knowledge Quartet e as dimensões do conhecimento do professor que ensina matemática

O quadro teórico do *KQ* é resultado dos estudos desenvolvidos por pesquisadores inseridos no grupo Subject Knowledge in Mathematics – SKIMA –, na Universidade de Cambridge. Estruturada inicialmente por Rowland et al. (2005), essa ferramenta foi elaborada a partir da observação e das filmagens de aulas planejadas e ministradas por professores de matemática em formação inicial. O objetivo da pesquisa estava voltado a identificar, na prática, a relação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo que esses futuros professores possuíam e a forma como utilizavam esses conhecimentos nas suas atuações em sala de aula, uma vez que esse ambiente é propício para revelar as ações pedagógicas dos professores. Nesse aspecto, o *KQ* difere dos conceitos apresentados por Ball et al. (2008) quanto aos subdomínios de conhecimento que o professor precisa para obter sucesso em suas aulas, relacionados ao MKT. Segundo Rowland (2013), o MKT visa desvendar e esclarecer as noções um tanto evasivas e teoricamente subdesenvolvidas de SMK e PCK. Já, no KQ, a distinção entre os diferentes tipos de conhecimento matemático é menos significativa do que a classificação das situações em que o conhecimento matemático é discutido no ensino. O *KQ* busca categorizar, no contexto da aula, eventos em que o professor revela o conhecimento matemático na ação de ensinar, isto é, remete às dimensões de *conhecimento no ensino* (Rowland, 2013).

[3] "[…] the KQ offers practitioners and researchers such a conceptual framework, particularly suited to understanding the contribution of teacher knowledge to mathematics teaching." (Rowland, 2013, p. 40).

Ao se analisarem os dados produzidos, foram encontradas ações significantes relacionadas a esses domínios de conhecimento (matemático e pedagógico), caracterizadas através de 18 códigos (Rowland et al., 2005). Feito isso, foram propostas quatro amplas dimensões (ou unidades) que englobam esses códigos. As dimensões são: *(i) Fundamento*, *(ii) Transformação*, *(iii) Conexão* e (*iv) Contingência* (Rowland, 2013; Turner & Rowland, 2008). Ressaltamos que, por ser uma teoria relativamente nova, o *KQ* vem sendo estudado e ampliado por outros pesquisadores (Thwaites et al., 2011), além dos seus criadores; e novos códigos foram e vêm sendo identificados, de modo a aprimorar e ampliar a aplicabilidade do seu uso (Rowland & Turner, 2017).

Posto isto, essa ferramenta de análise possibilita refletir tanto sobre o ensino quanto sobre os conhecimentos mobilizados por professores de matemática a partir da sua prática pedagógica em sala de aula. De acordo com os autores, o *KQ* é uma ferramenta abrangente para pensar maneiras de compreender e desvelar como o conhecimento do conteúdo entra em jogo na sala de aula (Turner & Rowland, 2011). Na Tabela I estão dispostas as dimensões e os seus respectivos códigos contributivos.

TABELA I
Descrição das dimensões do *Knowledge Quartet*

Dimensão	*Códigos contributivos*
Fundamento: Conhecimento e compreensão da matemática por si só e da pedagogia específica da matemática, crenças sobre a natureza da matemática, os objetivos do ensino de matemática e as condições sob as quais os alunos aprenderão melhor a matemática.	– Consciência de propósitos – Uso de livros didáticos – Dependência de procedimentos – Identificação de erros – Domínio do conteúdo – Base teórica da pedagogia – Uso de terminologia matemática
Transformação: Apresentação de ideias aos alunos sob a forma de analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações.	– Escolha de exemplos – Escolha de representações – Uso de materiais instrucionais – Uso de demonstrações para explicar procedimentos
Conexão: Sequenciamento de material para instrução e conscientização das demandas cognitivas relativas a diferentes tópicos e tarefas.	– Antecipação da complexidade – Decisões sobre sequenciamento – Reconhecimento da adequação conceitual – Conexões entre procedimentos – Conexões entre conceitos
Contingência: Capacidade de dar respostas convincentes, fundamentadas e bem informadas a eventos imprevistos e não planejados.	– Desvio de agenda – Respostas às ideias dos alunos – Uso de oportunidades – *Insights* do professor durante a aula – Reação à (in)disponibilidade de ferramentas e recursos

Nota: Rowland (2013, p. 25, tradução nossa)[4]

A dimensão *fundamento* está intrinsecamente ligada ao histórico teórico e às crenças do professor. Tem relação direta com o conhecimento construído na escola e na universidade, desde a sua formação inicial, o que, intencionalmente ou não, o preparou para a atuação em sala de aula. Difere das demais dimensões, pois está fundamentada no conhecimento constituído, e este não depende de seu uso na prática, pois permite que, a partir da junção desses conhecimentos acadêmicos e pessoais, a pessoa tenha competência para realizar escolhas e estratégias pedagógicas fundamentais, independentemente de imitação ou hábito (Rowland, 2013). É, portanto, a base para as demais dimensões.

As três últimas dimensões do *KQ* estão vinculadas com a maneira como o professor aplica o conhecimento na preparação e na condução das suas aulas (Rowland, 2013). Assim, na dimensão *transformação* encontra-se a observação de Shulman (1987, p. 15, tradução nossa) de que a base de conhecimento para o ensino distingue o professor de outras profissões, pela "[…] capacidade de um professor de transformar um conhecimento de conteúdo que ele possui, em formas que são pedagogicamente poderosas" (Rowland, 2013).

A dimensão *conexão* se caracteriza pela coerência no planejamento de tarefas para o ensino. Permite ao professor, através de uma aula ou uma sequência delas, unificar os conteúdos trabalhados e fazer conexões entre diferentes significados e descrições de conceitos particulares, ou entre formas alternativas de representar conceitos e procedimentos (Rowland, 2013). Também possibilita, a partir de uma sequência de conteúdos, apresentar de forma coerente certos assuntos, por mais complexos que sejam.

Por fim, a dimensão *contingência* está relacionada às habilidades que os professores detêm para dar respostas em situações não previstas no planejamento das suas aulas (Rowland, 2013). Ainda que se possa prever alguns possíveis cenários no ambiente de aprendizagem, haverá aqueles que não pertencem ao *corpus* do planejamento inicial. Possivelmente, estes imprevistos podem proporcionar benefícios tanto para o aluno que os gerou como também para outros que não necessariamente estavam envolvidos nas circunstâncias iniciais.

Uma vez caracterizada cada dimensão, destacaremos algumas considerações sobre os tipos de conhecimentos geométricos e os conceitos matemáticos presentes na seção de apresentação e análise dos dados.

---

[4] O KQ está em constante ampliação de códigos. Neste texto, usamos a síntese de códigos de Rowland (2013).

3. Conhecimentos e conceitos[5] geométricos

A geometria é a área da matemática de estudo das formas geométricas, do espaço e suas relações. De acordo com os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Secretaria de Educação Fundamental [SEF], 1998), são elementos fundamentais o ponto, a reta e o plano, e sua compreensão contribui para a representação, a construção e a visualização do espaço, permitindo o desenvolvimento e a aquisição do pensamento lógico e dedutivo.

Gonseth (1945) distingue três aspectos do conhecimento geométrico: o intuitivo, o experimental e o teórico, que podem ser entendidos pelo seguinte exemplo: "uma reta que passa por um ponto que é interior à região limitada por uma circunferência vai interceptar ou não essa circunferência?" (Pais, 1996, p. 72). Intuitivamente, o estudante que fizer a construção mental dessa situação poderá chegar à conclusão de que a reta intersectará a circunferência em dois pontos distintos. A esse encadeamento informal de ideias que ocorre de maneira natural e pode ser usado para aceitar ou negar o enunciado, chamamos de intuição. No entanto, esse mesmo resultado poderia ser constatado por meio da construção de um desenho, o qual faz parte da construção experimental do conceito. Além disso, o problema poderia ser solucionado também, fazendo uso da demonstração formal, sem necessariamente utilizar a noção intuitiva ou experimental. Esse é o aspecto teórico do conhecimento geométrico.

Desse modo, na educação básica, os estudantes necessitam se envolver com atividades que promovam a construção desses aspectos, os quais são evidenciados em documentos curriculares oficiais. Em particular, na unidade temática "Geometria", da *Base Nacional Comum Curricular*[6] (*BNCC*), afirma-se:

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (Ministério da Educação [ME], 2018, p. 269)

---

[5] Os conceitos e as definições descritas nessa seção referem-se aos assuntos abordados nos eventos críticos.

[6] A *BNCC* é um documento normativo que define aprendizagens essenciais para estudantes da Educação Básica e serve como referência nacional para a formulação dos currículos (Brasil, 2018).

Dessa forma, torna se imprescindível o trabalho amplo do professor para ajudar a promover essas aprendizagens, considerando os diversos aspectos conceituais que envolvem a geometria plana e espacial. A geometria plana concentra-se em compreender as propriedades associadas a objetos bidimensionais. Uma classe importante desses objetos são os polígonos, regiões fechadas delimitadas por segmentos de reta. O quadrado, o triângulo, o paralelogramo e o trapézio são exemplos de polígonos. Em particular, os polígonos regulares são aqueles que têm todos os lados e ângulos congruentes. A seguir, enunciamos algumas das propriedades dessa categoria de figuras planas (Dolce & Pompeo, 1997):

- Todo polígono regular pode ser inscrito numa circunferência, isto é, existe um raio tal, que a circunferência correspondente contém todos os vértices do polígono.
- Todo polígono regular pode ser circunscrito a uma circunferência, ou seja, existe um valor para o raio, tal que a circunferência correspondente tangência os pontos médios dos lados do polígono.

Observamos então que, por exemplo, os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares satisfazem a condição de ser um polígono regular. Em se tratando de geometria espacial, esta contempla as propriedades dos objetos tridimensionais. Como exemplo, temos os sólidos geométricos como as pirâmides, o octaedro, os prismas regulares, o cilindro, o cone e a esfera. Notemos que os corpos redondos citados podem ser obtidos por rotações do plano, isto é, existe uma figura geométrica plana cuja rotação sobre certo eixo gera o sólido. Para ilustrar, consideremos, no plano cartesiano, os pontos $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ e $D = (1, -1)$.

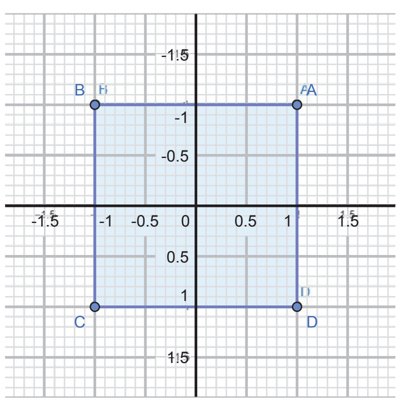


Figura 1. Representação do polígono ABCD no plano cartesiano

Os eixos x e y são eixos de simetria da figura *ABCD*. Se girarmos 180º em torno do eixo y, o sólido formado é o cilindro cuja base é uma circunferência de raio 1, perpendicular ao eixo y. Note que poderíamos fazer o mesmo processo utilizando o eixo x, obtendo assim o mesmo sólido, cuja base seria perpendicular ao eixo x. Isto é, o paralelogramo *ABCD* gera o cilindro através da rotação pelo eixo y ou x. Na Figura 2 observamos a rotação pelo eixo y.

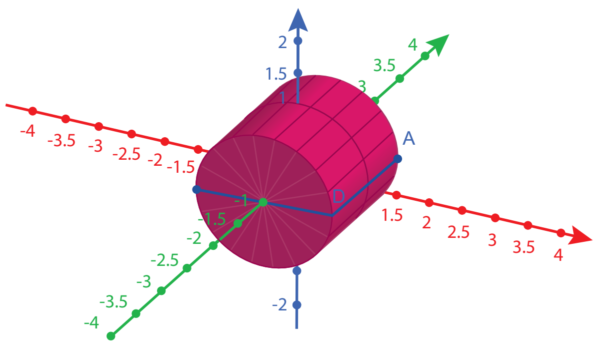


Figura 2. Sólido formado pela rotação do polígono ABCD sobre o eixo y

O processo de construção da esfera e do cone segue de maneira similar. Por exemplo, podemos considerar, respectivamente, a semicircunferência rotacionada pelo diâmetro e o triângulo isósceles rotacionado pelo seu eixo de simetria. Adiante apresentaremos o contexto e a metodologia da pesquisa.

4. Contexto do estudo: da produção dos dados à proposta de análise

Assumimos a metodologia de pesquisa de caráter qualitativo, pois estamos interessados em analisar e interpretar os dados de forma a entender o "como" e o "porquê" de certos eventos ocorrerem numa trajetória processual na totalidade, considerando as falas, os gestos, os diálogos e as ações dos participantes.

Dentre as características que podem ser atribuídas à pesquisa qualitativa, destacamos aquelas indicadas por Garnica (2004), que nos auxiliam como escolha metodológica: (i) a transitoriedade dos seus resultados; (ii) a impossibilidade de uma hipótese preestabelecida, que será refutada ou comprovada no decorrer da pesquisa; (iii) a não neutralidade do pesquisador, que, em suas interpretações não consegue se desvencilhar das suas vivências pessoais; (iv) o processo tão importante quanto o resultado; e (v) a impossibilidade de organizar regulamentações prévias, estáticas e generalistas em procedimentos sistemáticos. Dispondo dessas premissas e buscando uma aproximação dialética entre universidade, escola e pesquisa, os dados foram produzidos num contexto de formação continuada de professores em geometria, tendo a colaboração como norteadora das ações desenvolvidas e o espaço escolar como o "lugar" da formação.

As participantes da pesquisa constituíram um grupo com características colaborativas (Fiorentini, 2012), formado por duas professoras[7] de matemática da rede pública de ensino (PB e PV), a pesquisadora e uma mestranda. A professora Beatriz tem formação em Pedagogia e complementação pedagógica em Licenciatura em Matemática, e possuía, no momento da pesquisa, 14 anos de experiência docente, em sua maior parte na Educação Infantil e em escolas municipais. Há três anos ministra aulas de matemática, tanto em escolas municipais, quanto estaduais do estado de São Paulo. Já a professora Vera cursou o magistério e é formada em Licenciatura em Matemática. Também atua em escolas estaduais e municipais, com uma carreira docente de 9 anos até o momento da pesquisa.

O grupo foi organizado em março de 2019, e a escolha dessas professoras ocorreu, no nosso contato com a escola, pelo interesse[8] delas na temática a ser trabalhada e por seu envolvimento voluntário. A escola estadual está localizada no município de Santo André, estado de São Paulo. Houve um total de dez encontros, sete com o envolvimento de todo o grupo, com duração de uma hora e meia cada e três, de duas horas/aulas cada um, nas dependências das salas de aula[9] das professoras. Em aula, o trabalho foi desenvolvido com estudantes do 9.º ano dos AFEF.

Cada encontro tinha uma finalidade na contribuição de um espaço de discussão e formação, dividindo-se em momentos de planejamentos de tarefas de geometria (encontros 3, 4 e 6), aplicação dessas tarefas em sala (encontros 5, 7 e 8) e posteriores reflexões sobre a experiência de ensino realizada (encontros 6 e 9). No encontro 1 houve a apresentação das participantes, a realização de uma tarefa de cunho investigativo pelas professoras, proposta pelas pesquisadoras (ver Ponte et al., 2016), e organização dos demais encontros pelo grupo.

Como havia uma preocupação em aproximar a teoria da prática, ocorreram momentos destinados a discussões em torno do ensino da matemática, compreensões

---

7 As professoras assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido e neste texto, serão identificadas como PB (professora Beatriz) e PV (professora Vera). Os estudantes serão identificados como E1, E2 e, assim, consecutivamente.

8 Inicialmente quatro professores se mostraram interessados, no entanto, por indisponibilidades de horários compatíveis, optamos pelo trabalho apenas com estas duas professoras.

9 As aulas também foram consideradas como encontros.

sobre a estrutura da *BNCC*, em especial a unidade temática de geometria para os AFEF, leitura e debates sobre textos teóricos — Martins e Curi (2018) e Stein e Smith (2009) — (encontros 2 e 10).

Neste artigo, o foco está nas aulas ministradas, já que pretendemos identificar e compreender os conhecimentos geométricos mobilizados na prática das professoras. Assim, para melhor captura dos movimentos e das ações em sala de aula, utilizamos gravação em áudio e vídeo. Para a análise desse material, recorremos ao modelo analítico sugerido por Powell et al., (2004), composto por sete fases: (i) observar atentamente os dados de vídeo; (ii) descrever esses dados; (iii) identificar eventos críticos; (iv) transcrever; (v) codificar; (vi) construir o enredo; e (vii) compor a narrativa. Esse processo interativo e não linear ajuda a compreender os significados das dinâmicas que ocorrem em determinado cenário educacional.

O grupo planejou, conjuntamente, na perspectiva do trabalho colaborativo (Saraiva & Ponte, 2003), duas tarefas de matemática com ênfase em conceitos geométricos, cada qual dividida em duas partes, tomando como referência as habilidades requeridas no documento da *BNCC* — unidade de geometria. A tarefa 1 contemplava conceitos de geometria plana e visava, na primeira parte da tarefa, identificar e reconhecer figuras planas. Na segunda parte, o objetivo era identificar propriedades dos quadriláteros, cuja habilidade requerida era EF06MA20 — “Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles” (ME, 2018, p. 303).

Na tarefa 2, conceitos de geometria espacial foram aprofundados, em particular, o trabalho com sólidos geométricos. A proposta de aprendizagem na primeira parte consistia em identificar características dos sólidos geométricos, e a habilidade requerida era: EF04MA17 — “Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais” (ME, 2018, p. 293). Na segunda parte, os estudantes se envolveram na montagem dos sólidos, partindo da sua planificação.

Destacamos que, por não terem o costume de trabalhar com tarefas investigativas e propor dinâmicas em grupo (exploração de tarefas em pequenos grupos), as professoras optaram por iniciar as atividades retomando alguns conceitos já conhecidos pelos estudantes em anos anteriores. Na sequência, apresentamos as tarefas 1 (parte 2) e 2 (parte 1) conforme foram propostas aos estudantes. Os respectivos conceitos, dúvidas e dificuldades oriundos do desenvolvimento das tarefas em aula são os objetos de discussões nos eventos críticos selecionados.

Tarefa 1

Cole o quadrilátero que a professora te entregou no espaço
e identifique suas características:

- Lados opostos paralelos e iguais ()
- Diagonais diferentes ()
- Diagonais cortam-se no meio ()
- Ângulos iguais e retos ()
- Diagonais iguais
- Lados iguais ()
- Diagonais perpendiculares ()
- Polígono regular ()
- Bases paralelas ()
- Possui dois ângulos retos ()
- Diagonais não se cortam ao meio ()
- Bases não iguais ()
- Lados diferentes ()

Figura 3. Ilustração Tarefa 1 – Parte 2

Considerando o ambiente da sala de aula interativo e dinâmico (repleto de múltiplas situações corriqueiras e/ou inesperadas), e para delimitarmos a imensa gama de dados encontrados, buscamos identificar episódios de aula que melhor se enquadrassem ao objetivo do estudo. Nessa linha, selecionamos *eventos críticos,* que "[…] podem ser descritos como sequências conectadas de expressões e ações que, dentro do contexto das nossas – *a priori* ou *a posteriori* – questões de pesquisa, requerem explicação por nós, pelos estudantes ou por todos" (Powell et al., 2004, p. 104, ênfases no original).

É considerável ponderar que a seleção desses eventos críticos ocorreu após os conteúdos dos vídeos serem vistos e revistos, de maneira detalhada. Em um primeiro momento, observamos cada aula em particular, buscando associar os diálogos e os comportamentos das participantes às dimensões e códigos do *KQ*.

Tarefa 2								
Marque com um x as características de cada sólido geométrico								
Características	Cubo	Esfera	Pirâmide quadrangular	Pirâmide triangular	Prisma triangular	Prisma quadrangular	Cone	Cilindro
Bases quadrangulares								
É um corpo redondo, ou seja, possui superfícies curvas								
Lateral arredondada								
Sua formação é dada pela rotação de um triângulo								
Sua figura geradora ê um semicírculo, que gira em torno de seu eixo de rotação								
Possui um paralelogramo que gira em torno de seu eixo								
Possui uma base								
Há um vértice que une todos polígonos de suas laterais								
Suas laterais são formadas por triângulos								
Suas laterais são formadas por retângulos								
É uma pirâmide, ou seja, possui uma base e faces laterais triangulares com um vértice em comum								
Todas as faces são quadrados congruentes								
Bases trianulares								
Bases circulares								
É um prisma, ou seja, possui duas faces congruentes								

Figura 4. Ilustração da Tarefa 2 – Parte 1

Após identificarmos esses aspectos, elegemos os eventos mais representativos nessa dinâmica. Assim, foram atribuídas temáticas para expressar o conteúdo do evento crítico.

Para análise dos dados, utilizamos o *KQ* como uma lente teórica para interpretar os eventos selecionados, visando identificar em quais situações cada dimensão é revelada. Para auxiliar nessa identificação, baseamo-nos no trabalho de Oliveira e Cyrino (2015), de forma a apresentar e analisar os dados, evidenciando a relação entre os diálogos expostos e a presença das dimensões e dos códigos em cada evento. Na Figura 5 ilustramos esse aporte.

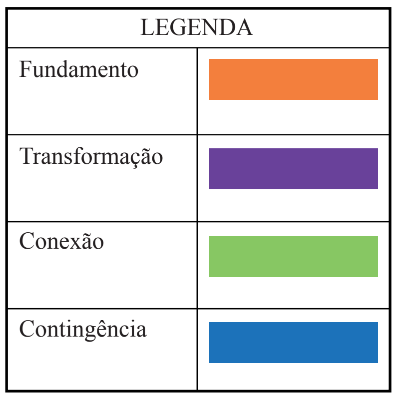


Figura 5. Dimensões do *KQ*, em cores

Nota: Adaptado de Oliveira e Cyrino (2015)

Na sequência, exporemos a apresentação e a análise dos dados. Os aspectos que serão considerados para análise são as ações desencadeadas pelas professoras, na prática de ensino, que evidenciam os conhecimentos geométricos mobilizados em exercício, pautado no trabalho colaborativo.

5. Apresentação e análise dos dados

Ao analisar os dados, categorizamos os eventos críticos a partir da incidência de vezes que cada professora fez referência a alguma(s) das dimensões do *KQ* em sala de aula (Tabela II). Além disso, ao longo do artigo, destacamos breves diálogos entre os membros do grupo para fortalecer a compreensão das discussões e das reflexões ocorridas durante os momentos de formação.

TABELA II
Número de eventos críticos classificados por dimensão

DIMENSÃO	Encontro[10] 5		Encontro 7	Encontro 8	TOTAL
	Aula Beatriz	Aula Vera	Aula Vera	Aula Beatriz	
	Tarefa 1		Tarefa 2	Tarefa 2	
Fundamento	3	7	5	1	16
Transformação	7	3	7	1	18
Conexão	1	7	1	4	13
Contingência	4	7	7	9	27
Total [11]	20	30	31	27	108

Como era esperado, situações relacionadas à dimensão *contingência* foram as que mais apareceram em ambas as aulas das professoras, em que as duas tarefas foram aplicadas e compuseram a presença de todos os seus códigos: *desvio de agenda; respondendo às ideias dos alunos; uso de oportunidades; insights do professor durante a aula; e reação à (in)disponibilidade de ferramentas e recursos*. A dimensão *transformação* vem logo na sequência, atrelada aos códigos *escolha de representação; escolha de exemplos e uso de materiais instrucionais.*

Em oposição a estas duas dimensões, observamos que a dimensão *fundamento* e a *conexão* se revelaram de maneira mais sutil, a primeira reportada pelos códigos *base teórica da pedagogia; uso de terminologia; e dependências de procedimentos*, e a segunda correlatada com todos os seus códigos: *antecipação da complexidade; decisões sobre sequenciamento; reconhecimento da adequação conceitual; conexões entre procedimentos; e conexões entre conceitos*. Inferimos que, por ser a dimensão *fundamento* o eixo que abarca as crenças, as vivências e a interiorização do entendimento da matemática por cada indivíduo; e por constituir a base para as tomadas de decisões, o planejamento das tarefas foi o momento em que esses conhecimentos se manifestaram em larga escala (Gumiero & Pazuch, 2021a; Gumiero & Pazuch, 2021b).

Dado o panorama das dimensões e dos códigos do *KQ* que emergiram na prática de ensino investigada, dentre os 96 eventos críticos identificados, 40 referentes às aulas em que a tarefa 1 foi aplicada e 56 na aplicação da tarefa 2, selecionamos alguns desses eventos que melhor elucidam o contexto

[10] No encontro 5 as duas professoras desenvolveram a aula no mesmo dia, o que não ocorreu nos encontros 7 e 8.

[11] Doze eventos foram classificados com mais de uma dimensão.

— sala de aula, professor-aluno e professor-*KQ*. Ressaltamos que os eventos críticos selecionados versam sobre quatro momentos considerados relevantes para discussão e entendimento de como os conhecimentos geométricos são mobilizados em ação pelas professoras.

Os eventos 1 e 2 contemplam uma contingência gerada pelos estudantes sobre a definição de polígono regular, ao se envolverem na tarefa sobre quadriláteros, evidenciando o procedimento de resposta e a reação de cada professora à situação vivenciada. Os eventos 3 e 4, relacionados à aplicação da tarefa sobre sólidos geométricos, apresentam momentos em que os conhecimentos matemáticos e pedagógicos da professora Vera são expostos na correção da tarefa, destacando sua movimentação para escolher as estratégias e os exemplos para a condução da explicação.

Em um primeiro momento, apresentaremos dois eventos que revelam a ocorrência de situações análogas em ambas as aulas das professoras, porém cada uma delas reagiu de maneira diferente. O evento crítico 1 foi identificado no Encontro 5, especificamente na aula da PB. Em um certo momento do andamento da aula, o estudante E1 questionou a PB sobre o que é um polígono regular, o que significou para a professora um momento contingente, como se mostra no excerto a seguir.

Evento Crítico 1: Definição de conceitos – "Polígono regular" – Tarefa 1 – Parte 2

[01] E1: O que é um polígono regular?
[02] PB: Oi?
[03] E1: O que é um polígono regular?
[A professora ignora a pergunta da estudante e coloca atenção em outra característica do quadrilátero da tarefa.]
[04] PB: Possui dois ângulos retos…
[05] E1: Professora, o que é um polígono regular?
[06] E2: Professora, eu não estou entendendo.
[A professora vai para o canto da sala, onde fica a sua mesa e pega o celular. Ela, então, pesquisa a definição de polígono regular.]
[07] E2: Professora!
[08] PB: Oi.
[09] E2: Vem aqui.
[Enquanto a professora caminha em direção à estudante, ela vai lendo em voz alta a definição de polígono regular encontrada no celular.]
[10] PB: *"Um polígono diz-se regular se tiver todos os seus lados e ângulos iguais, sejam eles internos ou externos. Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência"*.
[11] E2: Professora, explica o que você leu.
[A professora lê novamente.]

[12] PB: *"Um polígono diz-se regular se todos os seus lados e ângulos são iguais… se todos os seus lados e ângulos são iguais…". Então tem lados iguais?* (Refere-se a uma característica do quadrilátero.)
[Alguns estudantes respondem sim e outros não.]

[13] PB: *Forma um ângulo igual? [Faz o desenho de um ângulo de 90.º com as mãos]. Nos dois lados? Então ele é um polígono regular. Se não formam ângulos iguais, nem lados iguais, não é regular.*
(Sala de aula, professora Beatriz, 11 abr. 2019)

No trabalho com a tarefa que envolvia os quadriláteros, os estudantes apresentaram dificuldades na compreensão de alguns conceitos, como retas paralelas, retas perpendiculares e o que seria polígono regular. Na aula da PB, ao transparecer essas dificuldades, a professora não havia atentado, na fase de planejamento da tarefa, à definição do conceito de polígono regular, o que gerou um desconforto quando um estudante levantou esta questão. Por meio da contingência iniciada pelo questionamento do estudante, a fala da PB sugere que não sabe ou não lembra essa definição. Assim, em um primeiro instante, ela não considera a pergunta do aluno, mas na sequência se utiliza de um suporte tecnológico, o celular, para buscar a informação e responder ao aluno. Caracterizamos que isso desencadeou a contingência, no turno [10]. Após fazer a leitura da definição, a dúvida não foi sanada, o que indica também uma possível dificuldade de compreensão por parte da professora. Aqui ficou visível a lacuna relacionada à dimensão *fundamento*, pois a maneira como a professora se orienta para responder a contingência gerada revela a lacuna de conhecimento sobre o assunto.

O evento crítico 2 retrata uma situação análoga ao evento anterior, na qual a PV, assim como na aula da PB, é confrontada pela dúvida dos estudantes sobre polígonos regulares no momento de realização da tarefa sobre quadriláteros pelos estudantes. Diferentemente de PB, PV responde ao questionamento do aluno de maneira imediata, como visto no turno [15] a seguir.

Evento crítico 2: Definição de conceitos – "Polígono regular" – Tarefa 1– Parte 2

[14] E1: Professora, o que é polígono regular?

[15] PV: *Polígono regular... é quando tenho só... como posso explicar... quando tem, quando todos os ângulos são iguais dentro do… da figura. [...]*
[Vai para outra dupla de estudantes.]

[16] PV: *[...] Polígonos… Gente, polígono regular é que tem ângulos iguais, tudo bem?* (Fala isso em voz alta para a sala toda) *são ângulos iguais, ok?*

[17] E2: Essa aqui que eu não entendi.

[18] PV: Polígono regular são ângulos iguais, todos os ângulos são?… esse ângulo é igual a esse? É igual a esse e a esse?

[19] E2: Não.
[20] PV: Então não é.
[21] E2: Esse aqui, professora.
[22] PV: Diagonais perpendiculares?
[23] E2: Não, professora, o debaixo.
[24] PV: *Polígono regular é o que eu lhe falei, polígono regular são figuras planas que têm todos os ângulos iguais.*
[25] E2: Os dois, não é?
[26] PV: *Aqui, por exemplo, aqui é um ângulo, aqui é um ângulo, aqui é um ângulo, aqui é um ângulo, eles são iguais?*
[27] E2: Não.
[28] PV: Então esse daqui é um polígono regular?
[29] E2: Não.
[30] PV: *Não, não é. Vou dar um exemplo de um que é. A folha de sulfite, tem um ângulo aqui, um ângulo aqui, um ângulo aqui, um ângulo aqui, são iguais?*
[31] E2: São iguais.
[32] PV: Aí é, entendeu?
[33] E2: Entendi…
(Sala de aula, professora Vera, 11 abr. 2019)

Contudo, nota-se que a professora não possui o entendimento claro e correto dessa definição, conforme exposto nos turnos [15], [16] e [24]. Em sua concepção, ela considera que, se uma figura geométrica possuir todos os seus ângulos internos e externos iguais é suficiente para ser classificado como polígono regular, algo equivocado. Percebemos de maneira mais intensa essa compreensão, quando ela exemplifica que a folha sulfite é um polígono regular, visto no turno [30], o que implicou na construção de um entendimento errôneo, também por parte dos estudantes.

Nas duas situações descritas, dimensões do *KQ* foram reveladas nas ações das professoras: *fundamento* e *conexão* na aula de Beatriz e *fundamento* e *transformação* na aula de Vera, com destaque para a dimensão *contingência*, que emergiu em ambas. Em particular, associada ao código – *respostas às ideias dos alunos*, atrelado de maneira às dificuldades do professor. Resultados ampliados sobre a dimensão contingência, sobre este grupo com características colaborativas podem ser encontrados em Gumiero e Pazuch (2021b).

Após a aula, refletimos sobre a abordagem e apresentamos um episódio em vídeo que enfatizou esses aspectos. No diálogo, destacamos as reações das professoras. PB compartilha: "*Durante o vídeo, precisei consultar meu celular... vejam só, (consultando o celular enquanto assistia). Eu realmente não tinha a lembrança... Felizmente, temos esses recursos para auxiliar no momento, para refrescar a memória.*" [...] *Como mencionei no primeiro encontro, minha formação não é muito sólida, então preciso refletir antes de responder* ". Por sua vez, PV pondera: "*Às vezes, os termos técnicos nos levam a pensar 'ah, entendi'. Mas acredito que consegui responder depois: 'todos os lados iguais, todos os ângulos iguais'. Sabe, por quê? Fico considerando que há alunos que desconhecem o conceito de ângulo. Então, é nesse ponto que me detenho...*" Na sequência, a pesquisadora intercede para esclarecer: "*Isso mesmo, mencionar 'todos os ângulos iguais' também integra a definição de um polígono regular, concorda? Bastaria complementar com 'todos os lados iguais' para dissipar a dúvida sobre se um retângulo é um polígono regular apenas por possuir ângulos iguais.*" PV indica que retomará esse conceito com os alunos, conforme sugerido: "*Exato, mas planejo abordar isso novamente com eles. Vou perguntar: 'Pessoal, quem recorda...?' Farei essa pergunta de maneira descontraída. 'Vocês se lembram do retângulo sobre o qual mencionei que era um polígono regular? Eu disse que era ou não era?' Vou questionar dessa forma (risos).*"

No que segue, daremos ênfase a uma situação que se desdobrou a partir da correção de uma das características presentes na tarefa sobre sólidos geométricos. O evento crítico 3 descreve o modo como a PV encara a dificuldade apresentada pelos estudantes na compreensão de conceitos geométricos relacionados à rotação de figuras planas, como exposto na sequência.

Evento Crítico 3: Definição de conceitos – "Rotação de figuras planas" – Tarefa 2 – Parte 1

[34] PV: *[...] A característica seis, fala assim: possui um paralelogramo que gira em torno do seu eixo", e aí?*

[35] ESTUDANTES: Professora, octaedro.

[36] PV: *Octaedro? Olha, vocês acham? ... o eixo do octaedro seria a união desse vértice de cima… uma reta, né? Que une esse vértice de cima com esse vértice debaixo (mostra na folha). Tem apenas um paralelogramo que gira em torno desse eixo?*
[Os estudantes não respondem.]

[37] PV: Observando…

[38] E1: Ah! Não sei, aqui… não.

[39] PV: *Primeiro, né, o paralelogramo que gira vai ser qual figura geométrica? Quando giro alguma coisa o que é que forma? Uma esfera, ou… um corpo redondo, né? Então ele estaria ou no cone, ou no cilindro. Se eu desmontar um cone ou desmontar um cilindro...*

[40] E2: Não entendi!

[41] PV: *Se eu desmontar um cone ou um cilindro… qual dessas figuras vai ter um paralelogramo na planificação?*
[Os estudantes ficam meio receosos em responder.]

[42] PV: *O cilindro né, pessoal?! Porque o cone se você desmontar ele, o "chapeuzinho", quando nós planificamos não forma um paralelogramo, ou seja, uma figura que*

tem quatro lados. O cilindro, se você desmontar vai... o rolinho de papel higiênico, vai... forma uma figura de quatro lados se você desmontar, então é o cilindro. Alguém aí acertou essa daí?
[Os estudantes não respondem.]
[43] PV: Essa foi um pouquinho mais difícil né? […]
(Sala de aula, professora Vera, 6 maio 2019)

Neste evento, vemos que a dimensão *transformação*, denotada pelos códigos escolha de representação e escolha de exemplos, conduziu a explicação da professora, de modo a fazer conexões para antecipar a complexidade que esta parte da tarefa requeria. Nos turnos [36], [39] e [41], ela instiga os estudantes a visualizarem que o octaedro não pode ser gerado por uma rotação, já que rotações geram corpos redondos, e o octaedro não está incluso nessa classe. Para finalizar o raciocínio, ela se utiliza de um exemplo prático, associando o formato do rolo de papel higiênico ao cilindro.

Na mesma aula da PV, no decorrer da correção da mesma tarefa, um questionamento do E1 gerou uma discussão interessante e que poderia ter sido mais explorada pela professora, como notado no recorte a seguir.

Evento Crítico 4: Definição de conceitos – "Todo quadrado é um retângulo?" – Tarefa 2 – Parte 1

[44] E1: Professora, o cubo é uma pirâmide?
[45] PV: Oi?
[46] E1: Eu não prestei atenção, desculpa, mas porque o cubo é uma pirâmide?
[47] PV: *Ele tem... ele tem laterais retangulares. O quadrado ele é um retângulo também.*
[48] E1: Professora, mas para mim o retângulo ele tem dois quadrados em um, tipo do lado.
[49] PV: *Não, o retângulo é uma figura plana, né, quatro lados e tem 4 ângulos de 90 graus, essa é a característica do retângulo.*
[50] E1: Mas, professora, o quadrado tem os 4 lados iguais.
[51] PV: *Sim, pode ter retângulo que tem os 4 lados iguais, que são os quadrados.*
[52] E2: O quê?
[53] PV: *Sim, oh! Por exemplo, tem os retângulos, né? (Escreve retângulo na lousa) então, tem vários tipos de retângulos, tem os que tem dois lados iguais, dois lados diferentes e tem os retângulos que têm os 4 lados iguais. Esses retângulos que têm os 4 lados iguais ou congruentes são os quadrados.*
[54] E1: Então todo quadrado é um retângulo?
[55] PV: *Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado.*
[56] E1: Oh, meu Deus! (Coloca a mão na cabeça e faz gesto de explosão).
(Sala de aula, professora Vera, 06 maio 2019)

Ao expor uma dúvida à classe, (turnos [44] e [46]), o estudante abriu uma oportunidade para que um conceito mais amplo pudesse ser explanado pela professora, como vemos no turno [54]. Nesse trecho, identificamos o código associado ao uso de oportunidades, da dimensão *contingência*. Entretanto, a professora poderia ter aproveitado esse *insight* do aluno de modo consistente, para elucidar o que afirma no turno [55]. Uma possibilidade seria demonstrar o que fora dito no turno [55] por meio da comparação entre as propriedades de cada figura geométrica. Por exemplo, considerando a seguinte afirmação: *"Todo quadrado é retângulo"*, notamos que, para uma figura ser retângulo, deve ser um paralelogramo e satisfazer as seguintes condições:

– Diagonais congruentes;
– Lados opostos congruentes;
– Todos os ângulos internos retos;

Como observamos na Figura 6, o quadrado cumpre todas as condições indicadas, caracterizando-se também como retângulo, satisfazendo a afirmação inicial.

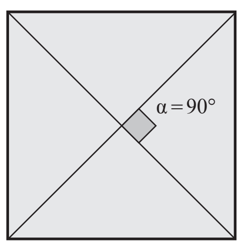


Figura 6. Ilustração de um quadrado

A afirmação recíproca poderia ser trabalhada de maneira análoga. Por exemplo, observamos que todo quadrado, além das características citadas anteriormente, deve cumprir os seguintes requisitos:

– Diagonais perpendiculares;
– Todos os lados congruentes.

Dessa forma, a professora poderia ter construído na lousa retângulos com medidas que não se enquadram nas propriedades apontadas; por exemplo, um retângulo com medidas 2 u.c e 3 u.c., o que facilitaria a visualização, pelo aluno, de que a recíproca não é verdadeira.

Além disso, outra possibilidade seria explorar a relação entre as categorias expostas no seguinte diagrama:

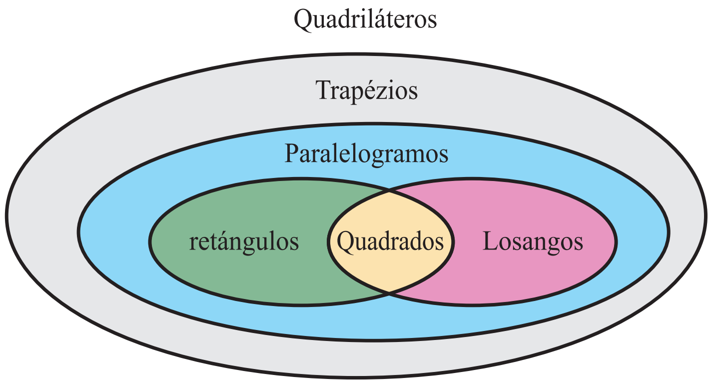


Figura 7. Relações de inclusão entre os conjuntos dos quadriláteros notáveis
Nota: Tomado de Nacarato et al., (2016)

Como podemos observar, além da inclusão da categoria dos quadrados na categoria dos retângulos, Vera poderia ter explorado que quadrados também podem ser classificados como uma subcategoria dos losangos. Esses subconjuntos estão contidos na categoria dos paralelogramos, que, por sua vez, estão contidos na categoria dos trapézios. E todos esses objetos geométricos são quadriláteros. Dessa forma, a categoria dos quadriláteros contém todas as outras categorias supracitadas. Nesse contexto, indicamos que a professora poderia ter feito uma conexão entre a tarefa de quadriláteros e essa, envolvendo a planificação de sólidos geométricos. A partir disso, discutiremos os resultados e as conclusões.

6. Discussão dos resultados

O objetivo do artigo foi *identificar e compreender os conhecimentos geométricos mobilizados por professoras de matemática, ao abordarem conceitos de geometria para estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental*. Como a estrutura do KQ ainda é pouco explorada por pesquisadores brasileiros, visamos com este trabalho contribuir para a divulgação e a difusão dessa ferramenta teórica na área da Educação Matemática e, a exemplo de Alves et al. (2018) o foco de análise são as ações desencadeadas por professores em formação continuada.

Com base no conteúdo exposto na seção anterior, na Tabela III, apresentamos a interligação entre os eventos críticos analisados, suas dimensões correspondentes e os códigos identificados para cada um.

TABELA III

Relação entre os eventos críticos e as dimensões / códigos do *KQ*

Dimensão	*Códigos*	*Evento Crítico 1*	*Evento Crítico 2*	*Evento Crítico 3*	*Evento Crítico 4*
Fundamento	Consciência de propósitos			x	x
	Uso de livros didáticos				
	Dependência de procedimentos	x			
	Identificação de erros			x	x
	Domínio do conteúdo			x	x
	Base teórica da pedagogia			x	
	Uso de terminologia matemática	x	x	x	x
Transformação	Escolha de exemplos		x	x	x
	Escolha de representações		x	x	
	Uso de materiais instrucionais				
	Uso de demonstrações para explicar procedimentos				
Conexão	Antecipação da complexidade			x	
	Decisões sobre sequenciamento		x	x	x
	Reconhecimento da adequação conceitual	x		x	
	Conexões entre procedimentos		x	x	
	Conexões entre conceitos	x		x	x

Contingência	Desvio de agenda	x			
	Respostas às ideias dos alunos	x	x		x
	Uso de oportunidades				x
	Insights do professor durante a aula	x			
	Reação à (in)disponibilidade de ferramentas e recursos				

Na interpretação de cada evento, as quatro dimensões do *KQ* foram evidenciadas no decorrer da atuação de cada professora em sala de aula, independentemente da situação em que se desencadearam ou com as quais foram confrontadas. A dimensão *fundamento*, que versa sobre o conhecimento construído ao longo da formação inicial ou continuada e sobre a maneira pelas quais as escolhas didáticas e pedagógicas são feitas, com base nas crenças e nas intenções interiorizadas do professor, nesta investigação, manifestou-se como uma lacuna no conhecimento matemático das professoras, segundo observado nos eventos 1 e 2. Ao trabalharem com uma tarefa envolvendo o conceito de polígono regular, as professoras denotam falhas de conhecimentos elementares para a explicação e a exemplificação do entendimento dessa noção pelos estudantes.

No evento 1 ficou explícita a necessidade de uma base teórica que permitisse a Beatriz lidar com a dúvida do estudante de maneira a findá-la. Como notado nos turnos [01], [03] e [05] desse evento, a *contingência* gerada pelo fator desencadeador – estudante (Rowland et al., 2015) – conduziu duas ações de Beatriz: (i) ignorar a fala do estudante e (ii) reconhecê-la e incorporá-la. Essa ocorrência sugere que, apesar de Beatriz possuir uma vasta experiência em sala de aula, principalmente na Educação Infantil, seu conhecimento sobre matemática não estava relacionado aos conceitos específicos abordados na aula. Isso pode ser devido ao fato de que, ao complementar sua graduação, ela não teve a oportunidade de estudar profundamente aspectos matemáticos, especialmente conceitos geométricos.

No entanto, mesmo não lembrando ou reconhecendo a definição do conceito geométrico discutido, ela busca meios para sanar a dúvida do estudante. Identificamos nessa ocorrência que Beatriz tem um *insight*, ao recorrer ao celular como ferramenta didática, além de desviar da agenda, já que essa ação não estava prevista. Assim, ainda que de forma provisória, consegue resolver a situação, já que os estudantes ainda permaneceram sem compreender o conceito.

No evento 2, Vera também se vê em uma condição que deixa transparecer um entendimento incorreto sobre o que é polígono regular. Contudo, ao contrário de Beatriz, rapidamente ela interage e responde ao estudante. Mesmo dispondo de uma vasta experiência no ensino da matemática, ela apresenta indícios de não possuir naquele momento a compreensão adequada para construir com os estudantes o significado correto desse conceito. Nesse caso, parece estar enraizada e, de fato, ela parece acreditar e considerar verdadeira a hipótese de que, se uma figura possuir todos os ângulos congruentes, então é um polígono regular. Essa crença e esse entendimento estão tão claros para ela que, na hora de exemplificar, ela se utiliza de um exemplo ligado à sua concepção de polígono regular, mesmo sendo essa equivocada.

No caso de Vera, essa lacuna pode ser considerada "instantânea", indicando que não houve uma preparação adequada para o que seria discutido em sala de aula. Isso pode ser atribuído tanto à forma como conceitos geométricos são abordados nos currículos e livros didáticos, quanto à maneira como esses conteúdos são trabalhados em aula. Muitas vezes, esses temas não recebem a devida atenção durante as aulas, seja por serem deixados ao critério do professor ou por serem tratados de forma superficial, conforme observado pelas professoras. Essa situação acaba relegando o conhecimento específico do conteúdo para um segundo plano. Diante desses dois acontecimentos, a presença da dimensão contingência é evidente, uma vez que ela se volta aos conhecimentos e às habilidades do professor para responder de maneira segura e condizente aos questionamentos dos estudantes em meio a eventualidades inesperadas, o código "responder às ideias dos estudantes" pode ajudar a identificar tais dificuldades e levar os professores a refletir sobre suas próprias lacunas, esperando-se que sejam percebidas e superadas.

Nesse viés, enaltecemos a importância de espaços de discussões que promovam o compartilhamento de experiências e anseios que permeiam a profissão docente em suas diferentes perspectivas. Os grupos colaborativos ou que apresentam características colaborativas (Fiorentini, 2012) são ambientes que têm esse propósito de aproximar, dialogar e incentivar a troca de ideias e conhecimentos entre os pares, contribuindo para o desenvolvimento profissional de cada um. Nas interações subsequentes, destacamos as interações das professoras. PB menciona: "*Estamos aprendendo muito.*" PV acrescenta: *"Nós também precisamos disso. O trabalho de professor é muito solitário...[...] Embora tenhamos nossa prática, raramente discutimos com outros porque ninguém além dos alunos assiste nossas aulas.*" Ela enfatiza: "*Mas é importante trazermos essa reflexão para melhorar... é interessante termos essa perspectiva, já que nossa prática é isolada; os alunos não podem nos avaliar, pois têm uma visão diferente da nossa, nossas funções são distintas*". Os momentos de formação visaram integrar aspectos teórico-metodológicos às práticas das professoras, apoiada no compartilhamento de conhecimentos, nas reflexões e no engajamento do grupo.

Neste estudo, não visamos imprimir um julgamento do conhecimento do professor, mas identificar e compreender as relações das professoras com a lacuna nos conteúdos geométricos, uma vez que eles podem apresentar-se de forma local – e tendem a isso. As situações apresentadas nos eventos 3 e 4 corroboram essa afirmativa. No evento 3, ao corrigir a tarefa sobre sólidos geométricos, Vera expressa deter o conhecimento matemático e didático capaz de identificar um erro de interpretação dos estudantes, quando se deparam com um conceito novo ou com o qual ainda não tinham intimidade – por exemplo, rotações de figuras planas.

Durante toda a correção a professora tentou instigar os estudantes a reconhecerem o equívoco, ao considerarem que o octaedro é uma figura gerada pela rotação de um paralelogramo. Assim, ao utilizar-se de exemplos e representações para desencadear a visualização do espaço tridimensional pelos estudantes, as dimensões *conexão e transformação* tiveram destaque nesse evento, evidenciando a capacidade da professora de observar a dificuldade dos estudantes e tomar iniciativas que contribuíssem para a solução correta da tarefa. Nessa oportunidade todos os códigos da dimensão *conexão* ficaram evidentes.

No evento 4, no decorrer da correção da tarefa sobre sólidos (*contingência*), por mais que a dimensão *conexão* fosse revelada através das conexões entre conceitos e procedimentos, a professora não utilizou a oportunidade do questionamento para ampliar, generalizar e contextualizar conceitos matemáticos que foram abordados ao longo da aplicação das tarefas. Esse momento poderia ser mais aproveitado na/para aprendizagem dos estudantes, pois estudos tem sinalizado às dificuldades dos estudantes na compreensão dos conceitos sobre quadriláteros. Em particular, para reconhecer um quadrado em outras posições; denominá-lo como losango (Inoue, 2004); e reconhecer as propriedades das figuras geométricas (Proença & Pirola, 2009).

Dessa forma, mesmo havendo o planejamento e a elaboração das tarefas em conjunto pelo grupo com características colaborativas, percebemos que no exercício docente é que os professores manifestam o modo como entendem a matemática e seguem suas crenças e decisões individualmente, advindas de uma série de fatores que os fazem desenvolver suas próprias estratégias de ensino. Assim, como pontuado por Ribeiro et al. (2009), entendemos que o conhecimento profissional deve ser considerado em suas múltiplas facetas, uma vez que o modo como o ensino é realizado está em acordo com as crenças do professor e seus objetivos, específicos a cada situação ou gerais. Além do que, os objetivos tendem a mudar ou a organizar-se à medida que a dinâmica de aula ocorre.

O conhecimento mobilizado no processo de ensino passa por conflitos nas escolhas do professor sobre *o que se quer ensinar*, *o que se sabe ensinar* e *o que é necessário ensinar*; e isso vai depender de como a formação, o conhecimento e a experiência da prática se comunicam. Oliveira e Ponte (1997) indicam que o conhecimento de professores e futuros professores sobre os conceitos matemáticos e também sobre a aprendizagem dessa disciplina, marcada por sérias incompreensões, apresenta-se, muitas vezes, limitado. Para esses autores, "parece haver lacunas no conhecimento de base dos assuntos que ensinam e no modo como eles podem ser aprendidos" (Oliveira & Ponte, 1997, p. 10).

No ensino de geometria, plana ou espacial, os professores denotam ter dificuldades ainda maiores e acabam por não explorar de forma ampla os conteúdos que a compõem. Pereira (2001) especifica razões para que isso ocorra: problemas na formação de professores, omissão de conteúdos geométricos nos livros didáticos e influência do Movimento da Matemática Moderna nos currículos nas décadas de 1960/1970. Em seu estudo sobre a geometria escolar, evidencia a necessidade de "[...] discussões de novas abordagens, redimensionadas em conceitos e atividades que significativamente impulsionem o processo de aquisição – ensino e aprendizagem da geometria, com novas leituras para novas propostas de ensino" (Pereira, 2001, p. 66).

Nessa perspectiva, a elaboração de tarefas de geometria, em especial, em contextos colaborativos pode ser uma oportunidade para pensar novas maneiras de trabalhar com esses conceitos e, sobretudo, promover a reflexão (Schön, 1992) coletiva e individual sobre a prática letiva, sobre o que se ensina e o porquê. As discussões provenientes desses compartilhamentos de ideias levam à produção de conhecimentos e revelam as dificuldades, as crenças e as aprendizagens sobre conceitos geométricos.

No processo de ensinar, o professor mobiliza saberes oriundos da formação inicial, porém sua constituição se faz, sobretudo, na reflexão sobre a prática, a partir da sala de aula, entendendo que os "saberes docentes são construídos e reconstruídos nas interações e relacionamentos do professor" (Manrique & André, 2006, p. 146). Desta forma, nas situações de ensino há oportunidades para a mobilização dos conhecimentos geométricos mobilizados pelos professores que ensinam matemática.

7. Conclusões

Com base nos conhecimentos mobilizados na prática das professoras e tomando os eventos críticos analisados, identificamos a presença das quatro dimensões do *KQ* nas ações das duas professoras analisadas. Como o foco de observação estava na dinâmica que ocorreu em sala, no momento do ensino, as dimensões *fundamento* e *contingência* tiveram destaque.

A sala de aula, por ser um espaço enérgico, dinâmico e heterogêneo, favorece acontecimentos inesperados, e o professor, mesmo tendo feito o planejamento da sua aula, acaba por se deparar com imprevistos, o que requer habilidades para encará-las. Nos eventos apresentados, notamos alguns desses imprevistos e a maneira como foram resolvidos. Nas análises, a primeira e a última dimensão do *KQ* ali se veiculam, uma vez que nos eventos 1 e 2 as professoras tiveram contratempos didáticos e conceituais para responderem às indagações oriundas dos estudantes. Esses obstáculos estão direta ou indiretamente ligados com o conhecimento de base desses professores, e a interpretação dos dados nos fez identificar *dificuldades do professor*.

Esse pode ser uma atribuição importante na ampliação dos códigos do *KQ* para constatar as lacunas no conhecimento matemático e pedagógico dos professores, a fim de que sejam discutidos, refletidos e sanados, na medida do possível; em particular, em ambientes colaborativos, em que há a troca de experiências, saberes e conhecimentos (Fiorentini, 2012; Saraiva & Ponte, 2003). Nas discussões do grupo, notamos que, nos momentos pós-aulas, destinados às reflexões sobre o que foi desenvolvido, por meio dos eventos destacados e pelos recortes apresentados em vídeos para o grupo analisar e discutir, as professoras sinalizaram que, como mencionado no texto anteriormente, não estavam acostumadas em desenvolver trabalho em grupos com os estudantes e não se sentiam preparadas para ensinar geometria, já que tinham afinidade com outros conteúdos e indicaram lacunas em seus cursos de formação inicial. Com isso, as professoras destacaram a importância de se "observarem" na prática, identificando o que funciona, o que pode ser melhorado e buscando alternativas que tornem suas aulas direcionadas às habilidades e às competências dos documentos curriculares e voltadas para a aprendizagem dos estudantes.

As dimensões *conexão* e *transformação* também foram vislumbradas pelas professoras, principalmente nos eventos 3 e 4, quando a professora Vera faz uso de exemplos e representações, assim como promove conexões entre conceitos e entre procedimentos. Além disso, no evento 3 todos os códigos da dimensão *conexão* foram identificados.

Em virtude da limitação de conteúdo deste artigo, centramo-nos em eventos que melhor descrevem e evidenciam as dimensões e códigos do *KQ* relacionados ao ensino de geometria. Assim como Alves et al. (2018), incentivamos que pesquisas futuras – em particular, pesquisas brasileiras sigam nessa linha de interesse, visto que estudos têm apontado lacunas no conhecimento geométrico do professor.

Nesse sentido, o *KQ* como ferramenta de análise pode ser um instrumento valioso para identificar e analisar lacunas existentes em processos de formação inicial ou continuada (Abdulhamid & Venkat, 2014; Gumiero & Pazuch, 2020) e fortalece o debate científico sobre o conhecimento profissional do professor que ensina matemática. Além de servir como um quadro teórico para o pesquisador, pode ser empregado pelo próprio professor que ensina matemática, de modo a promover a observação da sua própria prática; refletir sobre sua atuação e seus conhecimentos profissionais; e reinterpretá-los e/ou ressignificá-los, na medida em que reflete sobre *o que* e *como* ensina a matemática. Segundo Rowland (2013), para formadores de professores, o *KQ* é uma ferramenta para identificar oportunidades de desenvolvimento profissional docente por meio do aprimoramento do conhecimento do professor. Assim, por ser uma ferramenta teórica que emergiu da prática do professor, suas dimensões e seus códigos se revelam no ensino, no local habitual do professor: *a sala de aula*.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências Bibliográficas

Abdulhamid, L., & Venkat, H. (2014). Research-led development of primary school teachers' mathematical knowledge for teaching: a case study. *Education as Change*, *18*(1), 137-150. https://doi.org/10.1080/16823206.2013.877355

Almouloud, S. A., Manrique, A. L., Silva, M. J. F. D., & Campos, T. M. M. (2004). A Geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, 27, 94-108. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27502707

Alves, G. S., & Sampaio, F. F. (2010). O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, 5, 69-76. https://www.fsma.edu.br/si/edicao5/FSMA_SI_2010_1_Principal_2.pdf

Alves, K. A., Aguiar, M., & Ribeiro, A. J. (2018). As dimensões do conhecimento do professor que ensina matemática: o Knowledge Quartet como ferramenta de análise da prática docente. *Acta Scientiae*, *20(*2), 22-42. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss2id3736

Bairral, M. A. (2002). Natureza do conhecimento profissional do professor: contribuições teóricas para a pesquisa em educação matemática. *Boletim Gepem*, 41, 11-33. https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/434

Ball, D., Hill, H. H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 14-46. http://hdl.handle.net/2027.42/65072

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., & Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. D. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. Em B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2985-2994). https://hal.science/hal-02269013

Crescenti, E. P. (2008). A formação inicial do professor de matemática: aprendizagem da geometria e atuação docente. *Práxis Educativa*, *3*(1), 81-94. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.3i1081094

Cunha, D. S. I. (2009). *Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de Matemática* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. https://pemat.im.ufrj.br/index.php/pt/producao-cientifica/dissertacoes/2009/86-investigacoes-geometricas-desde-a-formacao-do-professor-ate-a-sala-de-aula-de-matematica

Curi, E. (2005). A formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas brasileiras. *Revista Iberoamericana de Educación*, 37(5), 1-10. https://doi.org/10.35362/rie3752687

Dolce, O., & Pompeo, J. N. (1997). *Fundamentos de matemática elementar, 9: Geometria Plana*. (vol. 9, pp. 1-449). Atual. https://www.doraci.com.br/downloads/matematica/fund-mat-elem_09.pdf

Fiorentini, D. (2012). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? Em M. C. Borba, & J. L. Araújo (Orgs.), *Pesquisa qualitativa em educação matemática,* (pp. 53-85). Autêntica.

Garnica, A. V. M. (2004). História oral e educação matemática. Em M. C. Borba, & J. L. Araújo (Orgs.), *Pesquisa qualitativa em educação matemática,* (pp. 77-97). Autêntica.

Gonseth, F. (1945). *La Géométrie et le problème de l'espace*. Griffon.

Gumiero, B. S., & Pazuch, V. (2020). Knowledge Quartet: dimensões, pesquisas e reflexões sobre o conhecimento profissional do professor que ensina matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*(66), 268-293. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a13

Gumiero, B. S., & Pazuch, V. (2021a). O planejamento de tarefas de Geometria e a mobilização do conhecimento profissional docente. *Ciência & Educação (Bauru)*, *27, 1-16*. https://doi.org/10.1590/1516-731320210025

Gumiero, B. S., & Pazuch, V. (2021b). Teachers knowledge mobilized in Geometry lessons and contingency situations. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16* (1), em 0620. https://doi.org/10.29333/iejme/9371

Inoue, R. K. M. (2004). *O processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6ª série do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação). Universidade do Vale do Itajaí. https://siaiap39.univali.br/repositorio/handle/repositorio/1680

Kazanowski, D. V. (2011). *Ensino de Geometria nas séries iniciais em Minas do Leão: algumas reflexões* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/29350

Lobo, J. D. S., & Bayer, A. (2004). O ensino de geometria no Ensino Fundamental. *Acta Scientiae*, *6* (1), 19-26. https://wwwp.fc.unesp.br/~hsilvestrini/O%20ensino%20de%20Geometria.pdf

Maia, C. M. F. (2014). *As isometrias na inovação curricular e a formação de professores de Matemática do Ensino Básico* (Tese de Doutorado). Universidade Portucalense. http://hdl.handle.net/11328/941

Manrique, A. L., & André, M. (2006). Relações com saberes na formação de professores. Em A. M. Nacarato., & M. A.V. Paiva (Orgs.), *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas* (pp. 133-147). Autêntica.

Manrique, A. L., & André, M. E. (2009). Concepções, sentimentos e emoções de professores participantes de um processo de formação continuada em geometria. *Educação Matemática Pesquisa*, *11*(1), 17-38. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2140/1662

Marquesin, D. F. B., & Nacarato, A. M. (2011). A prática do saber e o saber da prática em geometria: análise do movimento vivido por um grupo de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké*, *19*(1). https://doi.org/10.20396/zet.v19i35.8646647

Martins, P. B., & Curi, E. (2018). Grupos colaborativos: um olhar reflexivo para o desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Research, Society and Development*, *7*(1), 2, 1-9. https://doi.org/10.17648/rsd-v7i1.98

Ministério da Educação (2018) *Base Nacional Comum Curricular*. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Nacarato, A. M., Grando, R. C., & Costa, J. L. (2009). Um contexto de trabalho colaborativo possibilitando a emergência dos processos de argumentação e validação em geometria / A collaborative work context facilitating argumentation and validation processes in geometry. *Acta Scientiae*, *11*(2), 69-85. https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/3810/1/ARTIGO_ContextoTrabalhoColaborativo.pdf

Nacarato, A. M., Passos, C. L. B., Orfali, F., & Fontes, H. A. (2016). *Ensino fundamental, 6º ano: Matemática: caderno 3: manual do professor*. SOMOS Sistemas de Ensino.

Oliveira, H., & Ponte, J. P. D. (1997). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Em G. Ramalho, A. C. Silva y I. Oliveira (eds.), *Actas do VII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 3-23). Associação de Professores de Matemática. http://hdl.handle.net/10451/4386

Oliveira, L. M. C. P., & Cyrino, M. C. C. T. (2015). Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores matemática. Em S. H. A. A. Fernandes (org.), *Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)* (pp. 1-12). Sociedade Brasileira de Educação Matemática. http://www.sbemrevista.com.br/files/visipem/anais/story_html5.html

Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké, 4*(2), 65-74. https://doi.org/10.20396/zet.v4i6.8646739

Pavanello, R. M. (2004). Por que ensinar / aprender geometria? Em A. C. Brolezzi, A. J. Lopes, A. S. Monteiro, I. de F. Druck, M. C. Bonomi, M. O. de Moura, M. do C. S. Domite, N. J. Machado, O. J. Abdounur, S. A. Almouloud & V. de M. Santos (Orgs.), *VII Encontro Paulista de Educação Matemática*. http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/

Pazuch, V., & Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, *19*(1), 465-496. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i1p465-496

Pereira, M. R. D. O. (2001). *A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Pinto, N. B., Valente, W. R., & da Silva, M. C. L. (2014). Quando a Geometria tornou-se moderna: tempos do MMM. Em M. C. L. da Silva & Valente, W. R. (Orgs.), *A geometria nos primeiros anos escolares: história e perspectivas atuais* (pp. 65-82). Papirus

Pires, M. V. (2006). A construção do conhecimento profissional: Um estudo com três professores. Em () *Atas do XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. https://core.ac.uk/download/pdf/153416709.pdf

Ponte, J. P. D. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. Em J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro & H. A. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 59-72). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/2984

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2016). Investigações geométricas. Em J. P. da Ponte, J. Brocardo & H. Oliveira (Eds.), *Investigações matemáticas na sala de aula* (3a ed., pp. 71-89). Autêntica.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, *17*(21), 81-140. https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10538

Prado, M. E. B. B., & Lobo da Costa, N. M. (2012). Grupo de estudos e o professor de Matemática: revendo a prática no contexto escolar. Em F. Bellemain, V. Gitirana & P. B. Bellemain (eds.) *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-17). http://www.sbemrevista.com.br/files/v_sipem/PDFs/GT07/CC60631082891_A.pdf

Proença, M. C., & Pirola, N. A. (2009). Relações de inclusão entre quadriláteros: conhecimento e desempenho de alunos do Ensino Médio. Em (Eds.), *IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2009, setembro). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis e influencia en la práctica de una maestra. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.415-424). SEIEM; Universidade de Cantabria.

Rowland, T. (2013). The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *Sisyphus: Journal of Education*, 1(3), 15-43. https://doi.org/10.25749/sis.3705

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8* (3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Rowland, T., Thwaites, A., & Jared, L. (2015). Triggers of contingency in mathematics teaching. *Research in Mathematics Education*, *17*(2), 74-91. https://doi.org/10.1080/14794802.2015.1018931

Rowland, T., & Turner, F. (2017). Who owns a theory? The democratic evolution of the Knowledge Quartet. Em B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. *4*, pp. 105-112). PME

Saraiva, M. J., & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante,* 12 (2), 25-52. https://doi.org/10.48489/quadrante.22767

Schön, D. A. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. Em A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 79 – 92). Dom Quixote.

Schön, D. A. (2000). *Educando o profissional reflexivo:* um novo design para o ensino e a aprendizagem. Artmed.

Secretaria de Educação Fundamental (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática*. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in the teaching. *Educational Researcher*, *15(*2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Educação e Matemática*, *105*(5), 22-28. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1809/1850

Thwaites, A., Jared, L., & Rowland, T. (2011). Analysing secondary mathematics teaching with the Knowledge Quartet. *Research in Mathematics Education*, 13(2), 227-228. https://doi.org/10.1080/14794802.2011.585834

Turner, F., & Rowland, T. (2008). The knowledge quartet: a means of developing and deepening mathematical knowledge in teaching. Em *Mathematical knowledge in Teaching Seminar Series: developing and deepening mathematical knowledge in teaching* (Vol. 5, pp. 1-13). Loughborough University. http://www.mkit.maths-ed.org.uk/MKiT5_Turner&Rowland.pdf

Turner, F., & Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. Em T. Rowland & K. Ruthven (Eds.) *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_12

Autores

Franciele da Silva. Universidade Federal do ABC, Brasil. franciele.s@ufabc.edu.br

https://orcid.org/0000-0002-3810-4169

Vinícius Pazuch. Universidade Federal do ABC, Brasil. vinicius.pazuch@ufabc.edu.br

https://orcid.org/0000-0001-6997-1110

Camilo López, Pedro Gómez

REVISIÓN CURRICULAR DE LOS TEMAS DE ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Curricular review of statistical topics in primary education

RESUMEN

En este artículo realizamos una revisión curricular de los temas que se incluyen en estadística en primaria en Colombia y en los 56 países que participaron en TIMSS 2015. Organizamos los temas con base en los conceptos y procedimientos, las representaciones y la fenomenología relacionados con la estadística en educación primaria. Identificamos diferencias y similitudes entre los temas considerados en Colombia y los temas que se abordan en los países participantes en TIMSS 2015. Encontramos que la estadística se incluye en los currículos de la mayoría de estos países. Principalmente, los temas se centran en las representaciones gráfica y tabular, en el concepto de media y en la fenomenología se hace referencia a la estadística para organizar la información. Estos resultados pueden generar discusiones de carácter curricular y motivar a realizar estudios similares en otros países.

PALABRAS CLAVE:
- *Currículo*
- *Estadística*
- *Educación primaria*
- *Enseñanza de la Estadística*

ABSTRACT

In this article, we make a curricular review on topics included in statistics in primary school in Colombia and in the 56 countries that participated in TIMSS 2015. We describe the topics based on the concepts and procedures, representations and phenomenology related to statistics in primary education. We identify differences and similarities between the topics considered in Colombia and the topics from the countries participating in TIMSS 2015. We found that statistics is included in the curricula of most countries and in Colombia. The topics focus on graphical and tabular representations, on the concept of mean, and reference is made in phenomenology to statistics to organize information. These results may generate curricular discussions and motivate similar studies in other countries.

KEY WORDS:
- *Curriculum*
- *Statistics*
- *Primary Education*
- *Teaching of Statistics*

López, C. y Gómez, P. (2023). Revisión curricular de los temas de estadística en educación primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(1), 81-100. https://doi.org/10.12802/relime.23.2613. Recepción: Septiembre 28, 2020 / Aceptación: Junio 9, 2023

RESUMO

Neste artigo, realizamos uma revisão curricular dos tópicos incluídos na estatística na escola primária na Colômbia e nos 56 países que participaram do TIMSS 2015. Descrevemos os tópicos com base nos conceitos e procedimentos, representações e fenomenologia relacionados à estatística na educação primária. Identificamos diferenças e semelhanças entre os tópicos considerados na Colômbia e os tópicos abordados nos países participantes do TIMSS 2015. Constatamos que a estatística está incluída nos currículos da maioria dos países e na Colômbia. Os tópicos centram-se nas representações gráficas e tabulares, no conceito de média, e na fenomenologia faz-se referência à estatística para organizar a informação. Estes resultados podem gerar discussões curriculares e motivar estudos semelhantes noutros países.

PALAVRAS CHAVE:

- *Currículo*
- *Estatística*
- *Educação primária*
- *Ensino de Estatística*

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous procédons à un examen du programme d'études des sujets inclus dans les statistiques à l'école primaire en Colombie et dans les 56 pays qui ont participé à l'enquête TIMSS 2015. Nous décrivons les sujets sur la base des concepts et des procédures, des représentations et de la phénoménologie liés aux statistiques dans l'enseignement primaire. Nous identifions les différences et les similitudes entre les sujets considérés en Colombie et les sujets abordés dans les pays participant à TIMSS 2015. Nous avons constaté que les statistiques sont incluses dans les programmes scolaires de la plupart des pays et de la Colombie. Les sujets se concentrent sur les représentations graphiques et tabulaires, sur le concept de moyenne, et la phénoménologie fait référence aux statistiques pour organiser l'information. Ces résultats peuvent susciter des discussions sur les programmes scolaires et motiver des études similaires dans d'autres pays.

MOTS CLÉS:

- *Statistique*
- *École primaire*
- *Enseignement de la Statistique*
- *Programme d'études*

1. Presentación

Los conocimientos estadísticos son útiles en la vida diaria y en el campo laboral para tomar decisiones relacionadas con ámbitos económicos, sociales y políticos (Frischemeier, 2018). La estadística se relaciona con otras áreas de estudio (por ejemplo, economía, medicina y educación) y permite comprender una variedad de situaciones en estos ámbitos: desde contextos en las que usamos una media aritmética para describir un conjunto de datos, hasta escenarios en los que se requiere hacer predicciones sobre el precio de un producto o sobre el pronóstico de una enfermedad. En este sentido, las personas deberían formarse en estadística con el propósito de tener éxito en su trabajo, mantenerse informados en forma crítica, y desarrollar una vida sana y productiva (Bargagliotti et al., 2020).

Desde finales del siglo pasado, profesores e investigadores se han interesado por analizar y valorar el panorama en sus sistemas educativos sobre la enseñanza de la estadística en los diferentes niveles escolares (Batanero, 2002). Algunos educadores estadísticos sugieren iniciar la enseñanza de la estadística desde los primeros niveles de educación para desarrollar habilidades desde edades tempranas y fortalecerlos en niveles posteriores y en sus aplicaciones en otras áreas de estudio (Batanero, Burrill, et al., 2011; Estrella, 2018; Frischemeier, 2018). Recientemente, se ha identificado un alto interés por indagar sobre la enseñanza de la estadística en el nivel de primaria, dado que ha sido poco abordada en el currículo en este nivel educativo y se ha prestado poca atención a la alfabetización estadística de los alumnos (López et al., 2015). Además, los conocimientos y temas en estadística en primaria se tratan de manera general y sin propósitos claros (Alsina, 2016). Por lo tanto, se considera importante realizar estudios para analizar el estado actual de la enseñanza de la estadística en primaria en diferentes regiones (Alsina y Vásquez, 2016; Batanero, Díaz, et al., 2011; Cuevas y Ibañéz, 2008; Franklin et al., 2007).

Dado lo anterior, nos propusimos los siguientes objetivos: primero, establecer los temas de estadística en el nivel primaria que se abordan en Colombia y en los países participantes en el estudio internacional *Trends in International Mathematics and Science Study 2015* (TIMSS, 2015); segundo, establecer similitudes y diferencias entre los temas que se incluyen en estos países.

2. Elementos teóricos y metodológicos

En este apartado, presentamos los elementos teóricos y metodológicos que orientan la revisión curricular de los temas de estadística en primaria. Este es un estudio de tipo cualitativo que se basa en el análisis de contenido documental de la información curricular de los países (Kuckartz, 2019).

Primero, presentamos los fines de la educación estadística y describimos algunos estudios relacionados con revisiones curriculares y antecedentes en torno a la estadística en primaria. Seguido, describimos los temas que podrían ser tratados en primaria en estadística basándonos en la literatura. Con base en esta información, organizamos nuestras unidades de análisis en un sistema de categorías orientada por la propuesta de Cañadas et al. (2018), a saber: los conceptos pedagógicos de *conceptos y procedimientos (o estructura conceptual)*, *representaciones* y *fenomenología*. Por último, utilizamos este sistema de categorías como marco para el proceso de codificación de la información y la presentación de los resultados.

2.1. *Fines de la educación estadística*

Requerimos del desarrollo de conocimientos estadísticos para comprender la información que se genera en el mundo. Los fines de la enseñanza de la estadística se relacionan con la noción de alfabetización estadística, que promueve el desarrollo de habilidades en los estudiantes enfocadas a la organización, interpretación y análisis de datos en diversas situaciones (Bilgin et al., 2017). Adicionalmente, un fin importante de la educación estadística es formar individuos con conocimientos estadísticos claros para responder preguntas que involucran datos (Ben-Zvi y Garfield, 2004).

En esa misma línea, la enseñanza de la estadística contribuye a los fines culturales, formativos, políticos y sociales de la educación matemática. Aprender estadística ayuda a que los ciudadanos comprendan y reconozcan su papel en la sociedad, y que entiendan cómo ha contribuido al desarrollo de nuestra cultura (fines culturales); comprendan los fenómenos que involucran datos y análisis de información (fines formativos); comprendan los fenómenos sociales que los afectan como miembros de una sociedad (fines políticos); y puedan desarrollarse profesionalmente, vivan en sociedad, actúen en ella y tomen decisiones personales (fines sociales) (Rico et al., 1997).

2.2. *Estadística en educación primaria: revisiones curriculares*

Los temas en estadística en los currículos de primaria pueden variar según el país, algunos tienen como referencia documentos curriculares obligatorios a nivel nacional, otros tienen libertad para usar los documentos disponibles en el país, el resto no poseen un plan de estudios nacional (Zieffler et al., 2018). En lo que sigue, presentamos algunos estudios en los que se han realizado revisiones curriculares sobre los temas tratados en la enseñanza de la estadística en educación primaria en diferentes regiones del mundo.

En una revisión de los currículos de Brasil e Inglaterra, Ainley y Monteiro (2008) encontraron que, en ambos casos la enseñanza de la estadística se enfoca en la resolución de problemas y en el estudio de variables cercanas a los estudiantes. Por otro lado, constataron que los temas relacionados con la tecnología o con las representaciones gráficas no se incluyen o no tienen propósitos claros y específicos para su enseñanza.

En un estudio comparativo de los currículos de Chile y España, Merino y Reyes (2013) identificaron que en ambos países, la enseñanza de la estadística en educación primaria se enfoca en el desarrollo de contenidos y competencias para que los estudiantes aprendan a clasificar, organizar, analizar e interpretar datos que provengan de diferentes situaciones de su vida cotidiana. Particularmente, en el currículo español, identificaron que se consideran temas como: variables cualitativas, tablas de doble entrada, gráficas de barras, pictogramas, sectores, media aritmética, moda y rango. Mientras que, en el currículo chileno, se encontró información relacionada con la enseñanza de tablas de frecuencias, pictogramas, uso de objetos físicos o manipulables para realizar conteos de datos, gráficos de barras, líneas, y tallos y hojas, y media aritmética. Los autores resaltan la importancia que ha tenido la inclusión de la estadística durante los últimos años e incentivan a indagar sobre la enseñanza de la estadística en diferentes países, los cambios curriculares y la comparación entre currículos de diferentes regiones.

En otro estudio, Ruiz (2015) revisó la información del estudio SERCE de la UNESCO (Murillo Torrecilla y Román Carrasco, 2009) para indagar sobre la enseñanza de la estadística en la educación primaria en América Latina. En primer lugar, identificó que a la estadística se le dedica el menor porcentaje de tiempo de enseñanza en comparación con las cuatro áreas del conocimiento matemático: estadística (16%), geometría (18%), medida (19%) y números (50%). En cuanto a los temas que se enseñan, identificó que, para el grado tercero, la enseñanza está enfocada a la organización e interpretación de información por medio de tablas de doble entrada y gráficas de barras. Respecto al grado sexto, la enseñanza se centra en la organización e interpretación de datos por medio de tablas y gráficas, y la enseñanza de la media aritmética. Por último, resalta que en los países analizados no se encontró evidencia de la enseñanza de nociones relacionadas con variabilidad y se podría pensar que no se esperaría que estos temas se incluyeran en el currículo de matemáticas en estos grados. Sin embargo, otros autores argumentan que no tendría sentido abordar la resolución de problemas en estadística sin considerar la variabilidad (Cobb y Moore, 1997; NCTM, 2000).

Un caso de particular interés en términos de su currículo y de las revisiones curriculares en estadística en los diferentes niveles escolares es Nueva Zelanda, dado que la estadística ha sido considerada en el currículo desde hace más de 50 años (incluidos algunos grados de primaria) y, a finales del siglo pasado, se consideró en todos los niveles escolares (Watson, 2013). A principios de este siglo, el Ministerio de Educación de ese país generó una nueva asignación curricular dando visibilidad a la estadística como dominio relevante a nivel de las matemáticas. Como resultado, actualmente, en el currículo se hace referencia a matemáticas y estadística, mientras que, en el pasado se hablaba nada más de matemáticas. En los programas de los primeros niveles escolares relativos a estadística, se encuentra información relacionada con recoger, clasificar, visualizar y comparar datos de diferentes variables estadísticas. En primaria, se resalta la importancia de determinar las variables y los procedimientos adecuados para la recogida de datos, así como su correspondiente y adecuada representación. En el análisis de datos, se hace referencia a identificar patrones, relaciones, tendencias y variaciones sobre los datos. Finalmente, se resalta el hecho de elaborar conclusiones a partir de los datos analizados como un aspecto importante en la educación estadística en primaria (New Zealand Ministry of Education, 2007).

En un trabajo posterior, realizado por Groth (2018), se revisaron los documentos curriculares de Australia, Estados Unidos, Inglaterra y Nueva Zelanda para observar el tratamiento de la estadística en los primeros grados escolares. En todos ellos se incluye la estadística en educación primaria y se recomienda abordar el estudio de planeamiento de preguntas estadísticas. No obstante, los documentos difieren en cuanto a los tipos de preguntas y su finalidad. Por ejemplo, en algunos documentos se hace referencia a abordar preguntas específicas con datos categóricos y otros documentos hacen referencia a preguntas abiertas sin especificar el tipo de datos.

En Opolot-Okurut y Eluk (2011), se describe el panorama de la enseñanza de la estadística en educación primaria y secundaria para las escuelas en Uganda. Los temas de estadística para primaria se relacionan con interpretar información y con el uso de gráficos. En los primeros grados de primaria, se hace referencia a la representación de datos en gráficas de barras y tablas de datos sencillos; mientras que, en los últimos grados, se alude a información sobre los promedios estadísticos. En un estudio similar sobre el currículo de Sudáfrica, se señala la importancia de organizar, representar, analizar e interpretar datos en la enseñanza de la estadística en primaria (Wessels, 2011).

Del mismo modo, Frischemeier (2018) señala que en Alemania, la enseñanza de la estadística en educación primaria incluye los temas como plantear preguntas, recopilar y aprender a representar datos; a su vez, se considera importante desarrollar el análisis de los datos y se hace alusión al uso de las herramientas tecnológicas para explorar conjuntos grandes de datos en contextos reales.

En lo que sigue, describimos una propuesta de temas que podrían contemplarse en los currículos de estadística en educación primaria.

2.3. *Temas considerados en la enseñanza de la estadística en educación primaria*

En esta sección, con base en las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística describimos los temas que se recomienda incluirse en educación primaria. En ese sentido, autoras como Batanero (2000) afirman que la enseñanza de la estadística en este nivel educativo debe estar enfocada hacia la organización y representación de diferentes tipos de datos mediante dibujos, tablas y gráficas; el análisis y la interpretación de información en relación con el contexto. Asimismo, López (2015) argumenta que la enseñanza de la estadística en primaria no debe basarse en conceptos, procedimientos y/o técnicas descontextualizadas, sino que se deben desarrollar los procesos de organización, representación, análisis e interpretación de datos en diferentes contextos y situaciones cercanas a los estudiantes.

De esta manera, los estudiantes en primaria pueden aprender a tomar decisiones y evaluar afirmaciones en diferentes contextos (English y Watson, 2018). En estas primeras etapas de la educación, es importante que los estudiantes reconozcan fenómenos naturales y sociales, y que la estadística sea una herramienta con la que se pueden estudiar esos fenómenos (López et al., 2015). Un ejemplo de estas posturas es el trabajo de Chick y Pierce (2008), en el que se muestra cómo estudiantes de primaria utilizan gráficos de líneas y tablas de frecuencia para discutir sobre el almacenamiento de agua en la ciudad de Melbourne.

Por otro lado, las nociones como población, muestra y variables estadísticas también se consideran importantes para la enseñanza de la estadística en primaria. Asimismo, las nociones intuitivas de centro y variabilidad son importantes para realizar análisis estadísticos que permitan el desarrollo de habilidades estadísticas para la comprensión y análisis de la información (Ruiz, 2015). En este sentido, se deben enseñar contenidos estadísticos como frecuencia, media aritmética, rango y gráfico de barras para comprender su importancia en el análisis de información en situaciones de la vida real.

Para la comprensión de los conceptos y procedimientos estadísticos en la enseñanza en primaria, es importante promover el uso de representaciones gráficas para organizar y visualizar los datos; el empleo de materiales manipulativos para recoger datos de la vida real; y la inclusión de nuevas tecnologías para el análisis de conjuntos de grandes datos con cálculos estadísticos (Serrano, 2011; Zieffler et al., 2018). Así, la representación y análisis de datos es un eje central en la enseñanza de la estadística; por ejemplo, para organizar datos se usan tablas de frecuencias y, para representarlos, se usan diferentes tipos de gráficos como el de barras, los histogramas, los pictogramas, de sectores, de líneas, y de tallos y hojas. A su vez, para describir y analizar conjuntos de datos son necesarias las medidas de tendencia central o algunas medidas de dispersión (Alsina, 2016).

2.4. *Definición de unidades de análisis*

Para analizar las propuestas curriculares llevamos a cabo un análisis de contenido. Primeramente, constituimos las categorías en función de los fundamentos teóricos expuestos en las dos secciones anteriores (2.2 y 2.3). Luego, organizamos la información con base en estas tres categorías: conceptos y procedimientos, representaciones y fenomenología (como se muestra en la figura 1) (Cañadas et al., 2018).

Respecto a los *conceptos y procedimientos,* estos se usan para describir y analizar características sobre una población de interés. En algunas ocasiones, no contamos con la información completa de la población y recurrimos a conformar muestras que permitan estudiar diferentes variables cualitativas (nominales u ordinales) o cuantitativas (discretas o continuas) y con ello postular algunas conclusiones acerca de la población. Además de estos elementos, consideramos las medidas de centralización (media, mediana y moda), posición (cuantiles), y medidas de variación o dispersión (rango y varianza) que permiten describir conjuntos de datos y sus distribuciones.

En cuanto a los tipos de *representación*, estos dependen de los aspectos que se busquen destacar, mostrar o sintetizar del conjunto de datos y de las relaciones entre ellos. Por ejemplo, el propósito de usar un histograma es destacar o mostrar cómo varía la frecuencia con la que se distribuyen los datos al agruparlos en ciertos intervalos preestablecidos. Usamos un gráfico de caja o bigotes para extraer ideas sobre la forma en que están distribuidos los datos e identificar extremos de los intervalos al agruparlos en cuartiles. Por su parte, el usar un gráfico de barras permite la comparación de frecuencias entre categorías, mientras que un gráfico circular nos permite observar la relación de cada categoría respecto al total, en el caso de una distribución de un conjunto de datos cualitativos.

Finalmente, la *fenomenología* refiere a la organización, análisis e interpretación de información, y el uso de la estadística para la resolución de problemas. Por ejemplo, utilizamos la estadística para (a) organizar, representar y resumir información de conjuntos de datos que tenemos interés en estudiar, (b) describir y analizar información de conjuntos de datos para determinar relaciones o características entre los datos y (c) interpretar los resultados obtenidos con base en un análisis de datos para establecer relaciones con el contexto de la situación. Dentro de la fenomenología consideramos también contextos matemáticos y no matemáticos.

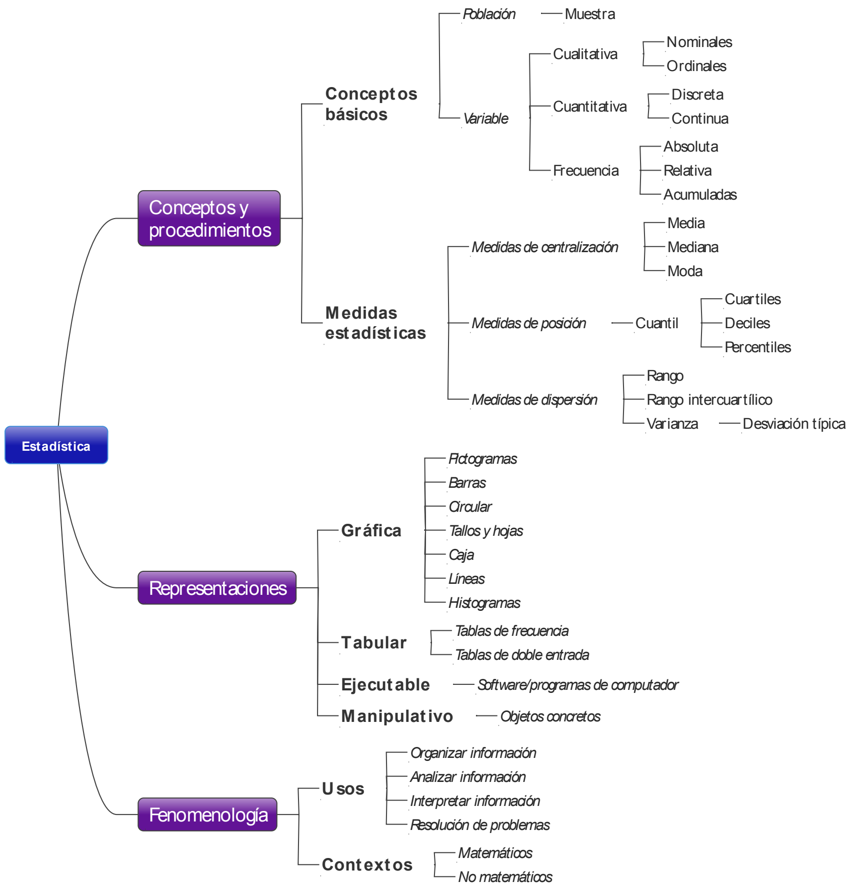


Figura 1. Sistema de categorías sobre la enseñanza de la estadística en educación primaria

Una vez descritas las categorías para analizar las propuestas curriculares, damos paso a describir el proceso de codificación de los temas de estadística en primaria.

3. Análisis

En este apartado, presentamos los procedimientos llevados a cabo para analizar los temas que se consideran en las propuestas curriculares sobre la enseñanza de la estadística en educación primaria en los países considerados. Cabe reafirmar que las categorías de análisis se propusieron desde la perspectiva del análisis curricular y del análisis de contenido en términos de Cañadas et al. (2018). A continuación, describimos las fuentes de información, los procedimientos de codificación realizados y los análisis llevados a cabo.

3.1. *Fuentes de información del estudio*

Como fuentes de información para la codificación y revisión de los temas que se contemplan en la enseñanza de la estadística en educación primaria, tanto en Colombia como en los demás países, se consideraron los programas curriculares oficiales.

En el caso de Colombia, se cuenta con dos documentos curriculares: *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006), y *Derechos básicos de aprendizaje (DBA)* (MEN, 2016). De estos documentos, revisamos las secciones relacionadas con el pensamiento aleatorio en educación primaria.

Para el caso de los demás países, revisamos los lineamientos nacionales de los 56 países[1] que participaron en TIMSS 2015 (Mullis et al., 2016) (un estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias para medir el rendimiento de los estudiantes de grados cuarto y octavo en estas áreas) a partir de la información curricular del área de matemáticas disponible en TIMMS Enciclopedia. Es por esta razón que elegimos estos países, pues se tiene información curricular de matemáticas disponible hasta grado 4 y grado 8. Para este trabajo, nos enfocamos y revisamos la información curricular ofrecida hasta el grado 4. En la siguiente sección, describimos los procedimientos para la codificación de la información y ejemplos de análisis.

3.2. *Codificación y análisis de los temas: Colombia*

La codificación se llevó a cabo teniendo en cuenta el sistema de categorías en donde los conceptos corresponden a aquellas afirmaciones o segmentos de texto que los incluyen junto con verbos como "comprender", "describir" o "analizar"; por ejemplo, segmentos de texto como "comprender las medidas de tendencia central",

[1] Los países analizados fueron Alemania, Arabia Saudita, Armenia, Australia, Bahrein, Bélgica (flamenco), Botsuana, Bulgaria, Canadá, Chile, Chipre, Croacia, Dinamarca, Emiratos Árabes Unidos, Eslovaquia, Eslovenia, Estados Unidos, España, Inglaterra, Finlandia, Francia, Georgia, Holanda, Hon Kong, Hungría, Indonesia, Irán, Irlanda, Irlanda del norte, Israel, Italia, Japón, Jordania, Kazajistán, Kuwait, Líbano, Lituania, Malasia, Malta, Marruecos, Nueva Zelanda, Noruega, Omán, Polonia, Portugal, Qatar, República Checa, República de Corea, Rusia, Serbia, Singapur, Sudáfrica, Suecia, Tailandia, Taiwán y Turquía.

"describir un conjunto de datos a partir de la moda" o "analizar distintos gráficos de una variable cuantitativa". Estos segmentos de texto se codificaron con los códigos "Medidas de tendencia central", "Moda", "Gráficas" y "Variable cuantitativa".

Por otro lado, codificamos los procedimientos a partir de afirmaciones o segmentos de texto que los incluyen junto con verbos como "calcular", "hallar" o "representar"; por ejemplo, códigos como "Media" y "Pictograma" para aquellos segmentos de texto que incluían frases como "calcular la media" y "representar con un pictograma", respectivamente. En algunos casos, un código puede representar un conocimiento conceptual (propiedades de la media) o procedimental (cálculo de la media).

El documento de los Estándares tiene dos partes: un marco conceptual y un apartado de estándares para matemáticas que permite identificar lo que se espera que aprendan los estudiantes colombianos en los diferentes grados escolares (1-3, 4-5, 7-9, 10-11). Nos centramos en revisar la información del pensamiento aleatorio para los grados de primero a quinto (1-3 y 4-5). Los temas identificados se basan en la asignación de un código con base en la figura 1, a al menos un segmento de texto en cada uno de los documentos. Por ejemplo, para el segmento de texto en los grados 1-3: "Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno" (MEN, 2006, p. 81) asignamos los códigos "Variables cualitativas" en conceptos y procedimientos, y "Contextos no matemáticos" e "Interpretar" en fenomenología. Para el segmento de texto en los grados 4-5: "Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de línea, diagramas circulares)" (p. 83), asignamos los códigos "Tablas", "Gráficas", "Pictogramas", "Gráficas de Barras", "Gráficas de Líneas" y "Gráficas circulares".

En el documento de los Derechos básicos de aprendizaje encontramos información relacionada con estadística para cada uno de los grados de primaria y no por ciclos como en los estándares. Por ejemplo, para el segmento de texto del grado 3: "Lee e interpreta información contenida en tablas de frecuencia, gráficos de barras y/o pictogramas con escala, para formular y resolver preguntas de situaciones de su entorno" (MEN, 2006, p. 81) asignamos los códigos "Contextos no matemáticos" e "Interpretar" en fenomenología, los códigos "Gráficos de barras", "Pictogramas" y "Tablas" en representaciones y "Frecuencia" en conceptos y procedimientos. Adicionalmente, para el texto del grado 3: "Identifica la moda a partir de datos que se presentan en gráficos y tablas" (p.18), codificamos "Moda" como conceptos y procedimientos y "Gráficos" y "Tablas" como representaciones.

Con base en la codificación de ambos documentos, concretamos los temas que se consideran en este país para estadística en primaria. En la siguiente sección, presentamos el proceso de codificación para la información curricular de los otros países.

3.3. *Codificación y análisis de los temas: países participantes en TIMSS 2015*

Revisamos la información curricular de cada uno de los países participantes en el estudio TIMSS 2015 y codificamos los segmentos de texto en términos de las categorías. El procedimiento fue similar a la codificación para el caso de Colombia. Asignamos el número uno cuando encontramos información que hacía referencia a cada código del sistema de categorías de la figura 1.

Por ejemplo, el segmento de texto[2] "Recoger datos e informaciones, elaborar formas para organizarlos y expresarlos, interpretar datos presentados bajo forma de tablas y gráficos" fue codificado con los códigos "Organizar" e "Interpretar" en fenomenología y los códigos "Tablas" y "Gráficas" en representaciones. El segmento de texto "Calcular la media, mediana y moda en un conjunto de datos estadísticos" fue codificado con los códigos "Media", "Mediana" y "Moda" en conceptos y procedimientos. En la tabla I, presentamos un ejemplo de síntesis de la codificación realizada para cinco países de la muestra seleccionada con algunos códigos.

TABLA I
Ejemplos de la codificación en cinco países

Países	*Conceptos básicos*			*Representaciones*				*Medidas estadísticas*			
	Muestra	Cualitativas	Cuantitativas	Barras	Pictogramas	Sectores	Líneas	Moda	Media	Rango	Cuantiles
País 1	1	1		1	1	1					
País 2		1	1	1		1	1	1	1		
País 3		1			1	1		1			
País 4											
País 5		1	1	1			1		1	1	

Fuente: elaboración propia

Luego de codificar la información, procedimos a calcular las frecuencias absolutas y porcentuales que nos permitieron identificar los códigos más y menos frecuentes. Con base en estas frecuencias, identificamos los temas que se consideran en la enseñanza de la estadística en educación primaria. En los resultados, detallamos dichos temas y describimos las diferencias y similitudes entre los países.

[2] Los segmentos de texto fueron traducidos y se encuentran disponibles para cada uno de los países en https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/introduction/

4. Resultados

A continuación, presentamos los temas que se consideran para la enseñanza de la estadística en educación primaria, tanto en los documentos curriculares de Colombia como en los de los países que participaron en TIMSS 2015.

4.1. *El caso de Colombia*

En esta sección, describimos los resultados que obtuvimos al revisar los documentos curriculares para el caso de Colombia: Estándares y los DBA. En la tabla II, presentamos los temas propuestos en la enseñanza de la estadística en educación primaria obtenidos a partir del proceso de codificación. Una estrella en las columnas Estándares o DBA significa que existe al menos un segmento de texto con el tema en el documento correspondiente, es decir, el tema aparece en los documentos curriculares. En la columna del documento de los estándares, se muestran los resultados hasta grado quinto de primaria, ya que los temas vienen por ciclos de grados en este documento (1-3 y 4-5). Para el documento de los DBA, se muestran los temas que se consideran hasta grado cuarto.

TABLA II
Temas en los documentos curriculares de Colombia

Temas	*Estándares (2006, 1-5)*	*DBA (2016,1-4)*
Conceptos y procedimientos		
Población		✪
Muestra		✪
Variables cuantitativas		✪
Variables cualitativas	✪	✪
Media	✪	
Mediana	✪	
Moda		✪
Rango		✪
Representaciones		
Tablas	✪	✪
Barras	✪	✪
Pictogramas	✪	✪
Circular	✪	
Líneas	✪	✪
Manipulativo	✪	✪
Fenomenología		
Organizar	✪	✪
Analizar	✪	✪
Interpretar	✪	✪
Resolución de problemas	✪	✪
C no matemáticos	✪	✪

Fuente: elaboración propia

De manera general, en Colombia, se consideran los conceptos básicos de población, muestra y variables estadísticas; como medidas de tendencia central se incluye la media, la moda y la mediana y como medida de dispersión, el rango. Respecto a las representaciones se consideran las tablas, objetos concretos (manipulativos) para los conteos, los pictogramas, las gráficas de barras, circulares y de línea. En cuanto a los contextos, encontramos la organización, interpretación y análisis de información en contextos no matemáticos, así como la resolución de problemas.

Con base en la información de la tabla II, identificamos algunas diferencias respecto a los temas que se proponen en los dos documentos curriculares. Los conceptos de población, muestra, variables estadísticas (cuantitativas), la moda y el rango se incluyen en los DBA, pero no en los estándares. En la tabla II se observa que los temas de media, mediana y el gráfico circular se incluyen en los estándares y no en los DBA. No obstante, corroboramos que estos temas aparecen en el grado quinto de los DBA. Por lo tanto, constatamos que no hay ningún tema que aparezca en los estándares que no se encuentre en los DBA.

4.2. *El caso de los países participantes en TIMSS 2015*

Como primer resultado, constatamos que cinco países (Armenia, Israel, Polonia, Marruecos y Serbia) no incluyen la enseñanza de la estadística o solamente aparece el término genérico estadística en sus currículos en el nivel primaria. En la tabla III mostramos las frecuencias porcentuales que indican la cantidad de currículos que incluyen los diferentes temas en la enseñanza de la estadística en términos de las categorías propuestas. Por ejemplo, el 24% de países de TIMSS 2015 incluyen el tema variables cuantitativas en estadística en primaria.

Con base en la información de la tabla III, no encontramos ningún tema con una frecuencia del 100%. Sin embargo, identificamos que el tema más común en estos países son las representaciones gráficas (con una frecuencia del 90%) junto con las tablas (69%). De igual manera, los temas relacionados con las representaciones tienen las mayores frecuencias porcentuales (mayores al 50%). De esta manera, la gráfica más común es la de barras (45%), seguida por la circular (31%), los pictogramas (22%) y el gráfico de líneas (14%); por su parte, la representación ejecutable tiene un 16% de frecuencia. En cuanto a los histogramas y/o gráficos de tallos y hojas, encontramos que hay al menos un documento curricular de la muestra que los incluye.

En cuanto a los usos, los temas con mayor frecuencia nos indican que los documentos curriculares se centran en la organización (45%) y análisis de la información (35%). Respecto a los contextos, el de mayor frecuencia es el no matemático (27%). Por otra parte, se consideran también, interpretar información (24%) o la resolución de problemas (20%).

TABLA III
Temas en los currículos de los países participantes en TIMSS 2015

Temas	*Frecuencia porcentual*
Conceptos y procedimientos	
Media	47%
Moda	35%
Mediana	29%
Variables cuantitativas	24%
Variables cualitativas	24%
Rango	12%
Representaciones	
Gráficas	90%
Tablas	69%
Barras	45%
Circular	31%
Pictogramas	22%
Ejecutable	16%
Líneas	14%
Histogramas	2%
Tallos y hojas	2%
Fenomenología	
Organizar información	45%
Analizar información	35%
Contextos no matemáticos	27%
Interpretar información	24%
Resolución de problemas	20%
Contextos matemáticos	8%

Fuente: elaboración propia

Respecto a los conceptos y procedimientos, las mayores frecuencias las tienen las medidas de tendencia central: la media aritmética (47%), la moda (35%) y la mediana (29%). También identificamos que se hace alusión explícita a los temas de variables cualitativas y cuantitativas (24%) y el rango como medida de dispersión (12%).

4.3. *Comparación entre Colombia y los países participantes en TIMSS 2015*

En la tabla IV, presentamos la comparación entre la información curricular de Colombia y la de los países participantes en TIMSS 2015.

TABLA IV

Temas en Colombia y en los países participantes en TIMSS 2015

Temas	*Estándares (2006)*	*DBA (2016)*	*TIMSS (2015)*
	Conceptos y procedimientos		
Población		✪	
Muestra		✪	
Variables cuantitativas		✪	✪
Variables cualitativas	✪	✪	✪
Media	✪		✪
Mediana	✪		✪
Moda		✪	✪
Rango		✪	✪
	Representaciones		
Tablas	✪	✪	✪
Barras	✪	✪	✪
Pictogramas	✪	✪	✪
Circular	✪		✪
Líneas	✪	✪	✪
Histogramas			✪
Tallos y hojas			✪
Ejecutable			✪
Manipulativo	✪	✪	
	Fenomenología		
Organizar información	✪	✪	✪
Analizar información	✪	✪	✪
Interpretar información	✪	✪	✪
Resolución de problemas	✪	✪	✪
Contextos no matemáticos	✪	✪	✪
Contextos matemáticos			✪

Fuente: elaboración propia

En los documentos curriculares de Colombia se hace referencia a los conceptos básicos de población y muestra, que no se mencionan en los países participantes en TIMSS 2015. En ambos casos, se consideran las variables cualitativas o cuantitativas, al igual que las tres medidas de tendencia central (media, moda, mediana). La única medida de dispersión que encontramos en común es el rango; en ninguno de los casos se hace referencia a otras medidas de dispersión o de posición.

Otro de los temas que se consideran en ambos casos son las representaciones gráficas (barras, pictogramas, circular y líneas), al igual que las tablas. El currículo colombiano no incluye, por ejemplo, la representación ejecutable y el gráfico de tallos y hojas, que sí se consideran en otros países. Asimismo, la representación manipulativa (uso de objetos concretos) aparece solo en los documentos de Colombia.

Por último, en cuanto a la fenomenología, encontramos que todos los temas son comunes, excepto los contextos no matemáticos que solo aparecen en los documentos curriculares de los países participantes en TIMSS 2015.

5. Conclusiones

En este estudio realizamos una revisión de los temas que se incluyen en la enseñanza de la estadística en educación primaria, tanto en documentos curriculares de Colombia como en los documentos homólogos de los países participantes en el estudio TIMSS 2015. A continuación, presentamos las conclusiones después de esta revisión, así como las limitaciones y oportunidades para futuras investigaciones.

Encontramos que la estadística se incluye en la educación primaria de la mayoría de los países analizados. Solamente cinco del total de países (Armenia, Israel, Polonia, Marruecos y Serbia) no la incluyen o solamente hacen mención del término estadística en sus currículos. Constatamos que los temas varían de acuerdo con el país y una explicación puede ser por sus referencias curriculares nacionales (como lo explican Zieffler et al. (2018)).

Los temas más frecuentes son las representaciones gráfica y tabular. Los tipos de representaciones gráficas que se consideran son la de barras, circular y de líneas. En algunos países se hace alusión a histogramas, grafico de tallos y hojas, haciendo referencia también a la representación ejecutable.

En cuanto a los conceptos, los documentos curriculares de la muestra incluyen las tres medidas de tendencia central (un mayor porcentaje para la media) y el rango como medida de dispersión. En términos de las variables estadísticas, encontramos información sobre variables cualitativas y/o cuantitativas, pero no una clasificación más específica (por ejemplo, ordinales o nominales). Un resultado interesante es que en los documentos curriculares de Colombia se incluyen los temas de población y muestra, que no se tratan en los países de TIMMS. Asimismo, en los documentos de Colombia se hace referencia a la representación manipulativa. En términos de la fenomenología, corroboramos los resultados obtenidos por Ainley y Monteiro (2008) en cuanto a que hay un foco en la resolución de problemas y el estudio de datos en contextos no matemáticos.

De igual manera, constatamos los resultados encontrados por Merino y Reyes (2013), respecto a la consideración de variables cualitativas, gráficas (de barras, de sectores y de líneas), media aritmética, moda, tablas de frecuencia y rango. Identificamos que, tanto en Colombia como en algunos países, se incluye el tema del rango como medida de dispersión. Este tema se sugiere en la literatura (Alsina, 2016; Cobb y Moore, 1997; NCTM, 2000), pero no se incluye en la mayoría de los países. Este también es el caso de la representación ejecutable, que no se trata en Colombia y se trata muy poco en los países analizados, pero se considera importante para la organización y análisis de conjuntos de datos en primaria (Serrano, 2011). Nos llama la atención la poca aparición de los conceptos de población y muestra dado que en la literatura se resalta su importancia (Ruiz, 2015).

Destacamos que solamente dos temas (representaciones en gráficas y tablas) se tratan en más de la mitad de los países y solamente cinco temas (media, moda, gráficas de barras, organizar y analizar información) aparecen en más de un tercio de los documentos curriculares de esos países. Estos resultados ponen de manifiesto que, a pesar de los llamados que se hacen en la literatura para darle más importancia al aprendizaje y enseñanza de la estadística en primaria, este propósito no se está logrando. Por otro lado, aunque en Colombia no se tratan algunos temas (representaciones en histogramas, tallos y hojas, y ejecutable, y los contextos matemáticos), su currículo destaca los temas de población y muestra, y la representación manipulativa que no se aborda en la mayoría de los currículos revisados de los países que participaron en TIMMS 2015.

En este estudio, identificamos los temas que se proponen enseñar en estadística solamente para los países que participaron en el estudio TIMSS 2015 y Colombia; no tenemos información para el resto de los países del mundo y, por consiguiente, no podemos generalizar estos resultados. Tampoco hemos considerado el análisis de cómo se abordan estos temas en estos países desde otras dimensiones del currículo: expectativas de aprendizaje, metodología y esquemas de evaluación, por lo que es un trabajo pendiente. Adicionalmente, consideramos relevante que otros países, como el caso particular de Colombia, hayan generado nuevos documentos curriculares posteriores al estudio TIMSS 2015. No obstante, establecimos un panorama con la información disponible por el estudio.

Esperamos que la información presentada en este estudio sea útil para colegas y países que tengan interés en revisar los temas en estadística en sus países. También, consideramos importante generar, en algún momento, discusiones de tipo curricular sobre la variedad de temas en los diferentes países en estadística. Consideramos que se podría realizar un estudio para indagar por las expectativas de aprendizaje, los aspectos metodológicos y los criterios de evaluación que se consideran en uno o varios países entorno a la estadística en primaria.

Referencias

Ainley, J. y Monteiro, C. (2008). Comparing curricular approaches for statistics in primary school in England and Brazil: a focus on graphing. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE study: teaching statistics in school Mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. ICMI/IASE.

Alsina, Á. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Aula de Innovación Educativa*, *251*, 12-17.

Alsina, Á. y Vásquez, C. A. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 12(48), 41-58*. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/526

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): a framework for statistics and data science education*. National Council of Teachers of Mathematics y American Statistical Association. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf

Batanero, C. (2000). Cap on va l'educació estadística? *Biaix*, *15*, 2-13.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. En *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística* (pp. 5-7). Instituto Interamericano de Estadística.

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study: the 18th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), *Estadística con proyectos* (pp. 9-46). Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_1

Bilgin, A. A. B., Coady, C., Geiger, V., Cavanagh, M., Mulligan, J. y Petocz, P. (2017). Opening real science: evaluation of an online module on statistical literacy for pre-service primary teachers. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 120-138. https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.220

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido [Subject matter analysis]. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/11904/

Chick, H. L. y Pierce, R. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances and Pedagogical Content Knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: teaching statistics in school Mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. ICMI/IASE.

Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, *104*(9), 801-823.

Cuevas, J. e Ibañéz, C. (2008). Estándares en educación estadística: Necesidad de conocer la base teórica y empírica que los sustentan. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *4*(15), 33-45. https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1141

English, L. D. y Watson, J. (2018). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM Mathematics Education*, *50*(1), 103-115. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0896-y

Estrella, S. (2018). Data representations in early statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 239-256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_14

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: a Pre-K–12 curriculum framework*. American Statistical Association. https://www.amstat.org/docs/default-source/amstat-documents/gaiseprek-12_full.pdf

Frischemeier, D. (2018). Design, implementation, and evaluation of an instructional sequence to lead primary school students to comparing groups in statistical projects. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 217-238). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_13

Groth, R. E. (2018). Unpacking implicit disagreements among early childhood standards for statistics and probability. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 149-162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_9

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: a systematic approach. En G. Kaiser, y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs* (pp. 181-197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_8

López, N. R. (2015). La enseñanza de la estadística en educación primaria en América Latina. *REICE - Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *13*(1), 103-121. https://revistas.uam.es/reice/article/view/2801

López, R. B., Rodríguez, M. T., Povedano, N. A. y Fanjul, N. N. J. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 323-343). Ediciones Pirámide.

Merino, R. M. y Reyes, K. R. (2013). Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2*, 137-142.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos básicos de aprendizaje V. 2*. Autor. https://web2paradesarrollarpensamientomat.blogspot.com/2017/01/derechos-basicos-de-aprendizaje-v2.html

Ministry of Education (2007). *The New Zealand curriculum*. Autor. https://nzcurriculum.tki.org.nz/The-New-Zealand-Curriculum

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. y Foy, P. y Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 international results in Mathematics*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado el 06 de noviembre de 2019 de http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/

Murillo Torrecilla, F. J. y Román Carrasco, M. (2009). Mejorar el desempeño de los estudiantes de América Latina: algunas reflexiones a partir de los resultados del SERCE. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *14*(41), 451-484.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Opolot-Okurut, C. y Eluk, P. O. (2011). Statistics School Curricula for Uganda. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education: a Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 15-19). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_3

Rico, L., Marín, A. y Romero, I. (1997). Fines de la educación matemática y proyectos curriculares. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 319-375). Síntesis.

Ruiz López, N. (2015). La enseñanza de la estadística en educación primaria en América Latina. *REICE - Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *13*(1), 103-121. https://doi.org/10.15366/reice2015.13.1.006

Serrano, L. (2011). *Estadística*. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros en Educación Primaria* (pp. 401-426). Ediciones Pirámide.

Watson, J. M. (2013). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Routledge.

Wessels, H. (2011). Statistics in the South African school curriculum. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school Mathematics-Challenges for teaching and teacher education: a Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 21-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_4

Zieffler, A., Garfield, J. y Fry, E. (2018). What is statistics education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in Statistics Education* (pp. 37-70). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_2

Autores

Camilo López. Universidad de los Andes, Colombia. cc.lopez10@uniandes.edu.co

iD https://orcid.org/0000-0002-6116-2324

Pedro Gómez. Universidad de los Andes, Colombia. argeifontes@uniandes.edu.co

iD https://orcid.org/0000-0001-9929-4675

Milena Policastro, Miguel Ribeiro

UMA CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO INFANTIL E ANOS INICIAIS EM TÓPICOS DE MEDIDA

A Characterization of kindergarten and primary's Mathematics Teacher's Specialised Knowledge on Measurement topics

RESUMEN

En este estudio consideramos las dimensiones matemáticas y pedagógicas del conocimiento del profesor como especializadas, con el objetivo de caracterizar el contenido de este conocimiento, específicamente asociado a los temas de Medidas. Empleando el marco del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), exploramos y describimos el contenido del conocimiento especializado revelado por un grupo de profesores de Educación Primaria en el Brasil mientras abordan una tarea para la formación, en un curso de desarrollo profesional. Los resultados aportan un refinamiento de la categorización del conocimiento docente asociado a los temas (KoT), considerando por separado el detalle del contenido de este conocimento relativo a definiciones, propiedades y fundamentos. Además, el estudio presenta un conjunto de descriptores de conocimiento que resaltan las particularidades y especificidades de este componente del conocimiento docente relacionado con los temas de Medida, permitiendo una especie de mapeo de los elementos estructurales y estructurantes de este conocimiento.

PALABRAS CLAVE:
- *MTSK*
- *Conocimiento del profesor de matemáticas*
- *Medida*
- *Formación de profesores*

ABSTRACT

The specialized dimensions of mathematical and pedagogical knowledge held by teachers are under scrutiny as we aim to depict the content of knowledge disclosed by participants engaged in a formative process with a specific focus on Measurement topics. Employing the framework of Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), this study delves into and expounds upon the knowledge unveiled by a cohort of educators as they tackle a Training Task embedded within a professional development course catered to Early Childhood Education teachers in Brazil. The outcomes of this investigation yield a more refined categorization of teacher knowledge, intimately linked to the topics (KoT), by meticulously examining the intricate facets of this knowledge, encompassing definitions, properties, and fundamental principles. Additionally,

KEY WORDS:
- *MTSK*
- *Mathematical Teacher's Knowledge*
- *Measurement*
- *Teacher Education*

Policastro, M. y Ribeiro, M. (2023). Uma caracterização do conhecimento especializado do professor de matemática da educação infantil e anos iniciais em tópicos de medida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(1), 101-136. https://doi.org/10.12802/relime.23.2614. Recepción: Noviembre 14, 2021 / Aceptación: Agosto 16, 2022

this research project presents a collection of knowledge descriptors that bring to the fore the nuances and specificities of this crucial aspect of teacher knowledge, particularly as it pertains to Measurement topics, thus facilitating a comprehensive mapping of the structural and foundational elements within this knowledge domain.

RESUMO

As dimensões matemática e pedagógica do conhecimento do professor são consideradas especializadas, e pretende-se descrever o conteúdo do conhecimento revelado por participantes de um processo formativo com foco nos tópicos de Medida. Considerando o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), explora-se e descreve-se o conteúdo do conhecimento revelado por um grupo de professores ao resolverem uma Tarefa para a Formação, implementada em um curso para professores que atuam desde a Educação Infantil, no Brasil. Os resultados trazem um refinamento da categorização do conhecimento do professor, associada aos tópicos (KoT), ao considerar, de forma separada, o detalhamento do conteúdo desse conhecimento, relativamente a definições, propriedades e fundamentos. Além disso, no estudo, um conjunto de descritores de conhecimento evidenciam particularidades e especificidades dessa componente do conhecimento do professor, particularmente para os tópicos de Medida, possibilitando um tipo de mapeamento de elementos estruturais e estruturantes desse conhecimento.

PALAVRAS CHAVE:
- *MTSK*
- *Conhecimento do Professor que ensina Matemática*
- *Medidas*
- *Formação de Professores*

RÉSUMÉ

Les dimensions mathématique et pédagogique du savoir des enseignants sont considérées comme étant spécialisées. L'objectif de cette étude est de décrire en détail le contenu du savoir révélé par les participants lors d'un processus de formation portant sur les sujets de mesure. En utilisant le cadre du Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), nous explorons et décrivons le savoir mis en évidence par un groupe d'enseignants lors de la résolution d'une Tâche de Formation intégrée à un cours destiné aux enseignants travaillant dans l'éducation de la petite enfance au Brésil. Les résultats de cette étude permettent d'affiner la catégorisation du savoir des enseignants en associant ces résultats aux sujets spécifiques (KoT). Nous examinons en particulier les définitions, les propriétés et les fondements du savoir enseignant. De plus, cette étude met en évidence un ensemble de descripteurs du savoir qui mettent en lumière les particularités et les spécificités de cette composante du savoir des enseignants, en se concentrant notamment sur les sujets de mesure. Ces résultats permettent ainsi de cartographier les éléments structurels et fondamentaux de ce savoir.

MOTS CLÉS:
- *MTSK*
- *Connaissance du professeur de mathématiques*
- *Mesures*
- *Formation des enseignants*

1. Introdução

O entendimento do tema de Medida é considerado central, em muitos contextos, como forma de desenvolver o Pensamento Matemático (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Organisation for Economic Co-operation and Development [OCDE], 2010) dos alunos, e as noções de medida favorecem a conexão entre a Geometria e os Números, áreas particularmente críticas em termos de ensino e de aprendizagem (Clements & Sarama, 2007). Entender a Medida demanda atribuir significado aos seus elementos fundamentais – unidade de medida e todo a ser medido – e aos processos mentais envolvidos; e compreender as noções de quantidade, notadamente no que se refere à coordenação entre as quantidades discretas e contínuas (e.g., Smith et al., 2011). Tais entendimentos contribuem para desenvolver conhecimento associado aos fundamentos matemáticos de processos aritméticos; raciocínio proporcional; construtos e conceitos associados aos números racionais e à noção de variáveis algébricas (e.g., Szilagyi et al., 2013).

Há já consenso de que para ensinar Matemática é essencial ao professor conhecer ampla e profundamente os tópicos a serem ensinados (Ma, 1999). No entanto, o foco das pesquisas sobre o ensino de matemática tem sido maioritário nos conhecimentos dos alunos (Barret et al., 2012; Hiebert, 1984; Vysotskaya et al., 2020), deixando para segundo plano o conhecimento do professor e suas especificidades para ensinar, em particular, Medidas (Policastro et al., 2020; Ribeiro et al., 2018; Subramaniam, 2014). Sendo o conhecimento do professor um dos elementos que impacta nas aprendizagens e capacidades matemáticas dos alunos (Boyd et al., 2009; Hill & Chin, 2018) e nas ações e decisões que ele emprega em sua prática letiva (Charalambous, 2015; Ribeiro et al., 2012), torna-se essencial explorar algumas das especificidades desse conhecimento como forma de ampliar os entendimentos sobre seu conteúdo e as propostas de programas de formação de professores (Caldatto et al., 2018).

Diversas conceitualizações do conhecimento do professor surgiram nas últimas três décadas, porém destacam-se as que consideram a natureza especializada desse conhecimento (Scheiner et al., 2017) para a atuação docente. Uma delas é o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK[1] (Carrillo et al., 2018). Ao considerarmos a centralidade do entendimento da Medida nas aprendizagens matemáticas dos alunos (Clements & Stephan, 2004), o papel e a importância do conhecimento do professor nessas aprendizagens (De

[1] Optamos por manter a nomenclatura originalmente apresentada, em inglês, para preservar o sentido e significado dos termos propostos pelos autores.

Gamboa et al., 2020) e o ainda inexpressivo número de pesquisas específicas sobre as especificidades do conhecimento do professor para ensinar os tópicos de Medida (Di Bernardo et al., 2018; Ribeiro & Policastro, 2021), levam-nos a uma agenda de pesquisa que objetiva entender e descrever o conteúdo do conhecimento especializado do professor nos tópicos de Medida, com intuito de propor programas de formação que desenvolvam essas especificidades e, assim, melhorem a qualidade das discussões e das aprendizagens matemáticas. Nessa linha importa discutir a seguinte questão: Que conhecimento especializado dos tópicos de Medida revelam professores participantes de uma Formação Continuada focada nas especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática?

2. Fundamentos teóricos dos tópicos de Medida

Os tópicos de Medida e o "senso de medida" (Stephan & Clements, 2003, p. 14) deveriam ocupar um lugar de destaque nos currículos escolares, desde a Educação Infantil[2], por se constituírem de elementos, noções e conceitos fundamentais ao desenvolvimento de ideias fulcrais da Matemática e ao envolvimento dos alunos com algumas das *big ideas*[3] em Matemática (NCTM, 2000). No entanto, tradicionalmente, esse trabalho envolvendo Medida tende a focar-se no ensino das unidades de medida padronizadas (Policastro et al., 2017), sem explorar os procedimentos de medição para cada tipo de grandeza ou os processos (mentais) em que se pauta a atividade de medir (Stephan & Clements, 2003).

Do ponto de vista puramente experimental, medir está associado a conferir a um atributo mensurável de objetos, fenômenos ou processos (Berka, 1983) um valor numérico, obtido ao comparar magnitudes de uma mesma grandeza e quantificar as vezes que uma delas – a unidade de medida – deve ser repetida até que se consiga, por acumulação, obter a magnitude da outra – o todo a ser medido (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004).

[2] No Brasil, essa etapa corresponde à escolarização de crianças de 0 a 5 anos.

[3] Com efeito, uma *big idea* em matemática pode ser considerada como a proposição de uma ideia que é central na fundamentação dos entendimentos matemáticos, porque conecta conceitos e processos (Charles, 2005), de modo a compor uma rede estruturante de conhecimentos matemáticos. Os tópicos do tema de Medida, por exemplo, oportunizam o desenvolvimento de algumas *big ideas* em matemática, tais como "comparação", "quantificação", "agrupamentos", "equivalência", "proporcionalidade", "estimação", "aproximação", entre outras.

No contexto dos tópicos de Medida, destacam-se as noções de “grandeza” e “magnitude” que, em muitos casos, por questões linguísticas[4], são tomadas como sinônimos, mas aqui serão devidamente diferenciadas. Assume-se que grandeza é o atributo de um objeto ou fenômeno físico que pode ser quantificado por meio de um processo de medição, enquanto a magnitude é assumida como sendo a variação quantitativa deste atributo (Berka, 1983).

Ainda nesse contexto, outro termo que merece clarificação é “quantidade”. Com efeito, uma quantidade é um montante que pode ser determinado numericamente a partir de uma contagem ou a partir de uma medição. No primeiro caso, denominamos por “quantidade discreta” o valor determinado e, no segundo caso, falamos em “quantidade contínua” (Godino et al., 2002). As grandezas físicas (e.g., comprimento, área, volume, capacidade, tempo), possuem magnitudes expressas por quantidades contínuas. Mas a cardinalidade – número de elementos – de um conjunto, por exemplo, será sempre expressa por uma quantidade discreta. Dessa forma, tratamos as magnitudes como quantidades necessariamente associadas às medidas.

Habitualmente introduzem-se os alunos inicialmente às ideias de medição de comprimento, envolvendo instrumentos e unidades de medidas não padronizados (Smith et al., 2011). Posteriormente apresentam-se as unidades de medida padronizadas de comprimento, e todas as demais grandezas – área, capacidade, massa, volume e tempo[5] – passam a ser discutidas, sem considerar as particularidades da natureza de cada uma (Ribeiro & Policastro, 2021; Sarama et al., 2011; Szilagyi et al., 2013). Segundo Lehrer et al. (2003, p. 100), as crianças deveriam ser engajadas a “desenvolver uma teoria sobre as medidas, ao invés de simplesmente efetuar medições”, e a conceitualização de cada uma das grandezas, através da comparação e classificação, deveria introduzir esse trabalho (Passalaigue & Munier, 2015).

Os processos (gerais) associados à atividade de medir estão fundamentados em seis princípios, descritos particularmente para o caso da grandeza comprimento (Clements & Stephan, 2004): (a) *partição* – atividade mental de dividir o objeto em magnitudes de mesmo comprimento, quando a unidade de medida é menor que o elemento a ser medido; (b) *unidade de iteração* – habilidade de pensar em um

[4] Muitos textos utilizam o termo “magnitude” – no inglês e no espanhol, com a mesma grafia da língua portuguesa – para designar “medida”. Outros ainda utilizam este termo para designar “quantidade” ou, de forma mais abrangente, “tamanho”. Entretanto, o mais comum é encontrar o uso do termo “magnitude” como sinônimo de “grandeza”.

[5] Levando-se em conta os documentos oficiais brasileiros formulados a partir da *Base Nacional Comum Curricular* (Ministério da Educação [ME], 2018).

comprimento como referência para deslocar-se em todo o comprimento do objeto a ser medido, para não deixar espaços por medir entre duas unidades subsequentes, nem sobrepor unidades adjacentes; (c) *transitividade* – processo de, por estimativa ou dedução, obter uma relação de igualdade ou desigualdade (superior ou inferior) de quantidade relacionada a determinada grandeza e estendê-la a outros dois ou mais objetos; (d) *conservação* – compreensão de que qualquer movimento (translação ou rotação) no objeto a ser medido manterá os comprimentos; (e) *acumulação da distância* – entendimento de que, no processo de iteração de uma unidade de comprimento ao longo do elemento que se mede, realiza-se a contagem da quantidade de iterações; (f) *relação da medida com um valor numérico* – reorganização da compreensão do processo de contagem de quantidades discretas para quantidades contínuas.

Embora esses seis princípios tenham sido descritos com base nos processos (mentais e físicos) associados à atividade de medir unidimensionalmente, eles podem ser transpostos para grandezas de outros tipos, considerando algumas adaptações necessárias (Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2011).

A noção de unidade de medida, porém, ocupa lugar de destaque nas aprendizagens matemáticas dos alunos, pois fundamenta vários outros conceitos como os de fração unitária e de todo e de unidade composta – unidade de unidades (Norton & Boyce, 2015). Mas essa unidade de medida é frequentemente confundida com o instrumento de medida (Gamboa et al., 2020). Nesse contexto, a noção de *unitizing* – operação mental na qual um agrupamento de quantidades pode ser interpretado como uma unidade (Steffe, 2003) – é fundamental para entender o que é e como se constitui uma unidade de medida.

Há várias questões ainda problemáticas para alunos e professores, sendo duas delas a diferenciação entre: (i) área e perímetro; (ii) volume e capacidade. Em (i), a dificuldade apresenta-se, essencialmente, pela não compreensão de qual o atributo (grandeza) a ser medido (Baturo & Nason, 1996). Com efeito, define-se área como a magnitude de uma superfície bidimensional contida por uma fronteira, e o perímetro, como a magnitude dessa fronteira (Clements & Sarama, 2009), o que demanda compreender que o perímetro é uma medida unidimensional (Irwin et al., 2004) e a área está subordinada à coordenação entre duas dimensões (Panorkou, 2020). Em (ii), as dificuldades sustentam-se porque os termos “volume” e “capacidade” são tomados como sinônimos (Ribeiro & Policastro, 2021), o que leva muitas vezes a associarem, nos contextos de ensino, as mesmas unidades de medida (padronizadas) às duas grandezas (Ho & McMaster, 2019), sem realizar o necessário trabalho que priorize a conceitualização de cada uma (Passalaigue & Munier, 2015). Essas dificuldades sustentam-se, também, pelo foco nos procedimentos de cálculo, sem conceitualizar a grandeza, ao assumir que calcular o valor da medida de uma grandeza seja medi-la.

3. Conhecimento do professor dos tópicos de Medida, na perspectiva do MTSK

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK – (Carrillo et al., 2018) assume a natureza especializada do conhecimento do professor, considerando três domínios: *Mathematical Knowledge* (MK); *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) e *Beliefs* a respeito da matemática e do seu ensino e aprendizagem. No *MK* consideram-se três subdomínios (ver Figura 1), mas aqui focamos somente o *Knowledge of Topics* (KoT).

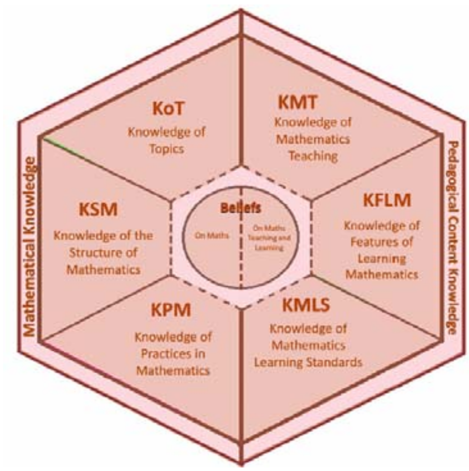


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018, p. 241)

Este estudo foca-se especificamente no KoT, uma vez que é a partir deste subdomínio que se pode evidenciar o conteúdo do conhecimento do professor acerca dos elementos estruturais e estruturantes de cada um dos tópicos matemáticos com os quais irá lidar em sua prática letiva.

Com efeito, o KoT corresponde ao conteúdo do conhecimento conceitual e procedimental do professor, relacionado a cada tópico. Originalmente consideram-se no KoT quatro categorias: (i) *Definitions*, *properties and foundations*; (ii) *Phenomenology and applications*; (iii) *Procedures;* (iv) *Registers of representation* (Carrillo et al., 2018). Porém, resultados recentes (Policastro & Ribeiro, 2021) mostraram a necessidade de separar a categoria (i) em (ia), (ib) e (ic), contribuindo para refinar o entendimento das especificidades do conteúdo do conhecimento do professor, relacionadas a cada um dos tópicos matemáticos.

Assim, a seguir, passamos a detalhar cada uma das categorias, no sentido de configurar particularidades e especificidades do conteúdo do conhecimento do professor associado a cada uma delas, especificamente no âmbito dos tópicos de Medida. Esse detalhamento teórico sustentará as análises e discussões realizadas na seção seguinte.

(ia) Definitions

As definições são essenciais na (Educação) Matemática, assumindo papéis e características muito específicos (Zaslavsky & Shir, 2005). Estes papéis relacionam-se com a apresentação dos objetos de uma teoria e a captura da essência dos conceitos, ao comunicarem suas propriedades caracterizadoras (Mariotti & Fischbein, 1997) e os elementos fundamentais para a formação desses conceitos (Vinner, 2002). Além disso, pelas definições é que se fundamentam as demonstrações e a resolução de problemas (Weber, 2002), porque se cria uma uniformidade na comunicação de ideias matemáticas importantes (Zazkis & Leikin, 2008).

As definições que o professor conhece influenciam nas aprendizagens dos alunos (Zazkis & Leikin, 2008), porque contribuem para estabelecer relações entre a imagem do conceito e a sua definição (Tall & Vinner, 1981). Inclui-se no conhecimento do professor conhecer que: o conceito de medida implica a comparação entre magnitudes de uma mesma grandeza, seguida da quantificação de uma delas – unidade de medida – em função da outra, o todo a ser medido (Berka, 1983); unidade de medida é definida como a magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza; que a área é uma grandeza que pode ser definica como a superfície delimitada pela fronteira de uma figura geométrica; o perímetro em duas dimensões é a linha que define a fronteira de uma figura plana; volume é a porção de espaço ocupada por um objeto no espaço; capacidade é o espaço interno de um objeto tridimensional, que pode ser preenchido (Panorkou, 2021).

(ib) Foundations

Um dos aspectos intrínsecos da prática matemática é a possibilidade de criar relações entre áreas aparentemente diferentes. Com efeito, "qualquer tipo de fundamento, se não define, pelo menos distingue entre trabalho matemático e não matemático e, de alguma forma, caracteriza a prática matemática, como sendo de um certo tipo e obedecendo a algumas regras específicas" (Venturi, 2014, p. 46). Se as propriedades matemáticas contribuem para organizar os conceitos, os fundamentos exercem o papel de os conectar. Os fundamentos são, portanto, responsáveis por criar elementos unificadores dos construtos e conceitos matemáticos, dando forma ao conhecimento matemático.

Inclui-se aqui o conhecimento do professor, associado a conhecer que: o que se mede são propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos – as grandezas; unidade e instrumento de medida são elementos distintos; os constructos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar" são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004) com unidades padronizadas ou não padronizadas dessa grandeza; a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos e ações que são repetidos de forma idêntica, até que se obtenha determinado resultado (Clements & Stephan, 2004); a unidade de medida e o todo a ser medido são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza; as unidades de medida (padronizadas ou não) são adequadas para cada tipo de grandeza; a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição (Bragg & Outhred, 2004; Norton & Boyce, 2015); e que é relevante o papel das unidades não padronizadas para fundamentar noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas (Barrett et al., 2011; Bragg & Outhred, 2004).

(ic) Properties

As propriedades são "relações entre elementos ou subconjuntos de elementos de um conjunto que são instanciadas em situações particulares" (Mason et al., 2009, p. 10). A natureza dessas propriedades matemáticas pode variar; entretanto, o papel que elas exercem no entendimento dos conceitos e dos construtos matemáticos aos quais estão vinculadas é essencialmente o mesmo: organizar e descrever um conjunto de atributos e características relacionados especificamente a certos objetos ou entes matemáticos, de modo a que fiquem evidentes as relações entre eles. Inclui-se, no contexto da Medida, o conhecimento de que: toda unidade de medida, padronizada ou não, possui (sub)múltiplos resultantes do estabelecimento de relações de equivalência entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada (Ribeiro & Policastro, 2021); a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua (Bragg & Outhred, 2004); um instrumento não padronizado para medição de comprimento pode fornecer distintas unidades de medida (Policastro et al., 2017).

(ii) Phenomenology and applications

Nesta categoria inclui-se o conhecimento do professor não só dos conceitos que, dentro de um tópico, organizam e descrevem os fenômenos que dão sentido a esse tópico, mas também dos contextos que organizam todos os fenômenos que compartilham de ideias-chave ou "características estruturais" (Gómez & Cañadas, 2016, p. 316) próprias desses fenômenos. No âmbito dos tópicos de Medida, inclui-se conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra e conhecer os distintos contextos de aplicação da atividade de medir: perímetro, área, capacidade, volume, massa, etc.

(iii) Procedures

Conhecer um conjunto de procedimentos associados a cada um dos tópicos – que muitas vezes se configuram como algoritmos –, os porquês matemáticos que os sustentam, a característica do resultado obtido e as condições necessárias e suficientes para executar tais procedimentos, forma parte desta categoria. No âmbito da Medida, inclui-se, por exemplo, conhecer: os procedimentos de iteração para efetuar uma medição de qualquer grandeza, isto é, a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração; que um instrumento de medida não padronizado pode ser utilizado de forma padronizada (ou não) para efetuar uma medição (Ribeiro et al., 2018); que o resultado da uma medição caracteriza-se pelo valor da medida expressa por um número associado a uma marca, e esta marca corresponde à unidade de medida utilizada (padronizada ou não); que é condição necessária para efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades (Norton & Boyce, 2015).

(vi) Registers of representation

O conhecimento matemático é exteriorizado e percebido pelos sentidos, e essa exteriorização pode ocorrer associada a distintas formas de o tornar perceptível. Essas múltiplas formas correspondem a registros de representação (Ainsworth, 2006; Pape & Tchoshanov, 2001) que podem ser, por exemplo, numéricos, pictóricos, gráficos, verbais – em linguagem oral ou escrita. Como elementos desta componente no âmbito da Medida, inclui-se, por exemplo, conhecer diferentes formas de exteriorizar uma medida; relacionar distintos registros de representação e navegar frutiferamente entre eles; ou compreender o emprego do termo "tamanho" como inadequado para se referir à magnitude de qualquer grandeza.

4. Contexto e método

Esta investigação compõe uma agenda de pesquisa que busca caracterizar, em vários temas e tópicos matemáticos, o Conhecimento Especializado do professor que atua desde a Educação Infantil. Aqui discutimos alguns aspectos desse conhecimento no âmbito de distintos tópicos do tema de Medidas. É um estudo de caso instrumental (Stake, 1995), cujo foco de interesse não é o caso em si, mas saber que este instrumento permite conhecer e entender um elemento específico – o conhecimento do professor –, de modo a gerar teorias. As informações foram coletadas em um contexto de um Programa de Formação Contínua[6] – com sete módulos de formação – que envolveu 17 professores, atuantes desde a Educação Infantil ao Ensino Superior, e que teve o objetivo formativo de desenvolver o conhecimento dos participantes, na perspectiva do MTSK, em vários tópicos matemáticos.

Cada um dos módulos do programa focava em um tema matemático considerado problemático – conforme pesquisas na área de Educação Matemática apontam –, tanto do ponto de vista das aprendizagens dos alunos quanto do processo de ensino, a saber: Números e Operações, Frações, Geometria (dois módulos), Pensamento Algébrico, Probabilidade e Estatística e Medidas.

No programa de formação, aos professores não era atribuído o papel de ativamente decidirem os tópicos que seriam abordados em cada encontro, embora também não lhes fosse vetado o direito de sugeririem ou solicitarem que determinados tópicos fossem incluídos nas discussões. Por exemplo, no caso do módulo de Medidas (o último do programa), embora o tópico de divisão de frações não estivesse inicialmente contemplado no programa, esse assunto foi incluído e abordado a pedido dos cursistas, em uma das cinco sessões de formação do módulo.

Neste estudo, focamos em uma das sessões de formação (carga horária de 8 horas) do módulo de Medidas[7]. No contexto formativo do programa mencionado, todos as sessões de formação eram gravadas em áudio e vídeo – tomando-se um plano geral das discussões em grande grupo e planos com foco em cada um grupo de trabalho – em geral, quatro grupos.

Nesse encontro, os professores foram convidados a refletir sobre a *Tarefa para a Formação* – TpF (Ribeiro, Almeida & Mellone, 2021), intitulada "A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos". Com efeito, a conceitualização de uma TpF se dá com base na lente teórica do MTSK, que é utilizada como ferramenta para incluir propostas nas tarefas que efetivamente contribuam para mobilizar

6 O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no entendimento e desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor no âmbito da matemática. Página do grupo: www.ciespmat.com.br.

7 Por ser um estudo também longitudinal, utilizamos números (de 1 a 17) para identificar os professores, para que seja possível, ao longo da pesquisa mais ampla, acompanhar cada um deles.

elementos do conhecimento especializado dos professores, associados a cada um seis dos subdomínios (KoT, KPM, KSM, KFLM, KMT e KMLS), considerando não só as particularidades de cada tópico matemático em foco na formação, mas também, e obviamente, os objetivos formativos previamente delineados.

Assim, para discutirem as propostas da TpF, os 17 participantes da sessão, identificados por "P*i*" em que *i* é um número que corresponde a um professor, foram organizados em quatro grupos: Grupo 1 – três professores atuantes nos Anos Iniciais (P3, P4 e P11) e um estudante de pedagogia (P13); Grupo 2 – quatro professores atuantes nos Anos Iniciais (P2, P8, P9 e P17) e um professor atuante no Ensino Médio e Superior (P10); Grupo 3 – um professor atuante na Educação Infantil (P1); dois professores atuantes nos Anos Finais (P5 e P7) e um estudante de pedagogia (P16); Grupo 4 – um professor atuante na Educação Infantil e Anos Iniciais (P6), um professor atuante nos Anos Iniciais (P13), um professor atuante nos Anos Finais (P14) e um professor que não atua mais no mercado de trabalho (P15). Note-se que cada grupo sempre esteve constituído por professores atuantes (ou em formação) de diferentes níveis de ensino, justamente para que fossem estimulados a compartilhar suas experiências e perspectivas relacionadas com as discussões mobilizadas pela TpF.

Partimos, então da TpF (Ribeiro et al., 2021) e focamos a atenção nas produções e discussões dos professores, associadas a três questões da Parte I da TpF (Figura 2) e a questões vinculadas a uma tarefa para os alunos (Figura 5).

A Medida, seus princípios, fundamentos e procedimentos

Parte 1

1) Responda individualmente cada uma das questões a seguir. Para isso, considere que você *não* está em um contexto escolar, ou seja, você *não* deverá responder as questões imaginando como faria para ensinar os objetos de conhecimento abordados nessas questões. Portanto. as suas respostas devem apenas revelar aquilo que você conhece sobre esses objetos de conhecimento.

   Você poderá utilizar palavras, desenhos, esquemas ou qualquer outro tipo de representação para explicitar o seu raciocínio.
   a) O que é medir?
   b) O que se pode medir?
   c) Como efetuamos uma medida?
   d) Com o que podemos medir?

2) Em qual ano/série ou etapa escolar você leciona? Considerando a serie/ano ou etapa escolar em que leciona e sendo o foco principal em Medidas, que trabalho(s) você costuma desenvolver com os seus alunos? Apresente algum(ns) exemplo(s). Caso considere que não desenvolve nenhum tipo de trabalho com esse foco, comente os motivos que o(a) levam a não fazê-lo.

3) Quais são os conceitos matemáticos essenciais à atividade de medir?

Figura 2. Questões da Tarefa para a Formação implementada no encontro
Fonte: os autores

A primeira questão foca-se nos construtos e conceitos que fundamentam o fenômeno e os procedimentos da atividade de medir; a segunda associa-se ao conhecimento do professor dos níveis conceituais e procedimentais dos alunos em etapas educativas distintas, com relação aos fundamentos da atividade de medir; a última questão busca ampliar a discussão em relação ao papel das unidades de medida na medição. O conteúdo da segunda questão pode ser tipicamente entendido como estando associado ao domínio do PCK (particularmente, ao subdomínio KMT), mas o foco aqui é no conhecimento matemático manifestado na justificação.

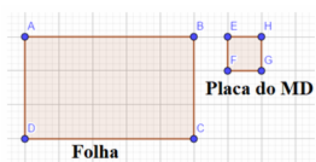
Todas as TpF (Ribeiro, 2021) contêm uma tarefa para alunos, e aqui essa tarefa contribuiu para aceder ao conhecimento dos participantes - e desenvolvê-lo - quanto aos princípios, fundamentos e procedimentos associados à atividade de medir.

Tarefa: Rotação por estações - Vamos medir?

Estação 1: um pedaço de barbante (ou qualquer outro material que se assemelhe a um fio) de comprimento “x” e um paralelepípedo com dimensões x/10, x/5 e x/2.

Orientação da estação 1: Meça o comprimento do fio usando o paralelepípedo. Registre a sua medição na folha.

Estação 2: Uma placa do material dourado e uma folha cuja área seja equivalente a 5x3 placas (maior superfície da placa)



Orientação da estação 2: Meça a folha usando a placa. Registre a sua medição na folha.

Estação 3: Uma balança de pratos (montagem pode ser adaptada com cabide, fios e pratinhos de jardinagem); uma balança digital; uma placa do material dourado e diversos onjetos idênticos (em quantidade superficie para que a massa da placa possa ser comparada com a massa de um desses objetos quando o procedimento for empregado com a balança de pratos)

Orientação da estação 3: Meça a massa da placa do material dourado usando os objetos. Registre a sua medição na folha.

Estação 4: Um recipiente qualquer, um copinho (ou qualquer outro recipiente menor que o primeiro) e uma garrafa d’agua cheia. No recipiente, deve haver uma marcação para determinar a quantidade de água a ser depositada no interior - sugestão: a marca no recipiente pode ser a que determina que a quantidade de água a ser depositada corresponde a três unidades do copinho.

Orientação da estação 4: Meça a capacidade de água do recipiente até a marca indicada, usando o copinho.

Figura 3. Estações de trabalho propostas na tarefa para os alunos
Fonte: os autores

Esta tarefa para os alunos incluiu uma abordagem de “metodologias ativas” e continha indicações para a passagem por diferentes estações de trabalho (Figura 3); uma ficha de registro de respostas (Figura 4); e um conjunto de perguntas associadas (Figura 5).

FICHA DE REGISTRO DA TAREFA “*Rotação por estações - Vamos medir?*”

Nome: ______________________________ Data: ____ / ____ / ____

Estação	O que você mediu?	Como você mediu? (descreva passo-a-passo os procedimentos empregados para efetuar a medição e faça um desenho para representar esse processo)	Com o que você mediu?	Qual foi a unidade de medida utilizada para fazer a medição?	Registro da sua medição (o que escreveu na comanda que estava com voce durante o trajeto pelas estações)
1					
2					

Figura 4. Ficha de registros incluída na tarefa para os alunos
Fonte: os autores

Tarefa 1: Rotação por estacões - Vamos medir?

Você está diante de um conjunto de quatro estações de trabalho. Em cada estação, você encontrará uma tira de papel contendo uma instrução. Você deverá seguir as instruções contidas nessa tira de papel, sem trocar qualquer tipo de informação com os seus colegas. Depois de executar o que se pede na tira de papel, você seguirá para a próxima estação, procedendo da mesma forma, até a última estação.

1. Agora que você já finalizou o trajeto pelas estações, solicite a ficha de registro ao(à) professor(a). Preencha a ficha de acordo com as instruções a seguir

Instruções para preenchimento da ficha:

Em cada coluna da ficha você deve explicar o seu raciocínio a partir de uma descrição com o máximo de detalhes que conseguir. Você pode fazê-lo usando esquemas, desenhos, palavras, cálculos,...

2. Sente-se com mais dois colegas e, no trio, comparem e discutam sobre os registros que cada um de vocês efetuou em sua própria ficha.
   a. Quais foram as semelhanças e diferenças nos registros de cada um? Por que vocês acham que essas semelhanças e diferenças ocorreram?
   b. Considerando os procedimentos empregados para medir em cada uma das estações, vocês acham que são semelhantes ou distintos? Especifique as semelhanças (e/ou diferenças) que consideraram.
   c. Considerem a unidade de medida utilizada na estação 1. Vocês acham que é possível efetuar as medições propostas nas estações 2, 3 e 4 utilizando essa unidade de medida? Se sim, expliquem, em cada caso, como fariam essas medições. Caso vocês considerem que não seja possível efetuar essas medições, apresentem justificativas dos porquês consideram tal impossibilidade.

Figura 5. Tarefa para alunos incluída na TpF
Fonte: os autores

Os professores resolveram a Parte I (Figura 2) nos pequenos grupos, e uma discussão plenária foi realizada. Posteriormente resolveram a tarefa para alunos, percorrendo as estações e finalizaram com outra discussão plenária.

O áudio captado durante as interações – nos pequenos grupos e plenárias – foi integralmente transcrito e complementado com informações identificadas nos vídeos (Ribeiro et al., 2012). Na transcrição, as linhas são numeradas, e "*Pi"* corresponde a algum dos professores *i* (de 1 a 17) e a formadora, que é uma das autoras deste trabalho está identificada por F. A análise foi realizada em duas fases, uma manual e outra com o auxílio do *software* ATLAS.ti, procurando evidências de conhecimento no âmbito das categorias do KoT. Ao inserir os documentos no ATLAS.ti, as transcrições foram identificadas por "ME.I.N", e os registros escritos digitalizados foram identificados por "T.I.N", em que "N" representa o número do grupo em que ocorreram as discussões, e, para as plenárias, usou-se a nomenclatura "ME.PL.I".

Após alguns ciclos de codificações, incluindo-se, excluindo-se ou reagrupando-se as produções dos professores e determinadas categorias do KoT, até atingir a saturação (Strauss & Corbin, 1994), identificaram-se 473 produções, evidenciando conteúdo conhecimento especializado (ver Tabela I), relacionado ao KoT.

TABELA I
Incidência de produções associadas a evidências do conhecimento em cada categoria do KoT

Categorias do KoT	*Produções*
Definitions	51
Foundations	218
Properties	42
Phenomenology and applications	14
Procedures	121
Registers representation	27
Total	473

Uma análise transversal e longitudinal buscou semelhanças e diferenças entre o conteúdo do conhecimento identificado. Refinando a cada ciclo de análise, emergem os denominados descritores de conhecimento do professor (Policastro & Ribeiro, 2021), nomeados de acordo com o subdomínio (KoT) e a categoria a que pertencem: (*Definitions* (d); *Foundations* (f); *Properties* (pp); *Phenomenology and Applications* (ph)*; Procedures* (mp); *Registers of representantion* (rp)). A cada um foi atribuído um número sequencial.

Na Tabela II exemplificamos como esses descritores emergem da análise. Os professores revelam conhecimento associado a *Definitions:* ao buscarem explicar e conceituar o que é medir (ME.I.2, 46-48; ME.I.3 e T.I.1); e ao referirem certos entes – instrumento e unidade – que consideram necessários na atividade de medir (ME.I.3, 1033-1040).

TABELA II

Reagrupamento das produções e emergência dos descritores de conhecimento

Definitions	
Produções dos professores	
ME.I.2 46. P2: *Eu coloquei: é comparar. Pegar um cubinho e ver quantos cabem em uma barrinha.* 47. P8: *Eu coloquei: é quantificar o tamanho de alguma coisa.* 48. P10: *Eu coloquei: medir algo é compará-lo a uma unidade preestabelecida.* *T.I.1*  *"Medir é especificar o tamanho de determinadas coisas."*	*ME.I.3* 1033. P5: *A unidade que eu encontrei foi área. Vocês...* 1034. P7: *Só comprimento e largura.* 1035. P5: *Então é só comprimento!* 1036. P7: *Hãn?* 1037. P5: *É só uma unidade: de comprimento.* 1038. P1: *Ah, tá.* 1039. P5: *A unidade é comprimento.* 1040. P7: *A unidade é comprimento.*
Análise	
Conhecimento de que a medida está associada à comparação de uma unidade de medida (denominada majoritariamente por "referência") com um todo, seguida de quantificação e/ou atribuição de um valor numérico.	Não fazem distinção entre unidade de medida e instrumento de medição. Revelam entender que a unidade de medida se relaciona com uma magnitude, mas alguns professores confundem unidade de medida com grandeza.
Descritores emergentes	
KoTd1 - conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida).	*KoTd5* - conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude dessa mesma grandeza.

Em alguns casos, o conteúdo do conhecimento revelado pelos professores foi identificado como matematicamente inapropriado, fosse por incorreções conceituais ou por inadequações de contextos em que esses conceitos eram evocados. Em outras situações suas produções não exteriorizaram, de forma explícita, elementos suficientes para caracterizar o conteúdo do conhecimento, mas a discussão conjunta com os fundamentos teóricos assumidos para a análise permitiu constituir tais descrições. Nesse sentido os descritores emergentes dessas produções são identificados, respectivamente, com os símbolos "*" e "**" associados, sendo KoTph2* e KoTf2** dois exemplos.

Das 473 evidências identificadas, sintetizamos 31 descritores: 6 relacionados com *Definitions*; 8 com *Foundations*; 5 com *Properties*; 2 com *Phenomenology and applications*; 8 com *Procedures*; e 2 com *Registers of representation*. A ordem da numeração dos descritores está relacionada exclusivamente com a quantidade de produções dos professores vinculadas a cada um deles, ou seja, quanto maior o número de produções associadas, menor é a numeração do descritor. Portanto, KoTd1 tem mais produções associadas do que KoTd5, por exemplo. Assim, não seguimos uma ordem sequencial na numeração dos indicadores de cada categoria, mas uma numeração por "pesos".

5. Resultados e discussão

Todos os grupos de professores consideraram que medir é comparar uma unidade de medida (que denominam "referência") com um todo, seguido de quantificação e atribuição de um valor numérico (*KoTph1* – conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza em termos da quantificação de uma em função da outra).

> *ME.I.4*
> 54. P14: *Eu coloquei que medir é comparar quantas vezes algo cabe em outro.*
> 55. P13: *É, eu coloquei também: medir é comparar e quantificar. Comparar coisas*
> 56. *comparáveis e dizer quantas vezes cabe.*

Figura 6. Trecho transcrito da discussão no Grupo 4

Ao assumirem a comparação como um construto fundamental para a medição (ME.I.4: 54), reconhecem sua relação com uma etapa inicial do processo completo de medir, mas incluem outros (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004), como é o caso da quantificação (ME.I.4: 55) (*KoTmp6* – conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir).

Apesar de não ficar claro se entendem os processos "quantificação" e "atribuição do valor numérico" como um único processo ou como processos distintos (ME.I.2: 84 – 90), reconhecem que há processos (mentais) e construtos fundamentais presentes em toda atividade de medição (Berka, 1983; Clements & Stephan, 2004) (*KoTf2*** – conhecer que os construtos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar" são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza).

ME.I.2
84. P9: *Eu e a P8 colocamos a questão do quantificar, vocês acham que a gente*
85. *coloca o quantificar aqui? Que medir a gente vai quantificar...*
86. P1O: *Ah, é que ele já está implícito aqui, não é?*
87. P8: *Quantificar nesse sentido, porque eu pensei em número, tem dez, tem quinze,*
88. *tem vinte, tem trinta... eu quantifico, eu dou um número para ele.*
89. P1O: *É que quando você compara com uma unidade padrão, você...*
90. P9: *Já está quantificando.*

Figura 7. Trecho da discussão no Grupo 2

Revelam também um conhecimento associado aos fenômenos e aos contextos de aplicação (Gómez & Cañadas, 2016) dos fundamentos da atividade de medir (ME.I.3: 367 – 370), mesmo quando sugerem a presença desses fundamentos em contextos a que efetivamente não estão associados (*KoTph2** – conhecer os distintos contextos de aplicação dos fundamentos da atividade de medir: medir comprimento, área, capacidade, massa, etc.).

ME.I.3
367. P1: *Nós fizemos uma comparação de medida agora mesmo: que horas são?*
368. *Quanto tempo falta para acabar? Nós medimos o tempo.*
369. P7: *Sim, claro!*
370. P1: *A gente está medindo o tempo, quanto tempo falta, por exemplo, não*

Figura 8. Trecho da discussão no Grupo 3

Ainda relativo à "quantificação", revelam conhecer que uma medida é dada por um valor expresso por uma quantidade contínua – embora não referindo explicitamente essa continuidade (ME.I.1: 304 – 310) –, em particular quando a medição é associada à grandeza comprimento. Essa interpretação pode ser dada em virtute da afirmação que P4 faz de que "quantificar está dentro de medida", levando-nos a reconhecer que há um conhecimento mobilizado de que a quantificação pode se referir a quantidade contínuas ou discretas, mas que, no caso da contagem, a quantidade a que nos referimos é sempre do tipo discreta, o que não ocorre com a natureza da magnitude de uma medida (*KoTpp3*** – conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua).

ME.I.1
304. (F pega um conjunto de cubinhos do material dourado e coloca-os sobre a mesa)
305. F: *Três, seis, nove, doze, quinze, dezoito, vinte e um, vinte e dois. Vinte e dois*
306. *cubinhos. Medi?*
307. P4: *Medir a quantidade? Não existe medir a quantidade, existe?*
308. P3: *Isso é contar ou quantificar. Contar e/ou quantificar, é a mesma coisa.*
310. P4: *Mas a quantificação está dentro de medida!*

Figura 9. Trecho transcrito da discussão no Grupo 1

Ainda que os professores reconheçam que o valor de uma medida pode ser expresso em termos de um número não inteiro (Smith et al., 2011) (*KoTpp3***), particularmente quando lidam com medições em que a unidade de medida é não padronizada (e.g., arestas de um paralelepípedo), nem todos (ME.PL.I:1111 – 1114) consideram a possibilidade de que os valores numéricos das medidas possam ser expressos por múltiplos e submúltiplos dessa unidade de medida (*KoTpp1* – conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada).

ME.PL.1

P4: *Eu fiz também, e deu quatro ponto nove. Então, deu quatro placas e nove... Aí, como eu sei que uma placa tem dez barrinhas, eu converti minha unidade de medida em barrinhas. Então, eu coloquei que tinham 49 barrinhas. E aí, tudo eu medi com barrinhas. Você entendeu?*

F: *Eu acho que sim! Ao invés de você pensar em placas como unidade, você pensou em barrinhas.*

P4: *Isso. em barrinhas. Porque eu não posso falar "quatro placas e nove, barrinhas", então, eu converti tudo em barrinhas.*

Figura 10. Trecho da discussão plenária

Consideram, inapropriadamente, que os submúltiplos de uma unidade correspondem a outra unidade distinta, algo que se relaciona com conhecer que toda unidade de medida possui múltiplos e submúltiplos (Berka, 1983) (*KoTpp2**– conhecer que toda unidade de medida, padronizada ou não padronizada, possui múltiplos e submúltiplos).

Revelam também um conhecimento das relações entre múltiplos e submúltiplos, ao efetuarem uma transposição direta entre a estrutura do Sistema de Numeração Decimal (valor posicional) e as relações de equivalência entre múltiplos e submúltiplos de unidades padronizadas que possuem base 10 (M.E.I.3: 225-228), como é o caso de comprimento, capacidade e massa. No entanto, pautam-se em memorização de regras que nem sempre estabelecem congruências verdadeiras (*KoTpp5** – conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal – base 10).

ME.I.3

P7: *Quando você ensina decimais, a partir do momento que você trabalha com medidas, você vai usar os mesmos números. Não vai mudar nada! O que é que vai mudar? É a nomenclatura. É a grandeza, só. O que era décimo, passa a ser decímetro, decilitro, decigrama. O outro, centímetro, centésimo.*

Figura 11. Trecho da discussão no Grupo 3

Quando as discussões se centram nas grandezas volume e capacidade (ME.I.2: 1468-1473), os professores revelam entender capacidade de um recipiente como a medida de “algo que cabe dentro” dele (Panorkou, 2021) (*KoTd2* – conhecer que a definição de capacidade pode ser dada como o espaço interno de um objeto tridimensional que pode ser preenchido).

ME.I.2
1468. P1O: *Não, o que tem volume é algo maciço, um sólido.*
1469. P9: *Sólido.*
1470. P1O: *Quando é sólido, ele tem volume.*
1471. P9: *Quando ele é oco...*
1472. PIO: *Quando ele é oco, ele tem capacidade.*
1473. P9: *Então, o recipiente tem capacidade.*

Figura 12. Trecho da discussão no Grupo 2

Corroborando a dificuldade para distinguir as grandezas volume e capacidade (Ho & McMaster, 2019), alguns professores consideram que somente os objetos sólidos (maciços) possuem volume, e objetos ocos possuem apenas capacidade (*KoTd4* – conhecer que a definição de volume pode ser dada como a porção do espaço ocupado por um objeto tridimensional).

ME.I.1
1231. P4: *A capacidade está relacionada com o que você usa para preencher,*
1234. *não é? Será que é essa a diferença entre capacidade e volume?*
1235. P3: *Para mim ainda é a mesma coisa.*
1236. P4: *Porque, por exemplo, esse copo. Ele tem 150 ml. Então, o volume dele*
1237. *é de 150 ml. Agora, quantos copinhos de café eu vou precisar para*
1238. *encher aqui? 0u de farinha? Aí eu acho que é a relação...*
1239. P11: *Depende do que eu estou usando.*
1240. P3: *É, por exemplo. tem capacidade para três copinhos de água, dois de*
1241. *feijão*

Figura 13. Trecho da discussão no Grupo 1

Entendem a grandeza área como o resultado do “preenchimento” de uma região (MEI.1: 657-659), definida uma unidade de medida, mas também como o resultado do produto de magnitudes unidimensionais, o que se associa com a coordenação entre duas dimensões (Panorkou, 2020), mas não entre duas unidades de medida (*KoTd3* – conhecer que a área pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira).

ME.I.1
657. P3: *Aí já entra a questão de área e perímetro, não é? Se eu quero saber área,*
658. *eu vou completar* (passa a caneta sobre a área da superficie da folha). *Se é só o*
659. *perímetro, eu faço só ao redor* (contorna a borda da folha com a caneta).

Figura 14. Trecho da discussão no Grupo 1

Os professores não fazem distinção entre medir a área e calcular o valor da área de uma região (*KoTmp3** – conhecer que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza) por meio de fórmulas matemáticas, especificamente no caso do retângulo (ME.I.3: 899-902) (*KoTmp8* – conhecer o procedimento associado ao uso da fórmula para determinar o valor da grandeza área no caso do retângulo: efetuar o produto das magnitudes dadas em dimensões ortogonais).

ME.I.3
899. P16: *Mas, a área é comprimento vezes altura, não é?*
900. P7: *A área é comprimento vezes altura, isso.*
901. P5: *Comprimento vezes largura*
902. P16: *Ah, vezes largura...*

Figura 15. Trecho da discussão no Grupo 3

Em contrapartida, particularmente no caso das figuras poligonais, os professores reconhecem que o perímetro não pode ser definido a partir do modo como é calculado (ME.I.3: 959-967) (*KoTd6* – conhecer que a definição de perímetro – em 2D – é o comprimento da linha que define a fronteira de uma figura plana).

ME.I.3
959. P5: PI6*, essa palavra, perímetro, significa contorno e o metro é a medida.*
960. *Então, quando você fala de perímetro, você está medindo o contorno da figura*
961. *O pessoal usa: "o perímetro é a soma dos lados". Porque sempre pegam*
962. *figurinhas, polígonos, que são essas figurinhas assim, regulares,*
963. *mas você não pode definir como sendo soma dos lados. Por quê? Porque você*
964. *tem figuras assim* (representa uma figura geométrica não poligonal). *Como eu*
965. *vou medir o perímetro disso? Então, você pega um barbante, coloca sobre*
966. *essa linha, estica e mede com uma trena, isso é perímetro, a medida do*
967. *contorno.*

Figura 16. Trecho transcrito da discussão no Grupo 3

Outros dois construtos que os professores não distinguem (ME.I.1: 436-441) são unidade de medida e instrumento de medição (*KoTf1** – conhecer a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição).

ME.I.1
436. P4: *Mas só que, olha: "como efetuamos uma medida?". Com um instrumento.*
437. *E aí, com o que podemos medir? Não é a mesma coisa? Com um instrumento...*
438. *Aí eu coloquei até um asterisco porque eu acho que é a mesma coisa!*
439. P11: *Eu coloquei que efetuamos utilizando uma unidade de referência*
440. *Aí eu coloquei: fita métrica, régua, mãos, pés... eu especifiquei aqui*
441. *o instrumento. Padrão ou não.*

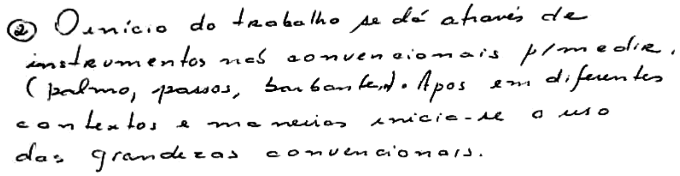
Figura 17. Trecho da discussão no Grupo 1

Ao passarem pelas estações para resolver a tarefa para os alunos, onde deveriam medir a capacidade e a massa de alguns objetos utilizando diferentes instrumentos de medição (copo plástico e balança de cabide) e unidades de medida não padronizadas (capacidade do copo e massa de uma barra do material dourado), não diferenciaram instrumento de unidade de medida (*KoTd5* – conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza).

Com o que você mediu?	Qual foi a unidade de medida utilizada para fazer a medição?
copinho de café (50ml) com ÁGUA	1 copinho ou 50 ml ou mililitro ?
Copinho de café (50 ml) com água	1 copinho ou (50 ml ou mililitros)

Figura 18. Registro de um professor do Grupo 3

Mesmo assim, ao referirem o seu trabalho habitual com os alunos (Figura 19), particularmente no caso da grandeza comprimento, os professores revelam conhecimento do papel das unidades de medida não padronizadas no entendimento das grandezas padronizadas (Passalaigue & Munier, 2015) (*KoTf4* – conhecer que as unidades de medida não padronizadas fundamentam as noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas).


② O inicio do trabalho se dá através de
instrumentos não convencionais p/ medir.
(palmo, passos, barbante). Apos em diferentes
contextos e maneiras inicia-se o uso
das grandezas convencionais.

O inicio do trabalho se dá através de instrumentos não convencionais para medir (palmo, passos, barbantes). Após, em diferentes contextos e maneiras, inicia-se o uso das grandezas convencionais.

Figura 19. Produção de um professor do Grupo 2

Identificam que um instrumento não padronizado (ME.I.1: 682-688) pode fornecer mais de uma unidade de medida (*KoTpp4* – conhecer que um instrumento padronizado, ou não, para medição de comprimento pode ser empregue associado a distintas unidades de medida e a distintas grandezas) e revelam conhecer que instrumentos não padronizados (ME.I.1: 689-691) podem ser utilizados de forma não padronizada (Ribeiro et al., 2018) para medir distintas grandezas (*KoTmp7* – conhecer que uma medição pode ser efetuada utilizando unidades não padronizadas de forma não padronizada: e. g., largura da caneta para medir comprimento; menor face de um prisma para medir a área de uma região).

ME.I.1
682. P12: *Talvez você queira medir a área do objeto* (com o indicador, contorna
683. o perímetro da folha sulfite).
684. P3: *Ah, e possa medir só pela largura da caneta* (simula a iteração da caneta
685. na superfície da folha).
686. P12: *É, ou você mede assim* (considera o comprimento da caneta como unidade de
687. medida para medir o perímetro da folha), *que seria o comprimento, ou você mede*
688. *assim* (itera largura como unidade para medir a área da folha), *que seria a área*
689. P3: *Mas não só a área, não é? Eu poderia medir esse espaço* (passa o indicador
690. no comprimento da folha) *com a caneta assim* (utiliza a largura da caneta como
691. unidade para medir o comprimento da folha).

Figura 20. Trecho da discussão no Grupo 1

No entanto, parece haver um “salto” entre o que os professores consideram como possibilidade de trabalho introdutório para a grandeza comprimento e o que se propõe para trabalhar com outras grandezas (Stephan & Clements, 2003). Em particular, para as grandezas capacidade e massa, revelam dificuldades (ME.I.4: 957-969) em conceber que uma medição pode ser efetuada com uma unidade de medida não padronizada, e resistem a aceitar o valor da medida correspondente obtido em termos dessa unidade (Bragg & Outhred, 2004) (*KoTf4*).

ME.I.4
957. P14: *Como eu queria medir a massa da placa, a balança de cabide,*
958. *para mim, não senviria de nada, então não usei ela. Eu usei só a*
959. *balança digital. 'Meca massa da placa'. No cabide?*
960. P6: *E, você teria que estimar...*
961. P13: *Ora, na balança você não tem a (gesticula com as mãos como*
962. *se indicasse os dois pratos da balança)... o quilo?*
963. P6: *Ah, é! Você iria colocando até igualar!*
964. P14: *Mas aí você ia ter que fazer comparação. Qual é*
965. *a massa da placa? A massa da placa é igual a massa de 12*
966. *barrinhas?*
967. P13: *É, 12 barrinhas separadas.*
968. P14: *Daí eu pensei assim, se eu quero a massa da placa, já vou usar*
969. *um instrumento que me dá a massa, que é a balança!*

Figura 21. Trecho da discussão no Grupo 4

Essas dificuldades estão associadas a uma lacuna entre as discussões desenvolvidas no âmbito da grandeza comprimento e o que (não) se faz para a conceitualização das outras grandezas (Passalaigue & Munier, 2015), mas, fundamentalmente, vinculam-se ao conteúdo do conhecimento dos professores acerca de: o que é uma medida (*KoTd1*); o que é uma unidade de medida (*KoTd5*); os constructos que fundamentam a atividade de medir (*KoTf2***); o entendimento de que o que se mede são as grandezas (*KoTf3*). De fato, assumem inapropriadamente (ME.I.1: 33 e 97-98) que grandeza é uma "característica" de um objeto físico (Berka, 1983), e não uma propriedade mensurável desse objeto ou de um fenômeno físico (*KoTf3** – conhecer que o que se mede são grandezas que correspondem a propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos).

ME.I.1
33. P12: *Medir é dar, mensurar valor a uma característica do objeto...*
(...)
97. P4: *acho que são essas três as características, não?*
98. *Tamanho, volume ou massa. Tem alguma outra?*

Figura 22. Trecho da discussão no Grupo 1

O termo "tamanho" é utilizado de forma genérica pelos professores, principalmente associado ao comprimento – uso matematicamente inadequado –, o que revela seu conhecimento da nomenclatura da grandeza (*KoTrp1** – conhecer a nomenclatura adequada para se referir a cada uma das grandezas). Ao mesmo tempo, revelam conhecimento da necessidade de uma nomenclatura matemática adequada (ME.I.1: 1659-1670), associada às unidades de medida (*KoTrp2* – conhecer a nomenclatura e simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas).

ME.I.1
1659. P3: *Qual foi a unidade de medida? Na estacão 1 é barra de madeira. Depois*
1660. *eu acrescentei largura do paralelepipedo, para ficar mais acadêmico.*
1661. P11: *Eu acho que é a nomenclatura, também. Porque todo mundo usou o*
1662. *paralelepípedo.*
1663. P4: *Eu acho que é a referência. Porque, eu, por exemplo, usei como referência a*
1664. *altura, largura e o comprimento.*
1665. P12: *É porque eu acho que tem diferença usar a largura dela, eu posso ter usado*
1666. *outro lado do paralelepípedo.*
1667. P4: *Como largura, não é?*
1668. P3: *Eu coloquei só barra de madeira. Mas, se eu falasse para você: meça com a*
1669. *barra de madeira, não ia dar o mesmo. Você poderia medir de outro jeito. Então,*
1670. *está errado o jeito que eu fiz.*

Figura 23. Trecho da discussão no Grupo 1

Todos os professores reconhecem a importância do construto "unidade de medida" (Bragg & Outhred, 2004) e sabem que, sem ela, não se efetua uma medição (*KoTf5* – conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição).

ME.I.3
54. P7: *Eu posso medir qualquer coisa, desde que eu possua um referencial,*
55. *que no caso seria...*
56. P1: *A unidade de medida.*

Figura 24. Trecho da discussão no Grupo 3

Somente dois dos quatro grupos (ME.I.2: 60-62) abordaram explicitamente um dos elementos do conhecimento dos fundamentos da Medida (*KoTf6* – conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza).

ME.I.2
60. P17: *É, por exemplo, se eu vou medir o comprimento, eu vou pegar algo que...*
61. P1O: *Que tenha comprimento...*
62. P9: *É, porque depende do que você vai medir.*

Figura 25. Trecho da discussão no Grupo 2

Esse fato associa-se a duas dimensões: por um lado, por não deterem um conhecimento associado à definição de medida (*KoTd1*), não consideram que a unidade de medida e o todo a ser medido tenham de ser magnitudes de mesma natureza. Por outro lado, a "comparação" entre uma unidade de "referência" e algo relacionado a essa referência é o construto que sustenta o conteúdo desse conhecimento; portanto, tal comparação só é possível entre magnitudes de mesma natureza, mas não distinguir unidade de instrumento de medição (*KoTf1**) pode sustentar o não reconhecimento da necessidade de que as magnitudes da unidade e todo a ser medido sejam da mesma natureza.

Os professores revelam um conhecimento associado às unidades de medida padronizadas e não padronizadas mais comuns (*KoTf7* – conhecer as unidades de medida padronizadas para cada grandeza).

ME.I.4
99. P13: *O padrão está relacionado com, por exemplo, o metro, o centímetro.*
100. *Entendeu? E o não padrão é, por exemplo, eu pegar esse livro e fazer...*
101. P6: *Por meio dele.*
102. P13: *Isso, o livro, o palmo.*
103. P14: *Qual é o padrão para medida de comprimento? O metro. E esse padrão*
104. *para medida de comprimento foi combinado, como a P15 falou, em convenção.*

Figura 26. Trecho da discussão no Grupo 4

Ao resolverem a tarefa dos alunos, revelam conhecer procedimentos de medição fazendo uso dos princípios essenciais da atividade de medir (Clements & Stephan, 2004). No entanto, solicitados a medir o comprimento de um elemento maleável – barbante – utilizando como instrumento de medida um elemento sólido – paralelepípedo –, os professores revelam dificuldades em aplicar esses princípios.

ME.I.4
680. (P14 apoia o paralelepípedo sobre a maior face. Usa a maior aresta como unidade
681. de medida e estica o fio sobre essa face, coincidindo uma das extremidades com
682. um dos vértices do paralelepípedo).
683. P14: *Aí parou aqui, aí você marca ele aqui.*
684. (P14 dobra o fio sobrepondo a parte que ainda falta para ser medida
685. sobre a parte que já foi medida)
686. *Você pode voltar ele aqui.*
687. P6: *Eu também fiz isso!*

Figura 27. Trecho da discussão no Grupo 4

No procedimento descrito (ME.I.4: 680-686), P14 não considera que, ao dobrar o fio, uma porção do todo a ser medido – o comprimento do barbante – foi perdida, deixando lacunas entre as unidades de medida na iteração (Clements & Stephan, 2004). Apesar de a maioria efetuar o procedimento de iteração de forma adequada (descrito na Figura 28), não há menção explícita ao que sustenta tal procedimento (*KoTmp1*** – conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração). Assim, pode ser algo que forma parte do *script* de medição, e não é, portanto, entendido como central nesse processo, que fundamenta a existência de um algoritmo a ele associado (*KoTf8*** – conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado).

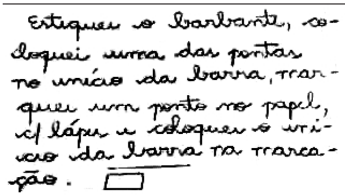
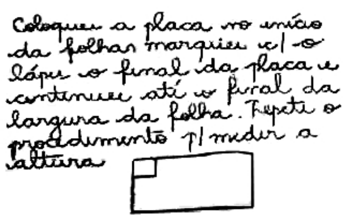
	*Estiquei o barbante, coloquei uma das pontas no início da barra, marquei um ponto no papel, com lápis e coloquei o início da barra na marcação.*
	*Coloquei a placa no início da folha marquei com o lápis o final da placa e continuei até o final da largura da folha. Repeti o procedimento para medir a altura.*

Figura 28. Registro de um professor do Grupo 1

Para medir uma distância (ME.I.3: 175-178), consideram a relação entre a magnitude da unidade de medida e a quantidade de vezes que terá de ser iterada para medir o todo (*KoTmp4* – conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante a magnitude da mesma natureza do todo (d) a ser medido (v = d/u)).

ME.I.3
175. P5: *Então, eu vou verificar quantos palmos eu tenho aqui nesta folha.*
176. P7: *O que vai ser diferente de cada um de nós. Depois nós vamos comparar.*
177. P5: *E, eu vou comparar...*
178. P7: *A sua medida ficou menor porque o seu palmo é maior.*

Figura 29. Trecho de discussão no Grupo 3

Apesar de os professores associarem instrumento de medida com unidade de medida (ME.I.1: 412-413), destacam a necessidade (condição necessária) de que essa seja única no processo de medição. Porém, não fica claro se conhecem que na iteração sempre se deve utilizar a mesma unidade de medida (Norton & Boyce, 2015), ainda que ela seja formada pela composição de outras unidades (*KoTmp5***: conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade seja resultante de uma composição de unidades – *unitizing*).

ME.I.1
411. P4: (...) *E, a partir do momento*
412. *que eu defino o meu instrumento, eu devo utilizá-lo durante todo o meu*
413. *processo de medida. Que aí foi o que ela falou uma vez, lembra? Ah, quanto*
414. *tem essa folha?*
415. (P4 coloca uma caneta, uma borracha e um lápis alinhados sobre o maior
416. comprimento de uma folha sulfite)
417. *Tem uma caneta, ima borracha e um lápis. Não. Se eu comecei com uma caneta,*
418. *eu tenho que terminar com a caneta.*

Figura 30. Registro de um professor do Grupo 1

No intuito de sintetizar os resultados obtidos neste estudo e de avançar na teorização desse conhecimento – por via dos descritores –, apresentamos uma caracterização obtida do conhecimento especializado do professor relativamente a tópicos de Medida – KoT.

TABELA IV
Categorias e descritores relacionados ao subdomínio *Knowledge of Topics* de Medida

Categorias	*Descritores*
Definitions (KoTd)	*KoTd1* – conhecer a definição de medida: relação numérica entre magnitudes de uma mesma grandeza, obtida por comparação seguida de quantificação de uma dessas magnitudes (todo a ser medido) em função da outra (unidade de medida).
	KoTd2 – conhecer que a definição de capacidade pode ser dada como o espaço interno de um objeto tridimensional que pode ser preenchido.
	KoTd3 – conhecer que a área pode ser definida como a superfície delimitada pela fronteira.
	KoTd4 – conhecer que a definição de volume pode ser dada como a porção do espaço ocupado por um objeto tridimensional.
	KoTd5 – conhecer a definição de unidade de medida: uma magnitude de uma grandeza com a qual se pode medir outra magnitude desta mesma grandeza.
	KoTd6 – conhecer que a definição de perímetro (em 2D) é o comprimento da linha que define a fronteira de uma figura plana.

Properties (KoTpp)	*KoTpp1* – conhecer que os múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida – padronizada ou não – são estabelecidos por meio de relações de equivalências entre magnitudes da grandeza à qual a unidade está associada. *KoTpp2** – conhecer que toda unidade de medida (padronizada ou não padronizada) possui múltiplos e submúltiplos. *KoTpp3*** – conhecer que a magnitude de qualquer grandeza, ou unidade desta, é expressa necessariamente por uma quantidade contínua. *KoTpp4* – conhecer que um instrumento padronizado, ou não, para medição de comprimento pode ser empregue associado a distintas unidades de medida e a distintas grandezas. *KoTpp5** – conhecer as relações de equivalência estabelecidas entre múltiplos e submúltiplos de uma unidade de medida padronizada com estrutura decimal (base 10).
Foundation (KoTf)	*KoTf1** – conhecer a distinção entre unidade de medida e instrumento de medição. *KoTf2*** – conhecer que os constructos "comparar", "iterar", "acumular" e "quantificar" são fundamentos da atividade de medir qualquer grandeza com unidades padronizadas ou não padronizadas dessa grandeza. *KoTf3** – conhecer que o que se mede são as grandezas que correspondem a propriedades mensuráveis dos objetos ou fenômenos. *KoTf4* – conhecer que as unidades de medida não padronizadas fundamentam a constituição de noções de grandezas e de suas respectivas unidades de medida padronizadas. *KoTf5* – conhecer que a unidade de medida é um elemento fundamental no processo de medição. *KoTf6* – conhecer que a unidade de medida e o todo a ser medido devem ser de mesma natureza, ou seja, são expressos por magnitudes de uma mesma grandeza. *KoTf7* – conhecer as unidades de medida padronizadas para cada tipo de grandeza. *KoTf8*** – conhecer que a iteração é um processo associado a um conjunto de comandos que são repetidos de forma idêntica até que se obtenha determinado resultado.
Phenomenology and applications (KoTph)	*KoTph1* – conhecer que medir é comparar magnitudes de uma mesma grandeza, em termos da quantificação de uma em função da outra. *KoTph2** – conhecer os distintos contextos de aplicação da atividade de medir: medir comprimento, área, capacidade, massa, etc.

Procedures (KoTmp)	*KoTmp1** – conhecer os procedimentos de iteração para se efetuar uma medição de qualquer grandeza: a unidade de medida deve ser iterada até completar o todo a ser medido, sem que se deixem lacunas ou se sobreponham unidades ao longo da iteração. *KoTmp2* – conhecer a característica do resultado de uma medição: uma medida é expressa por um valor numérico associado a uma marca, correspondente à unidade de medida (padronizada ou não) utilizada. *KoTmp3* – conhecer que efetuar uma medição não corresponde a calcular uma medida, mas sim estabelecer uma relação entre duas magnitudes de uma mesma grandeza. *KoTmp4* – conhecer a característica do resultado de uma medição: o valor numérico (v) obtido na medição é inversamente proporcional à magnitude da unidade de medida (u), quando se considera constante o todo (d) a ser medido (v = d/u). *KoTmp5*** – conhecer que é condição necessária para se efetuar uma medição que a unidade de medida seja única, ainda que essa unidade possa ser resultante de uma composição de unidades (*unitizing*). *KoTmp6* – conhecer que a comparação é uma condição necessária, mas não suficiente para medir. *KoTmp7* – conhecer que uma medição pode ser efetuada utilizando unidades não padronizadas de forma não padronizada: e.g., largura da caneta para medir comprimento ou área de uma figura retangular; menor face de um prisma para medir área de uma região. *KoTmp8* – conhecer o procedimento associado ao uso da formula para determinar o valor da grandeza área no caso do retângulo: efetuar o produto das magnitudes dadas em dimensões ortogonais.
Registers of representations (KoTrp)	*KoTrp1** – conhecer a nomenclatura adequada para se referir a cada uma das grandezas. *KoTrp2* – conhecer a nomenclatura e a simbologia adequadas para se referir às unidades de medida: unidades padronizadas e não padronizadas.

Fica evidente a prevalência de alguns descritores em detrimento de outros. Essas diferenças podem estar associadas, por um lado, ao fato de que a *TpF* (Ribeiro et al., 2021) não perseguia objetivos específicos associados à categoria *Registers of representation*. Por outro lado, os resultados da categoria *Phenomenology and Applications* são coerentes com estudos anteriores que identificaram seu conteúdo como o mais ausente (Gómez & Cañadas, 2016; Zakaryan & Ribeiro, 2018).

6. Comentários finais

Descrever, entender e caracterizar o conteúdo do conhecimento especializado de um grupo de professores de diferentes etapas educativas no âmbito da Medida contribui para clarificar certas particularidades e especificidades do conhecimento do professor que ensina ou ensinará os tópicos de Medida, independentemente da etapa educativa em que atua, uma vez que, particularmente no caso do subdomínio KoT (em foco neste trabalho), tal caracterização contribui para tornarem evidentes certos elementos estruturais e estruturantes do conteúdo do conhecimento do professor. Nesse sentido, são precisamente esses elementos estruturais e estruturantes que compõem o conteúdo do conhecimento docente em relação a cada tópico matemático que nos permitem considerar que, independentemente da etapa educativa em que este profissional atue, poderá mobilizar esses conhecimentos, quando inserido em uma prática letiva qualquer.

Notemos, além disso, que essa não associação entre essas especificidades e a etapa em que o professor atua contribui para que possamos encarar a matemática elementar de um ponto de vista avançado (Klein, 1932) e vice-versa, mas também para que possamos mapear esse conhecimento especializado, numa perspectiva de descompactá-lo (Ma, 1999) e torná-lo mais acessível a outros.

Naturalmente, a busca por esse mapeamento não pretende prescrever todo o conhecimento do professor, mas almeja fornecer elementos para que o professor se paute em "ideias centrais que determinam como o conhecimento é gerado e organizado dentro da disciplina" (Schmidt et al., 2002, p. 9).

Quando nos propomos a um detalhamento do conteúdo do conhecimento do professor, importa evidenciar as características e os elementos que constituem as especificidades desse conhecimento. Nesse sentido, pautados por resultados anteriores (Policastro & Ribeiro, 2021), passamos a considerar que o conteúdo do conhecimento do professor associado à categoria *Definitions*, *properties and foundations* (Carrillo et al., 2018), relativamente a qualquer tópico, mas aqui, em particular, nos tópicos de Medida, deveria ser encarado em termos de suas especificidades, de forma separada, em categorias distintas. De fato, os resultados obtidos permitem identificar, em específico nas categorias *Properties* e *Foundations*, componentes do conhecimento do professor que necessitam ser desenvolvidas.

Assim, é essencial que o desenho de programas de formação considere explicitamente estes e outros resultados, com objetivo de contribuir para desenvolver o conteúdo do conhecimento do professor que lhe permita, por exemplo, conectar conceitos, propriedades e fundamentos, e, na sua prática letiva – atual ou futura –, evidenciar essas conexões dentro de um mesmo tópico e entre tópicos distintos, dando forma à estrutura da disciplina (Gamboa et al., 2020).

Para isso, é necessário um foco específico da formação, associado a tarefas desenhadas intencionalmente (Ribeiro, 2021; Ribeiro, Gibim & Alves, 2021) com a finalidade de desenvolver uma consciência das estruturas da matemática (Mason et al., 2009), do entendimento das conexões matemáticas e do conhecimento de como organizar, numa distribuição curricular, os tópicos, de modo a evidenciar essas conexões (Vale et al., 2010).

Os resultados aqui obtidos – associados aos descritores de conhecimento – contribuem, portanto, para um mais amplo entendimento do conteúdo do conhecimento do professor – aqui no âmbito do KoT, relativamente aos tópicos de Medida – e das categorias que o formam, possibilitando um olhar mais detalhado para essa componente da estrutura do conhecimento especializado. Entretanto, para que possamos continuar refletindo sobre essas componentes, algumas questões se abrem, contribuindo para guiar uma agenda de pesquisa que busque, de forma imbricada, uma relação com a formação de professores: (i) que relações ocorrem entre os descritores do conhecimento dos tópicos (KoT) de Medida e outros tópicos, como em Números e Operações?; ii) qual o papel dessas relações na composição estrutural do conhecimento do professor relativamente a esses tópicos?; iii) quais os impactos na prática letiva do professor no caso de as formações (iniciais e contínuas) objetivarem o desenvolvimento do conhecimento do professor associado a essas estruturas matemáticas?; v) de que forma as especificidades do conhecimento do professor se vão desenvolvendo ao longo do tempo, pela participação em contextos formativos que têm essa intencionalidade?

Referências

Ainsworth, S. (2006). A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*, 183–198. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Barrett, J. E., Cullen, C., Sarama, J., Clements, D. H., Klanderman, D., Miller, A. L., & Rumsey, C. (2011). Children's unit concepts in measurement: A teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM*, *43*(5), 637-650. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0368-8

Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*, 28–54. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.625075

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235–268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Berka, K. (1983). *Measurement: its concepts, theories and problems* (Vol. 72). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-7828-7

Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S., & Wyckoff, J. (2009). Teacher preparation and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *31*(4), 416–440. https://doi.org/10.3102/0162373709353129

Bragg, P., & Outhred, L. (2004). A measure of rulers—The importance of units in a measure. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 159–166. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489702.pdf

Caldatto, M. E., Fiorentini, D. & Pavanello, R. M. (2018). Uma análise do Projeto de formação profissional de professores privilegiada pelo PROFMAT. *Zetetiké*, *26*, 260–281. https://doi.org/10.20396/zet.v26i2.8651034

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–256. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Charalambous, C. Y. (2015). Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: A multiple-case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 427–445. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9318-7

Charles, R. I. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school Mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership*, *7*(3), 9–24. https://jaymctighe.com/wp-content/uploads/2011/04/MATH-Big-Ideas_NCSM_Spr05v73p9-24.pdf

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. Em F. K. Lester (Org.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 461–555). Information Age Publishing.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early Math: The learning trajectory approach*. Routledge.

Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. Em D. Clements, J. Sarama & A.-M. DiBiase (Orgs.), *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education* (pp. 299–317).

Di Bernardo, R., Policastro, M., Almeida, A. R. de, Ribeiro, M., Melo, J. M. de, & Aiub, M. (2018). Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: Conexões em medidas. Cadernos Cenpec, 8(1), 98–124. http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v8i1.391

Gamboa, G., Badillo, E., Ribeiro, M., Montes, M., & Sanchéz-Matamoros, G. (2020). The role of teachers' knowledge in the use of learning opportunities triggered by mathematical connections. In S. Zehetmeier, D. Potari, & M. Ribeiro, *Professional development and knowledge of Mathematics teachers* (1ª ed., pp. 24–43). Routledge.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2002). Magnitudes y medida. Em *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros.* (p. 611–654). Universidad de Granada, Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(3), 311–334. https://doi.org/10.12802/relime.13.1933

Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *The Arithmetic Teacher*, *31*(7), 19–24. http://www.jstor.org/stable/41192320

Hill, H. C., & Chin, M. (2018). Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. *American Educational Research Journal*, *55*(5), 1076–1112. https://doi.org/10.3102/000283121876961

Ho, A., & McMaster, H. (2019). Is' capacity'volume? Understandings of 11 to 12-year-old children. Em G. Hine, S. Blackley & A. Cooke (eds.), *Mathematics Education research: Impacting practice* (*Proceedings of the 42nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*) (pp. 356–363). MERGA. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED604312.pdf

Irwin, K. C., Ell, F. R., & Vistro-Yu, C. P. (2004). Understanding linear measurement: A comparison of Filipino and New Zealand children. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 3–24. https://doi.org/10.1007/BF03217393

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an andvanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (3ª ed., Vol. 1). Macmillan.

Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. *Learning and Teaching Measurement*, *1*, 100–121.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary Mathematics: Teacher's understanding of fundamental Mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219–248. http://www.jstor.org/stable/3482837

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10–32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

Ministério da Educação (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics—National Council of Teacher of Mathematics*. Reston, VA.

Norton, A., & Boyce, S. (2015). Provoking the construction of a structure for coordinating n+1 levels of units. *The Journal of Mathematical Behavior*, *40*, 211–232. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.006

Organisation for Economic Co-operation and Development (2010). PISA 2009 results: What *students know and can do. Student performance in reading, mathematics, and science* (Vol. 1). OECD.

Pape, S., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice*, *40*(2), 118–127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6

Panorkou, N. (2020). Dynamic measurement reasoning for area and volume. *For the Learning of Mathematics*, *40*(3), 9–13. https://www.jstor.org/stable/27091164

Panorkou, N. (2021). Exploring students' dynamic measurement reasoning about right prisms and cylinders. *Cognition and Instruction*, 1–35. https://doi.org/10.1080/07370008.2021.1958218

Passalaigue, D., & Munier, V. (2015). Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and mesaurement. *Educational Studies in Mathematics*, *89*, 307–336. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9610-6

Policastro, M. S., Almeida, A. R., & Ribeiro, M. (2017). Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. *Revista Espaço Plural*, *36*(1), 123–154. https://e-revista.unioeste.br/index.php/espacoplural/article/view/19714

Policastro, M. S., Almeida, A. R., Ribeiro, M., & Jakobsen, A. (2020). Kindergarten teacher's knowledge to support a mathematical discussion with pupils on measurement strategies and procedures. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland. *Mathematics education in early years* (pp. 263–279). Springer.

Policastro, M. S., & Ribeiro, M. (2021). Conhecimento especializado do professor que ensina matemática relativo ao tópico de divisão. *Zetetiké*, *29*, 1–24. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661906

Ribeiro, M., Almeida, A. R. de, & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(35), 1–32. https://doi.org/1046312/pem.v14i35.13263

Ribeiro, M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15(1)*, 93–121. https://www.redalyc.org/journal/335/33523151005/html/

Ribeiro, M., Gibim, G., & Alves, C. (2021). A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: Discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do conhecimento interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(34), 1–24. https://doi.org/10.46312/pem.v14i34.12686

Ribeiro, M., Jakobsen, A., & Mellone, M. (2018). Secondary prospective teachers' interpretative knowledge in a measurement situation. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter, *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 35–42). PME.

Ribeiro, M., & Policastro, M. (2021). *As medidas e as especificidades do conhecimento do professor para que os alunos aprendam Matemática com significado* (1.ª ed., vol. 2). CRV.

Sarama, J., Clements, D. H., Barret, J., Van Dine, D. W., & MacDonel, J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 667–680. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0326-5

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2017). What makes Mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–20. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum. *American Educator*, *Summer*, 1–18. https://www.math.mun.ca/~hsgaskill/refs/curriculum.pdf

Smith, J. P., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: Introduction to the issue. *ZDM Mathematics Education*, *43*(5), 617–620. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0369-7

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. (1.ª ed.). Sage Publications.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 237–295. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00022-1

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. Em D. H. Clements & G. Bright (eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 yearbook* (pp. 3–16). National Council of Teachers of Mathematics.

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). *Grounded theory methodology: An overview*. Sage Publications.

Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*, 177–198. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9255-2

Szilagyi, J., Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). young children's understandings of length measurement: Evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education.*, *44*(3), 581–620. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.44.3.0581

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics wiht particular reference to limits and continuity. *Educational Studes in Mathematics*, *12*, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Vale, C., McAndrew, A., & Krishnan, S. (2010). Connecting with the horizon: Developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 193–212. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9162-8

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM Mathematics Education*, *43*(5), 621–635. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0331-8

Venturi, G. (2014). Foundation of Mathematics between theory and practice. *Philosophia Scientiæ*, *18*(1), 45–80. https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.912

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Em D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Springer.

Vysotskaya, E., Lobanova, A., Rekhtman, I., & Yanishevskaya, M. (2020). The challenge of proportion: Does it require rethinking of the measurement paradigm? *Educational Studies in Mathematics, 106,* 429-446. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09987-8

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the Learning of Mathematics*, *22*(3), 14–17. https://www.jstor.org/stable/40248396

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2018). Mathematics teachers' specialized knowledge: A secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 1–19. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1525422

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317–346. https://www.jstor.org/stable/30035043

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Autores

Milena Policastro. Universidad Estatal de Campinas, Brasil. mitapolicastro@gmail.com

https://orcid.org/0000-0003-2437-2557

Miguel Ribeiro. Universidad Estatal de Campinas, Brasil. cmribas78@gmail.com

https://orcid.org/0000-0003-3505-4431

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* es una revista científica indizada que busca diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, es decir, *relativos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático*, en escenarios y contextos diversos. *Publica cuatrimestralmente* artículos inéditos y arbitrados, con resultados originales de investigación científica en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores, docentes de Matemáticas y Ciencias, estudiantes de licenciatura y posgrado y tomadores de decisiones relacionados con el campo disciplinar.

La Relime es la publicación oficial de investigación del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (Clame)*, asociación científica y académica sin fines de lucro. Actualmente, la Relime se edita y pública desde la Ciudad de México, México.

Los objetivos de la Relime son:

- Ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa; sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
- Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe, y en el resto del mundo.
- Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
- Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
- Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

Las contribuciones enviadas a la Relime deben ser manuscritos originales (nuevo conocimiento) e inéditos (no haber sido publicados en ningún otro medio, ni estar en proceso de evaluación en otra revista), pertinentes y relevantes para la Matemática Educativa.

En cada número, la Relime publica una editorial y cuatro artículos con una política de acceso abierto vía diamante. Los artículos pueden ser:

- *Artículos de investigación empírica*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios clínicos o *in situ*.

– *Artículos de investigación documental*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios sobre el curriculum, libros de texto, historia de la educación, entre otros.
– *Ensayos teóricos y filosóficos*: Texto producto del estudio y la reflexión académica de un tópico de interés para la comunidad científica en Matemática Educativa.
– *Revisiones bibliográficas*: Estados del arte, delimitados, sobre tópicos especializados en nuestro campo disciplinar. La revisión debe contribuir en el entendimiento profundo del tópico y proporcionar un análisis académico y crítico sobre las aportaciones de la investigación, así como trazar una prospectiva original para su estudio.

Se reciben manuscritos dentro de los periodos: *1 de enero al 30 de junio*, y *1 de septiembre al 31 de octubre*. Estos deben presentarse en versión electrónica, vía correo electrónico a *editorial@relime.org*; deben ser de una extensión máxima de 9,000 palabras en su primer envío, sin excepciones, incluyendo cuadros, gráficas, referencias y anexos; tener una redacción clara, buena ortografía y una estructura coherente al tipo de artículo enviado.

Para más información sobre el formato de las contribuciones y las normas editoriales de la Relime, favor de visitar la página oficial de la revista *https://relime.org*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 26, Número 1

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Marzo de 2023
Impresión bajo demanda